

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Suscetibilidades de Carga e Spin para uma Superfície de  
Fermi Chata Bidimensional**

Por

Eberth de Almeida Corrêa

*Agosto-2006*

TESE DE DOUTORADO

**Suscetibilidades de Carga e Spin para uma Superfície de  
Fermi Chata Bidimensional**

Por

Eberth de Almeida Corrêa

**Orientador**

Prof. Dr. Álvaro Ferraz Filho

“Todos os homens dão mais atenção às palavras do que às coisas; o que faz com que concordem muitas vezes com termos que não entendem e que não se preocupam em entender, ou porque acreditam tê-los entendido noutros tempos, ou porque lhes pareceu que aqueles que lhes ensinaram conheciam-lhe o significado e que eles o aprenderam pelo mesmo meio.”

*René Descartes*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, a todos os que tornaram possível, mesmo que de forma indireta, a realização desta tese de doutorado.

Em especial, agradeço à minha mãe por ter acreditado em meu potencial diante de todas as dificuldades neste longo caminho percorrido.

Agradeço aos meus amigos, Geraldo Gamma de Azevedo, Washington Barbosa, Airton Antônio e Carlos Jader por permanecerem ao meu lado nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu colega de doutorado e companheiro de sala Hermann Freire e ao professor Dr. Evgueny Kochetov por valiosas discussões que ajudaram na confecção desta tese de doutorado.

Agradeço, também, ao meu orientador professor Dr. Álvaro Ferraz Filho por me orientar durante o mestrado e o doutorado e pela paciência e dedicação que culminaram neste trabalho.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa de doutorado que viabilizou este trabalho.

# Resumo

Neste trabalho investigamos as instabilidades de carga e “spin” inerentes a um modelo bidimensional ( $d = 2$ ) de elétrons fortemente interagentes na presença de uma superfície de Fermi (SF) “chata”, utilizando a técnica do grupo de renormalização (GR). Tendo em mente as fortes repulsões eletrônicas presentes nos cupratos supercondutores, procuramos relacionar, sempre que possível, nosso modelo ao modelo de Hubbard repulsivo em  $d = 2$ . Para efetuarmos os cálculos das funções de Green do sistema físico fazemos uso da teoria de perturbação. Em seguida, aplicamos a sistemática do GR para regularizarmos todas as divergências logarítmicas que são geradas perturbativamente pelo nosso modelo microscópico. Para verificarmos a adequação de nossa abordagem, aplicamos nossa técnica para o caso unidimensional explorando as simetrias de “spin” para definirmos as suscetibilidades de onda de densidade de carga (*ODC*), de onda de densidade de “spin” (*ODS*), de supercondutividade do tipo singleto (*SCS*) e, finalmente, de supercondutividade do tipo tripleto (*SCT*) que são ingredientes fundamentais na confecção do diagrama de fase no espaço dos acoplamentos. Na aproximação de dois “loops”, podemos constatar a validade do teorema de Mermin e Wagner para ambos os casos  $d = 1, 2$ . Em nosso caso bidimensional, vemos que, seguindo o caso unidimensional, não há quasipartículas estáveis no sistema físico para um regime repulsivo de forte acoplamento. Isso, como sabemos, invalida a teoria do líquido de Fermi de Landau. Mostramos também que, no caso bidimensional, há uma simetria intrínseca adicional a ser explorada, levando-se em conta a variação das funções resposta em relação à mudança de sinal do momento ao longo da SF. Assim, definimos outras suscetibilidades que são importantes para o problema dos cupratos supercondutores como as ondas de densidade de carga dos tipos s e d (*ODC* $\pm$ ), as ondas de densidade de “spin” dos tipos s e d (*ODS* $\pm$ ), as supercondutividades do tipo singleto dos tipos s e d (*SCS* $\pm$ ) e, finalmente, as supercondutividades do tipo tripleto dos tipos s e d (*SCT* $\pm$ ). Finalmente, construímos o

diagrama de fase, na aproximação de dois “loops”, no espaço dos acoplamentos que exhibe as suscetibilidades predominantes em todos os regimes de interação. No regime repulsivo, que é nosso caso de interesse, a suscetibilidade  $ODS+$  se sobressai. Vemos, entretanto, que a divergência da suscetibilidade  $ODS+$  é um artefato da aproximação e apenas sinaliza que há um reforço das flutuações antiferromagnéticas no sistema. Em contraste, nesse mesmo regime, todas as outras suscetibilidades fluem para valores fixos não sendo, portanto, reforçadas no sistema físico. Concluimos nosso trabalho chamando a atenção para os problemas que ainda estão em aberto e para a importância de estabelecermos a topologia da SF para elucidarmos a origem do “pseudogap” anisotrópico nos cupratos supercondutores.

# Abstract

In this work we investigate the charge and spin instabilities of a two-dimensional model ( $d=2$ ) of strongly interacting electrons in the presence of a flat Fermi surface (FS) by using the renormalization group theory (RG). Bearing in mind the strong electronic repulsions in the cuprates superconductors, we try to relate our model to the repulsive Hubbard model in  $d = 2$  as much as possible. By means of perturbation theory we calculate the Green functions of the physical system. After that, we apply the RG concept to regularize all the logarithm divergences generated by the microscopic model in the perturbation theory. To test the accuracy of our approach, we employ our technique for the one-dimensional case exploring the spin symmetries to define the susceptibilities of the charge density wave (*CDW*) type, of the spin density wave (*SDW*) type, of the singlet superconductivity (*SSC*) type and, finally, of the triplet superconductivity (*TCS*) type that play an important role for the construction of the phase diagram in coupling space. In our two-loop approach, it becomes clearer the validity of the Mermin and Wagner theorem for both cases  $d = 1, 2$ . In our two-dimensional case, we see that, following what happens in  $d = 1$ , there are no stable quasiparticles in the physical system for strong coupling repulsive regime. This, as we know, invalidates Landau Fermi liquid representation. We show also that, for the two-dimensional case, there exists an additional intrinsic symmetry of our model to be explored if we take into account the variation of the response functions with respect the change of sign of the momentum along the FS. In this way, we define others susceptibilities that play an important role in the problem of the cuprates superconductors like the charge density waves of types s and d (*CDW* $\pm$ ), the spin density waves of types s and d (*SDW* $\pm$ ), the singlet superconductivities of types s and d (*SSC* $\pm$ ) and, finally, the triplet superconductivities of types s and d (*TSC* $\pm$ ). Finally, we construct the phase diagram in coupling space in our two-loop approach displaying all the dominant susceptibilities

for all regimes of interaction. In the repulsive regime, which is our case of interest, the  $SDW+$  susceptibility appear in a pronounced manner. Despite that the divergence of the  $SDW+$  susceptibility is an artifact of the approximation and only signals that the reinforcement of the antiferromagnetic fluctuations in the system. In contrast, at the same regime, all others susceptibilities flow to fixed values and as a result are not being reinforced in the physical system. We conclude this work calling attention to the open problems in this field and to the importance in establishing the FS topology to elucidate the origin of the anisotropic pseudogap in the cuprates superconductors.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Evidências experimentais sobre os cupratos . . . . .	4
1.2	Estado supercondutor e Estado normal . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Modelo Microscópico e Teoria de Perturbação</b>	<b>13</b>
2.1	Modelo de Hubbard . . . . .	14
2.1.1	Caso não interagente . . . . .	16
2.1.2	Caso 1D . . . . .	18
2.1.3	Caso 2D . . . . .	19
2.2	Teoria de Perturbação . . . . .	21
2.2.1	Modelo de Lagrangiano . . . . .	21
2.2.2	Funções de Green . . . . .	25
2.2.3	Equações de Schwinger-Dyson e a Auto-Energia . . . . .	31
2.2.4	Caso 1D . . . . .	32
2.2.5	Caso 2D . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Sistemática do Grupo de Renormalização (GR)</b>	<b>39</b>
3.1	Renormalizabilidade do Modelo . . . . .	40
3.2	Caso 1D . . . . .	41

3.2.1	Cálculos de um “loop” para o caso $d = 1$ . . . . .	41
3.2.2	Cálculos de dois “loops” para o caso $d = 1$ . . . . .	47
3.3	Caso 2D . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Suscetibilidades</b>	<b>58</b>
4.1	Fontes Geradoras das Simetrias . . . . .	59
4.2	Cálculo das funções resposta e das suscetibilidades no caso 1D até dois “loops” .	62
4.3	Cálculo das funções resposta e das suscetibilidades no caso 2D até dois “loops” .	67
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>75</b>
5.1	Discussões sobre o método numérico . . . . .	76
5.2	Resultados para o caso unidimensional . . . . .	78
5.3	Resultados para o caso bidimensional . . . . .	84
5.3.1	Resultados para os acoplamentos e o peso $Z$ da quasipartícula . . . . .	85
5.3.2	Resultados para as funções resposta e as suscetibilidades . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Modelo de Hamiltoniano interagente <math>SU(2)</math> invariante</b>	<b>108</b>
<b>B</b>	<b>Hamiltoniano de interação no espaço dos momentos</b>	<b>110</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo de alguns diagramas</b>	<b>112</b>
C.1	Cálculo em uma dimensão . . . . .	112
C.2	Cálculo em duas dimensões . . . . .	114
<b>D</b>	<b>Relações entre as Funções de Green e as Funções Irredutíveis</b>	<b>117</b>
<b>E</b>	<b>Demonstração da Equação de Schwinger-Dyson para Auto-energia</b>	<b>122</b>

<b>F</b>	<b>Relação entre as Funções Resposta Irredutíveis e suas Respectivas Funções de Green.</b>	<b>126</b>
<b>G</b>	<b>Intervalos de Integração no Caso <math>d=2</math></b>	<b>131</b>
<b>H</b>	<b>Fluxograma do programa principal</b>	<b>134</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde sua descoberta no início do século XX a supercondutividade tem sido um fenômeno desafiador para os cientistas. Somente quase meio século depois de sua descoberta, uma teoria foi bem sucedida em explicar o mecanismo microscópico da supercondutividade convencional. Fortes evidências experimentais revelaram então que os fônons exercem um papel fundamental. Dentre elas, a que mais chama a atenção é o fato da temperatura crítica de transição supercondutora ser inversamente proporcional ao inverso da raiz quadrada da massa nuclear também conhecido como efeito isotópico. Essa dependência é exatamente a mesma dependência da frequência dos fônons com relação à massa nuclear dos átomos da rede cristalina.

Em 1957, J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer (BCS)[1] propuseram um modelo no qual os fônons, a uma certa temperatura, intermediam a atração entre pares de elétrons de condução ao se moverem através da rede cristalina. Esses pares de elétrons se condensam podendo se mover livremente através da rede sem sofrer espalhamento. Entretanto, todos os compostos que apresentam a supercondutividade convencional possuem uma temperatura crítica de transição muito baixa. Dentre todos esses compostos, o de temperatura de transição supercondutora mais alta não ultrapassa 20K.

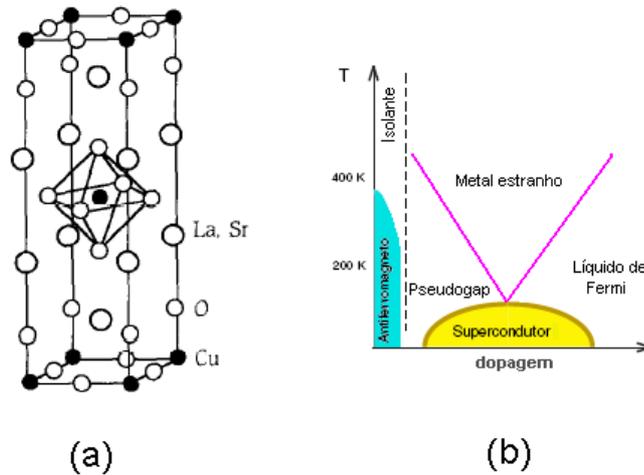


Figura 1.1: (a) Estrutura cristalina para o composto  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$  encontrada na referência [2]. (b) Diagrama de fase que representa a maioria dos cupratos supercondutores do tipo  $p$ .

Em 1986, Bednorz e Müller[3] supreenderam o mundo científico ao publicarem a descoberta de um novo composto supercondutor cuja temperatura crítica de transição é próxima dos 35K. A partir desta data, iniciava-se o estudo de supercondutores de alta temperatura com a descoberta de novos compostos cujas temperaturas críticas de transição chegam hoje a 160K sob pressão. Dentre eles, os mais comuns são os cupratos supercondutores com seus planos de cobre e oxigênio dopados de forma a apresentarem um excesso ou falta de elétrons (buracos). Dessa forma, os cupratos supercondutores podem ser divididos em duas subclasses: supercondutores do tipo  $p$  (buracos)<sup>1</sup> e supercondutores do tipo  $n$  (elétrons). Como um exemplo podemos citar dois cupratos supercondutores muito estudados na literatura:  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$  do tipo  $p$  e  $Nd_{2-x}Ce_xCuO_4$  do tipo  $n$ . A figura 1.1 (a) mostra como é feita a dopagem dos planos de  $Cu - O$  para o  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ . Substituindo-se átomos de  $La^{+3}$  por átomos de  $Sr^{+2}$  estamos retirando elétrons para fora dos planos de  $Cu - O$  e, portanto, dopando o composto de forma que os portadores de carga sejam buracos.

O que há em comum entre os cupratos é que, apesar de serem originalmente isolantes

<sup>1</sup>Devemos entender por buracos como portadores de carga devido à retirada de elétrons dos planos de  $CuO$  reduzindo, dessa forma, a área da zona de Brillouin acessível para os elétrons de condução.

antiferromagnéticos, quando submetidos a um certo percentual de dopagem podem se tornar condutores e, em seguida, abaixo de uma certa temperatura de transição, supercondutores, como mostra a figura 1.1 (b). Como se pode ver, há uma temperatura de transição máxima para a fase supercondutora, em uma certa dopagem característica. Nesse ponto, dizemos que estamos em uma dopagem ótima. A linha que começa a partir deste ponto e vai até a região subdopada e temperaturas acima de 400K separa a região em que se manifesta o “pseudogap”. Na região superdopada, medidas experimentais apontam para uma dependência da resistividade com  $T^2$  na fase de estado normal. Os experimentais identificam esse comportamento como sendo típico de um líquido de Fermi de Landau (LFL)[4] que pode ser descrito como um modelo de um gás de quasipartículas fracamente interagentes. Entretanto, a aplicação de um modelo como esse para a fase “normal” dos cupratos é muito questionável, uma vez que várias das suas propriedades físicas não seguem o comportamento canônico típico de um LFL. Por essa razão, separamos a região subdopada da região superdopada passando por uma região que denominamos de metal estranho em cima da dopagem ótima.

Devido ao surgimento da supercondutividade em função da dopagem nos cupratos supercondutores suspeitou-se, desde cedo, que a instabilidade supercondutora podia surgir de interações eletrônicas puramente repulsivas. Assim, aumentando-se o número de portadores de carga destrói-se o ordenamento de *longo alcance*, mas permanecem fortes flutuações antiferromagnéticas. Conseqüentemente, à medida que estados desocupados se tornam disponíveis, a forte interação coulombiana entre os elétrons de condução acaba promovendo, de uma maneira inesperada, a supercondutividade em alta temperatura.

Obviamente nem tudo são correlações eletrônicas. Há também efeitos provocados pelas oscilações da rede ou os fônons. Mesmo em sistemas de fermions fortemente correlacionados os fônons podem exercer seu papel. Em alguns compostos, a transição para um isolante a baixas

temperaturas pode induzir a formação de ondas de densidade de carga e a aparição da distorção de Peierls[5] nas posições iônicas. Alguns trabalhos descrevendo sistemas em uma dimensão foram bem sucedidos em explicar alguns desses fenômenos considerando acoplamentos do tipo elétron-fônon[6]-[14]. Entretanto, como não acreditamos ser esse o mecanismo dominante nos cupratos supercondutores não será o objetivo desta tese estudar interações do tipo elétron-fônon. Assim, em nosso modelo de Lagrangiano, tanto em uma quanto em duas dimensões, a interação elétron-fônon não se faz presente, pois estamos interessados somente nos efeitos de correlações eletrônicas pura e simplesmente.

## 1.1 Evidências experimentais sobre os cupratos

Devido às suas peculiaridades, vários experimentos têm sido realizados para suprir os teóricos com dados cada vez mais acurados sobre tais sistemas. Dentre eles, um procedimento que tem gerado muitos resultados de forma acurada é o método ARPES (“Angle Resolved Photoemission Spectroscopy”)[15]-[19] que é utilizado, dentre outras coisas, para a detecção da superfície de Fermi (SF) desses materiais. A figura 1.2, por exemplo, mostra o espectro ARPES para o composto  $1 - T - TiTe_2$  que é o composto  $TiTe_2$  disposto em camadas e pode ser encontrado na referência[15]. Note que temos picos de intensidade (em unidades arbitrárias) bem definidos, proporcionais à função de distribuição de Fermi, para várias direções. O pico que está mais próximo da linha de energia 0, determinada por cálculos acurados de teoria de bandas, aparece em  $14.75^0$ . Note que a largura desse pico diminui ao nos aproximarmos da SF. Se não houvesse interação entre os elétrons haveria apenas uma energia acessível para um dado estado de momento  $|\mathbf{k}\rangle$ . A largura na energia para um dado momento é esperada devido ao fato das quasipartículas possuírem um tempo médio de vida finito. Claramente, esse composto apresenta uma SF bem definida. Isso é uma forte evidência de que temos um composto que

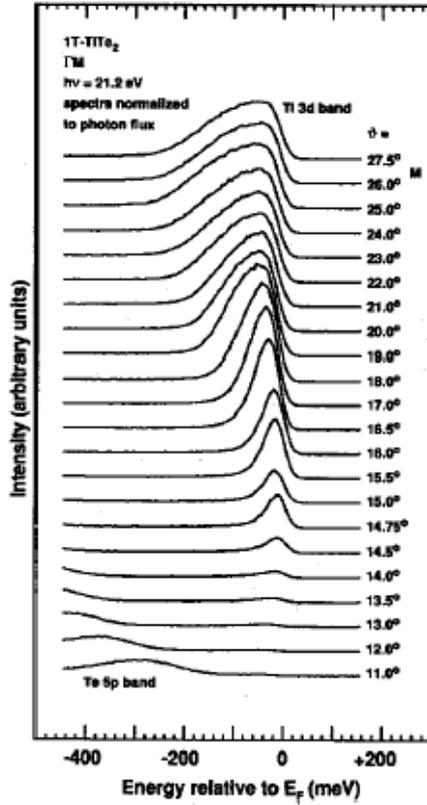


Figura 1.2: Espectro ARPES para o composto  $1 - T - TiTe_2$  encontrado na referência[15]

pode ser explicado em termos do modelo de quasipartículas ou LFL. A evidência mais forte de que esse composto apresenta um comportamento típico de um LFL vem do fato do ajuste dessas curvas ser feito utilizando-se a dependência da parte imaginária da auto-energia típica de um LFL, ou seja,  $Im\Sigma \sim \omega^2$ . Obviamente, tal composto não é semelhante a um cuprato, mas, assim mesmo, é importante o citarmos como exemplo para indicarmos quando a teoria do LFL não é mais válida.

Devido ao fato de ser muito difícil de se obter o espectro ARPES do composto  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$  vamos considerar o composto  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$  que, do ponto de vista experimental, é um material freqüentemente usado para a obtenção de tal espectro. As figuras 1.3 (a)-(c) se referem a esse composto e podem ser encontradas na referência[16]. A figura 1.3 (a) mostra a SF (linha cheia) esperada por cálculos de estrutura de bandas para o caso levemente superdopado.

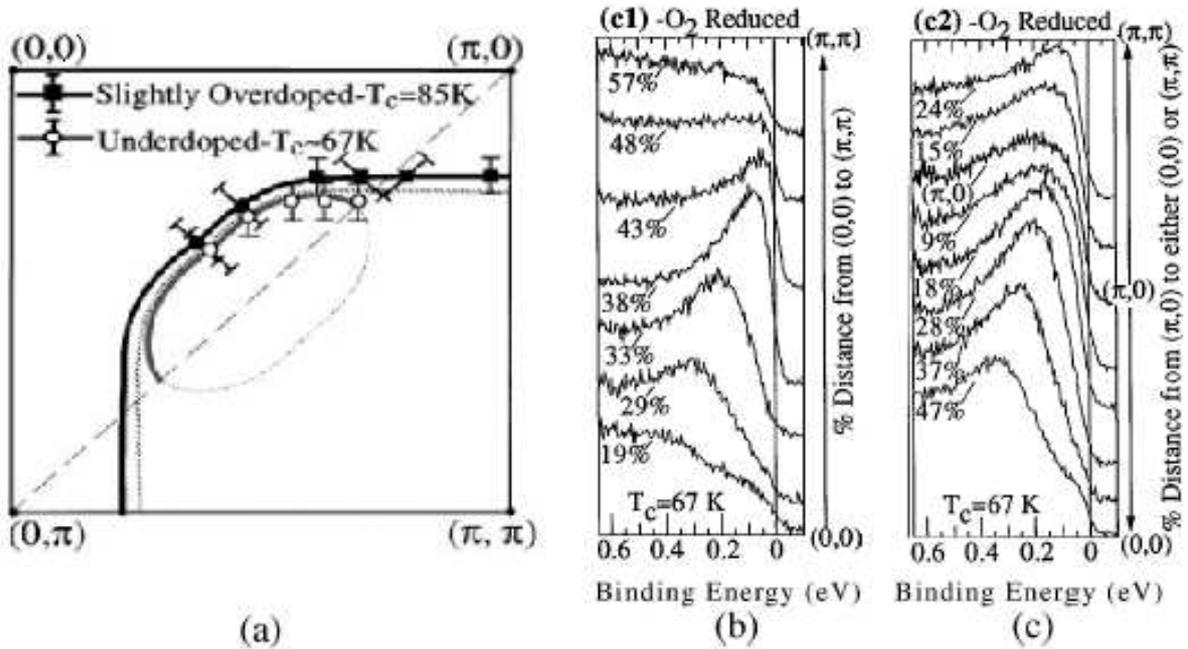


Figura 1.3: (a) Superfície de Fermi obtida a partir de medidas ARPES para o  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ . (b) e (c) Espectro ARPES do  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$  encontrado na referência[16].

Note que a linha de Fermi “toca” as fronteiras da zona de Brillouin na direção  $(\pi, 0) - (\pi, \pi)$  e  $(0, \pi) - (\pi, \pi)$ . Conseqüentemente, ao subdoparmos o sistema esperaríamos apenas que, pelo menos do ponto de vista experimental, a área contornada pela linha de Fermi diminuisse mantendo sua forma original como se pode ver pela linha hachurada. No entanto, não é isso o que acontece e há uma redução da região delimitada pela linha de Fermi, além do fato de haver um completo desaparecimento da linha de Fermi abaixo da linha pontilhada. Claramente, vemos a abertura de um “gap” ao longo de certas direções do espaço de momenta, conseqüentemente, a densidade de estados é nula somente para certas direções na primeira zona de Brillouin. Esse cenário é totalmente diferente de uma transição metal-isolante em que há o completo desaparecimento da densidade de estados em todas as direções do espaço dos momentos. Dessa forma, devemos nos referir a essa anomalia como uma manifestação do surgimento do estado “pseudogap”.

Nas figuras 1.3 (b) e (c) podemos ver claramente a abertura desse “pseudogap”. Em ambas as figuras é mostrada a intensidade do feixe (em unidades arbitrárias) em função da energia de ligação para vários percentuais da distância numa certa direção. A linha mostrada para a energia 0 é a linha que separa os níveis ocupados dos não-ocupados segundo cálculos mais acurados de teoria de um elétron como LDA (“Local Density Approximation”). A energia de ligação, na verdade, mede a diferença relativa ao nível de Fermi. Além disso, a intensidade do feixe é diretamente proporcional à função de distribuição de Fermi  $f(\omega) = (\exp(\omega/T) + 1)^{-1}$  e, por essa razão, temos picos de intensidade devido ao fato de estarmos selecionando camadas de energia mais prováveis para os elétrons de condução, como indicado nas figuras. Na figura 1.3 (b) vemos que, ao passarmos pela linha de energia de ligação nula, passamos de uma região onde existem estados acessíveis para os elétrons de condução na zona de Brillouin (onde se constata picos de intensidade) para uma região na qual não há estados acessíveis (onde não há mais nenhum pico de intensidade), em torno de 45% da direção  $(0, \pi) - (\pi, \pi)$ . Isso significa que, neste caso, estamos em cima da linha de Fermi e a intensidade do feixe é proporcional à localização do pico como podemos ver na figura 1.3 (a). No entanto, na figura 1.3 (c) vemos linhas de intensidade tanto na direção  $(\pi, 0) - (\pi, \pi)$  quanto na direção  $(\pi, 0) - (0, 0)$ . Nesta última direção, vemos que há um distanciamento dos picos de intensidade em relação à linha de energia zero significando um aumento na diferença de energia com relação ao nível de Fermi. Isso já era de se esperar, uma vez que estamos caminhando no sentido do centro da zona de Brillouin. Entretanto, um fato, no mínimo estranho, acontece quando caminhamos ao longo da direção  $(\pi, 0) - (\pi, \pi)$ .

O tipo de comportamento que deveríamos esperar seria um comportamento como o da figura 1.3 (b), pois estaríamos caminhando em direção à linha de Fermi. No entanto, acontece exatamente o contrário havendo uma tendência de afastamento do nível de Fermi. Os expe-

rimentais interpretam isso como o aparecimento de um “gap” de energia, como já havíamos mencionado anteriormente, uma vez que estamos indo na direção da linha que separa os estados ocupados dos não-ocupados. É como se a linha de Fermi tivesse desaparecido completamente ao longo dessa direção. Além disso, quando os experimentais medem outras propriedades físicas associadas a essa região, como calor específico por exemplo, há um comportamento totalmente diferente daquele que se esperaria se estivéssemos em uma região em que vale a teoria do LFL. Isso é uma má notícia para o modelo de quasipartículas. Assim, fica evidente que a maioria das anomalias do estado normal dos cupratos está associada à formação do estado de “pseudogap”.

## 1.2 Estado supercondutor e Estado normal

Na seção anterior, vimos algumas evidências experimentais peculiares dos cupratos supercondutores. Vimos que, ao contrário do modelo BCS que requer como estado normal um bom LFL, surge um regime no qual a aplicação da teoria do LFL é, no mínimo, questionável. Entretanto, muito já se sabe a respeito do estado normal e supercondutor nos cupratos<sup>2</sup>.

Devemos salientar, primeiramente, que é amplamente aceito o fato de que, apesar da natureza desconhecida da supercondutividade, há pares de Cooper. Sabe-se que os buracos devem se emparelhar e esses pares, por sua vez, devem se condensar para que surja a supercondutividade, embora o mecanismo microscópico da supercondutividade de alta temperatura não seja induzido pelo emparelhamento elétron-fônon. A supercondutividade convencional está associada a um metal simples e a uma simetria do tipo  $s$  para o parâmetro de ordem supercondutor. Em contraste, devido ao caráter fortemente interagente dos elétrons nos planos de  $Cu - O$ , o parâmetro de ordem que leva à supercondutividade tem uma simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$  e, por isso, é de se esperar a existência de um novo mecanismo microscópico que torna os fônons meros coadjuvantes[21].

---

<sup>2</sup>Obviamente nem tudo é consensual.

No estado normal, como vimos anteriormente, existe uma SF truncada a uma certa dopagem e temperatura. Nesse sentido esses sistemas exibem um comportamento metálico anômalo. Entretanto, em dopagens ainda mais baixas pode-se induzir a aproximação de uma transição metal-isolante de Mott[20], que leve de volta à fase antiferromagnética. Em dopagem zero, como vimos na figura 1.1 (b), há um ordenamento de “spins” localizados nos átomos de *Cu* de *longo alcance* num arranjo antiferromagnético que é bem descrito pelo modelo de Heisenberg. Assim, fica claro que esses sistemas são fortemente correlacionados e as flutuações quânticas são de fundamental importância para o mecanismo da supercondutividade. Este cenário tem motivado a construção de modelos que levam especialmente em consideração as flutuações de “spins” [21]-[26].

Um outro fato, para o qual devemos chamar a atenção, é uma forte anisotropia de todas as propriedades físicas no estado supercondutor. Os portadores de carga (na maioria dos casos “buracos”) podem se mover mais ou menos livremente ao longo dos planos de *Cu – O*. Entretanto, o movimento na direção ortogonal a esses planos é fortemente suprimido. Isso dá a supercondutividade nos cupratos um caráter claramente bidimensional.

Diante de todas as evidências experimentais e discussões teóricas, Anderson[27] sugeriu que o modelo de Hubbard[28], que considera somente interações de *curto alcance*, descreve qualitativamente bem as propriedades eletrônicas dos cupratos supercondutores. Em uma dimensão este modelo reproduz o líquido de Luttinger[29] para  $U > 0$ , os efeitos de separação de carga e “spin”, bem como um regime de isolante de Mott. Alguns métodos exatos para a resolução de tal modelo em uma dimensão, como a Bosonização[30] e o Bethe *ansatz*[31], têm sido empregados com sucesso. Entretanto, em dimensões mais elevadas esses métodos são de difícil aplicação. Um método que tem sido bem sucedido tanto em uma dimensão quanto em dimensões mais elevadas é provida pela técnica do grupo de renormalização no limite do infra-

vermelho. O grande mérito desta técnica é fornecer um significado de escala para o problema original. Assim, podemos tomar como ponto de partida um modelo microscópico descrito por um Lagrangiano com propriedades físicas específicas reguladas por uma escala característica. Dessa forma, à medida que as equações do grupo de renormalização evoluem os parâmetros são renormalizados em função da variação da escala de renormalização.

Em duas dimensões, o problema se torna ainda mais complicado quando temos que considerar os graus de liberdade próximos à SF, pois, diferentemente do caso unidimensional, os processos físicos não acontecerão mais apenas entre dois pontos e, sim, entre duas seções contínuas. Diferentes técnicas têm sido empregadas[32]-[43] para descrever fermions interagindo fortemente na presença de uma SF. Além disso, a SF adiciona um novo desafio: a dependência dos acoplamentos com os momentos. Antes de considerarmos tal fato, usamos uma aproximação quase-unidimensional, que considera os acoplamentos independentes dos momentos ao longo da SF, para chamarmos a atenção para o fato de que, dentre outras coisas, o cálculo do peso da quasipartícula até dois “loops” é essencial para o estudo de tais sistemas, pois seu anulamento tem sérias implicações físicas[44, 45]. Em seguida, para nos aproximarmos ainda mais de uma situação realística, usamos um modelo cuja SF é perfeitamente chata levando em consideração a dependência dos acoplamentos com os momentos ao longo da SF[46]. Nesse trabalho, mostramos que o peso  $Z$  da quasipartícula tende a zero quando os acoplamentos fluem para um regime de acoplamento repulsivo intermediário. Isso está de pleno acordo com nossas observações anteriores relativas aos supercondutores de onda  $d$  que, pelo menos em baixas dopagens, demonstra nada ter a ver com o LFL.

O principal objetivo desta tese é calcular as instabilidades inerentes ao nosso modelo bidimensional e discutir suas implicações físicas. Para tanto, no capítulo 2 descrevemos nosso modelo microscópico bem como a geração dos diagramas de Feynman através da teoria de per-

turbação que geram contribuições logaritmicamente divergentes em nosso caso. Para mantermos contato com os conhecidos trabalhos de aplicação do grupo de renormalização em uma dimensão, nós aplicamos nosso método tanto para uma quanto para duas dimensões. No capítulo 3, discutimos sobre a sistemática do grupo de renormalização regularizando a teoria através da adição de contratermos apropriados. Inicialmente, fazemos uma breve análise sobre a renormalizabilidade do modelo. Em seguida, aplicamos o método para os casos em uma e duas dimensões derivando as equações do grupo de renormalização para os acoplamentos e para o peso  $Z$  da quasipartícula.

No capítulo 4, definimos os parâmetros de ordem e suas respectivas suscetibilidades, que são importantes para a análise de diversas instabilidades do sistema físico. Para isso, introduzimos dois campos fictícios infinitesimais ao nosso modelo de Lagrangiano que se acoplam a fontes geradoras de pares partícula-partícula e partícula-buraco apropriadas. Tanto em uma quanto em duas dimensões, usamos as projeções de “spin” para definir novas simetrias e derivar as respectivas funções resposta como a de onda de densidade de carga ( $ODC$ ), a de onda de densidade de “spin” ( $ODS$ ), a de supercondutividade do tipo singlete ( $SCS$ ) e, finalmente, a supercondutividade do tipo tripleto ( $SCT$ ). Entretanto, em duas dimensões temos uma simetria intrínseca de nosso modelo de Lagrangiano devido à sua derivação de uma rede quadrada com uma SF perfeitamente chata. Ao explorarmos tal simetria, definimos novas funções resposta como as de onda de densidade de carga dos tipos s e d ( $ODC\pm$ ), as de onda de densidade de “spin” dos tipos s e d ( $ODS\pm$ ), as de supercondutividade singlete dos tipos s e d ( $SCS\pm$ ) e, finalmente, as de supercondutividade tripleto dos tipos s e d ( $SCT\pm$ ). Em seguida, derivamos as equações do grupo de renormalização para as funções resposta (ou parâmetros de ordem) tanto em uma quanto em duas dimensões e para suas respectivas suscetibilidades, explorando o significado físico dos resultados obtidos.

No capítulo 5, usamos métodos numéricos para resolver as equações do grupo de renormalização. Nós mostramos que, em uma dimensão, reproduzimos corretamente os resultados analíticos de Solyom[47]. Para facilitar o entendimento desses resultados, construímos o diagrama de fase que mostra as suscetibilidades mais pronunciadas. Em duas dimensões, derivamos equações integro-diferenciais acopladas impossíveis de serem resolvidas analiticamente. Conseqüentemente, o fluxo de uma só equação interfere diretamente no fluxo do grupo de renormalização das demais. Como resultado, quando os acoplamentos, no regime repulsivo, fluem para o regime de forte acoplamento, o peso  $Z$  da quasipartícula tende a se anular. Isso leva a sérias implicações nas equações para as suscetibilidades que, por sua vez, fluem todas para valores fixos. Somente uma única suscetibilidade continua divergindo. No caso do regime de Hubbard repulsivo, a do tipo  $ODS+$  é a suscetibilidade divergente. Isso ocorre devido ao fato do perfeito “nesting”(seções chatas antípodas da SF) reforçar todos os processos envolvendo pares de partículas do tipo partícula-buraco. Entretanto, mostramos que ao passarmos de um “loop” para dois “loops” essa divergência ocorre para valores cada vez menores da escala de energia  $\omega$  significando que essa divergência é sensível a ordem de perturbação. Em função disso, podemos afirmar que esse não é o comportamento típico de um arranjo de *longo alcance*. Isso foi confirmado pelo nosso cálculo das suscetibilidades uniformes[48]. Esse comportamento se confirmou em praticamente todas as regiões. Para demonstrarmos isso, atribuímos diversos outros valores iniciais para os acoplamentos e construímos um diagrama de fase com as suscetibilidades mais pronunciadas em função dos acoplamentos renormalizados e discutimos as principais implicações físicas de nossos resultados.

## Capítulo 2

# Modelo Microscópico e Teoria de Perturbação

Neste capítulo, estudaremos o modelo microscópico de Hubbard, que descreve qualitativamente bem os elétrons fortemente correlacionados. Como esse modelo leva em conta as interações de curto alcance, a energia cinética dos elétrons da banda de condução ou de valência, efeitos tais como a transição de Mott podem ser estudados. Apresentamos, então, a superfície de Fermi (SF) adotada em nosso modelo comparando-a com a SF no modelo de Hubbard repulsivo apontando as principais diferenças entre elas. Em seguida, aplicaremos a teoria de perturbação para calcularmos algumas grandezas físicas importantes, tais como a auto-energia e as funções vértices. Para tornar as principais peculiaridades de tal modelo mais evidentes, de uma forma mais simples e direta, faremos todos os cálculos em uma dimensão (1D) e, em seguida, generalizaremos nossos resultados para duas dimensões (2D), que é justamente o objetivo principal de todo o nosso trabalho.

## 2.1 Modelo de Hubbard

Como Anderson sugeriu, o modelo mais apropriado para descrever, pelo menos qualitativamente, as fortes correlações eletrônicas no caso dos supercondutores de alta temperatura é o modelo de Hubbard[28]. Considere, então, inicialmente o Hamiltoniano:

$$H = - \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \sigma=\uparrow,\downarrow}} a_{i\sigma}^\dagger t_{ij} a_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (2.1)$$

onde  $\langle i, j \rangle$  representam vizinhos mais próximos e  $n_{i\sigma} = a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma}$  com  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . O termo  $t_{ij} = t_{ji}^*$  é chamado de termo de “hopping” (salto), e está diretamente associado à probabilidade de um elétron saltar de um sítio  $i$  para um outro sítio  $j$ .  $U$  é a interação repulsiva elétron-elétron em um mesmo sítio. Vale salientar que tal Hamiltoniano é obtido fazendo-se algumas aproximações, das quais podemos destacar o efeito de blindagem. Dessa forma, ao tomarmos o Hamiltoniano de Hubbard como ponto de partida para explicitarmos nosso modelo, estamos considerando apenas efeitos de interações de curto alcance. O Hamiltoniano de Hubbard é obtido fazendo-se com que o termo de “hopping” seja uniforme, ou seja,  $t_{ij} = t(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = t$ :

$$H = -t \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \sigma=\uparrow,\downarrow}} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (2.2)$$

Se definirmos o seguinte operador projeção de “spin” total em cada sítio  $i$ :

$$\mathbf{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma\sigma'} a_{i\sigma}^\dagger \bar{\tau}_{\sigma\sigma'} a_{i\sigma'} \quad (2.3)$$

onde  $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  é um vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

e com o auxílio das relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{a_{i\sigma}, a_{j\sigma'}^\dagger\} &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{ij}, \\ \{a_{i\sigma}, a_{j\sigma'}\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

é possível reescrever o Hamiltoniano de Hubbard (2.2) como se segue:

$$H = -t \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \sigma=\uparrow,\downarrow}} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} - \frac{2}{3}U \sum_i (\mathbf{S}_i)^2 + \frac{UNe}{2} \quad (2.6)$$

onde o último termo gera apenas um “shift” na energia e, portanto, esse Hamiltoniano se reduz à forma:

$$H = -t \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \sigma=\uparrow,\downarrow}} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} - \frac{2}{3}U \sum_i (\mathbf{S}_i)^2 \quad (2.7)$$

Fica evidente, portanto, que tal Hamiltoniano é invariante ao grupo de simetria  $SU(2)$ , pois nenhuma rotação no eixo de quantização de “spin” causará qualquer mudança no Hamiltoniano de Hubbard. Isso acontece porque o operador  $\mathbf{S}_i$  é definido no espaço dos “spins” cujos vetores constituintes são essencialmente as matrizes de Pauli. Uma outra simetria explícita do modelo é a do tipo  $U(1)$ , em que o Hamiltoniano é invariante sob transformações de fase locais. Isso implica que há conservação de carga. Devemos notar também que, se  $U > 0$ , a energia total somente poderá ser minimizada se o “spin” total em cada sítio for o maior possível. Em outras palavras, para este caso esperaríamos algum tipo de estado fundamental magnético, pelo menos se cada sítio fosse ocupado, em média, por um elétron (caso de banda semicheia). Tal sistema requereria um eixo de quantização global, o que acarretaria numa quebra espontânea de simetria global  $SU(2)$ , como veremos a seguir.

No caso de banda semicheia, em que temos em média um elétron por sítio, esperamos que isso aconteça quando  $U \rightarrow \infty$ . Nesse caso limite podemos ter apenas estados do tipo  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$  e a proibição de estados duplamente ocupados no mesmo sítio, pois o custo energético seria infinitamente grande. Neste caso limite, quando relaxarmos um pouco esta condição, podemos considerar, então, o Hamiltoniano não-interagente como uma perturbação, para chegarmos à seguinte expressão:

$$H^{Heisenberg} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (2.8)$$

que é o Hamiltoniano de Heisenberg onde  $J = 2t^2/|U|$ . Note que esse Hamiltoniano vale

para qualquer dimensão<sup>1</sup>. Este limite, descreve elétrons da rede perfeitamente localizados em um arranjo antiferromagnético característico de um isolante de Mott. Conseqüentemente, a rede principal torna-se uma rede bipartida: uma com “spins” para cima e outra com “spins” para baixo. Dessa forma, podemos afirmar que houve uma quebra espontânea de simetria global  $SU(2)$ , como havíamos dito antes. Quando esse cenário acontece dizemos que o estado fundamental será um isolante de Mott antiferromagnético.

Um outro limite que devemos considerar no caso de banda semicheia é o limite em que  $U \gg t$ . Nele, sítios vazios também são permitidos e, portanto, teremos três estados possíveis em cada sítio:  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  ou  $|0\rangle$ . Os sítios duplamente ocupados custam muita energia devido ao alto valor de  $U$ , sendo, assim, excluídos dos conjuntos de estados permitidos do sistema físico. Agora, o termo de energia cinética contribui para a energia e os buracos desprovidos de “spin” poderão mover-se na rede ocasionando “flips” de “spins” em sítios ocupados. Essas flutuações de “spin” são aumentadas à medida que o número de buracos aumenta (o que pode ser feito dopando-se o material com buracos) e podemos esperar que uma densidade finita de buracos destrua o ordenamento de longo alcance (ou ordenamento antiferromagnético)[49, 50].

### 2.1.1 Caso não interagente

No caso em que a interação  $U \ll t$ , os elétrons são livres para se movimentar através da rede com uma energia de “hopping” (ou salto) igual a  $t$ . Conseqüentemente, o Hamiltoniano de Hubbard (2.2) se reduz a:

$$H_0 = -t \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \sigma=1,\downarrow}} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} \quad (2.9)$$

Para definirmos a superfície de Fermi, podemos adotar uma sistemática  $d$ -dimensional (com  $d = 1, 2$ ). Além disso, estamos fazendo o parâmetro de rede e a constante de Planck iguais a um apenas para simplificarmos os cálculos. Assim, no limite termodinâmico em que o

---

<sup>1</sup>Quando mencionarmos a palavra “dimensão” estaremos nos referindo exclusivamente às dimensões espaciais.

número de sítios  $N$  tende a infinito ( $N \rightarrow \infty$ ) podemos escrever as seguintes relações no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \\ \int dV e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} &= (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ a_{i\sigma} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}\sigma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por outro lado, se fizermos  $t_{ij} = t(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = t_1$  e tomarmos a respectiva transformada de Fourier teremos:

$$t(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}} t_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} \quad (2.11)$$

Se considerarmos o caso especial em que:

$$t_{ij} = t_1 = \begin{cases} t & \text{se próximos vizinhos} \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (2.12)$$

poderemos escrever:

$$t(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}} t_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} = \sum_{j=1}^d t (e^{-ik_j} + e^{ik_j}) = 2t \sum_{j=1}^d \cos k_j \quad (2.13)$$

Dessa forma, levando (2.13) no Hamiltoniano livre (2.9) e usando as relações (2.10) poderemos escrever:

$$H_0 = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} \quad (2.14)$$

com

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = -t(\mathbf{k}) = -2t \sum_{j=1}^d \cos k_j \quad (2.15)$$

Dessa forma, o estado fundamental é encontrado preenchendo o “mar” de Fermi. Assim, se tivermos  $N$  elétrons, o número total de estados de momento com energia menor que  $\epsilon$  é determinado pelas curvas de energia constante  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon$ .

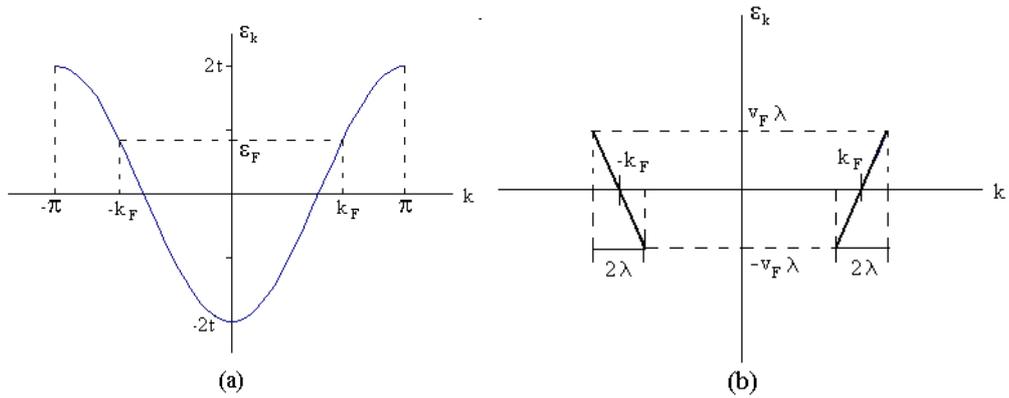


Figura 2.1: (a) Gráfico da energia versus momento  $k$  e (b) Pontos de Fermi no caso em que  $d=1$ .

## 2.1.2 Caso 1D

Para ilustrarmos essa relação, confeccionamos o gráfico da energia em função do momento  $k$  em uma dimensão com a relação de dispersão da energia dada segundo a equação (2.15):

$$\epsilon_k = -2t \cos k \quad (2.16)$$

como mostra a figura 2.1 (a). Note que a largura da banda é de  $4t$  e o nível de Fermi que separa os estados ocupados dos não-ocupados também é mostrado na figura. Assim, em caso de banda semicheia,  $k_F = \pi/2$  e  $\epsilon_F = 0$ . Entretanto, estamos interessados nas principais excitações elementares próximas ao nível de Fermi, pois assim poderemos aplicar a teoria de perturbação na qual o estado não perturbado seria o “mar” de Fermi. O uso de uma relação de dispersão como a da equação (2.16) nos traria dificuldades para calcularmos analiticamente os efeitos da teoria de perturbação. Mas como os efeitos que mais nos interessam estão associados à vizinhança dos níveis de Fermi, podemos linearizar a relação de dispersão expandindo  $\epsilon_k$  em torno da SF. No caso em que  $d = 1$ , a SF se reduz aos pontos  $\pm k_F$ . Logo,

$$\epsilon_k = v_F(|k| - k_F) + \epsilon_F = \begin{cases} \epsilon_k^{(+)} = v_F(k - k_F) + \epsilon_F \\ \epsilon_k^{(-)} = -v_F(k + k_F) + \epsilon_F \end{cases} \quad (2.17)$$

onde  $\pm$  significa ponto de Fermi à direita e ponto de Fermi à esquerda, respectivamente. Ao

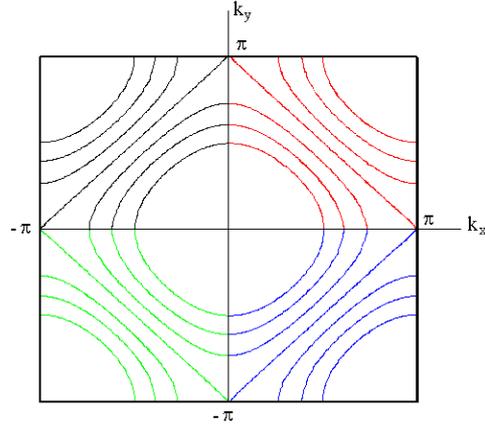


Figura 2.2: Curvas de energia constante geradas a partir de cálculos usando a técnica de Monte Carlo para vários valores do potencial químico  $\mu(T = 0) = \epsilon_F$  para  $d=2$ .

linearizarmos a relação de dispersão da energia dessa maneira, obtemos o gráfico da figura 2.1 (b). Para evitarmos singularidades sem significado físico, introduzimos uma região de corte na energia e no momento ou um “cutoff”  $\lambda$ , como mostra a figura mencionada acima.

### 2.1.3 Caso 2D

No caso em que  $d=2$ , teremos a seguinte relação de dispersão da energia:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = -2t(\cos k_x + \cos k_y) \quad (2.18)$$

que define uma superfície. Se fizermos um corte nessa superfície, tal que, para um dado  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_F$ , separemos os estados ocupados dos não-ocupados, definiremos o nível de Fermi. Ao variarmos o nível de Fermi (ou o potencial químico  $\mu(T = 0)$ ) de acordo com a dopagem, estaremos selecionando diferentes curvas de nível, como mostra a figura 2.2. Para montar tal gráfico a partir da equação (2.18) de uma forma prática, devemos construir uma rotina em Fortran empregando a técnica de Monte Carlo. A curva de nível que é perfeitamente quadrada é selecionada quando fazemos  $\epsilon_F = 0$  que, semelhantemente ao caso unidimensional, define o limite de banda semicheia.

Nesse caso, em particular, ao nos aproximarmos de qualquer um dos vértices desse qua-

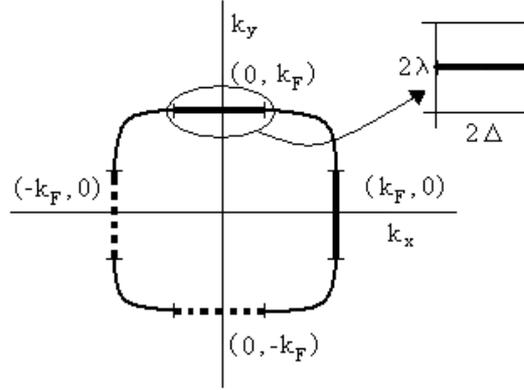


Figura 2.3: Superfície de Fermi perfeitamente chata com cantos arredondados adotada em nosso modelo.

drado, surgem singularidades na densidade de estados conhecidas como singularidades de van Hove. Além disso, uma simetria adicional surge, fazendo com que a energia numa dada seção possa ser mapeada a partir da seção antípoda (simetria partícula-buraco), ou seja:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = -\epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$  é o vetor de “nesting” da superfície de Fermi. O perfeito “nesting” da SF tem importantes conseqüências no cálculo das suscetibilidades. Estas serão estudadas em um capítulo à parte, pois a partir delas podemos tomar como referência o caso de banda semicheia com quebra espontânea de simetria global  $SU(2)$ , implicando um ordenamento de longo alcance.

Em nosso trabalho, usaremos uma SF perfeitamente chata com cantos arredondados para evitarmos as singularidades de van Hove, como a SF mostrada na figura 2.3, pois estamos interessados em investigar se o fato de haver perfeito “nesting” da SF implica diretamente um ordenamento de *longo alcance*.

Ao considerarmos uma superfície de Fermi como a da figura 2.3, estamos fazendo com que alguns processos físicos sejam mais relevantes do que outros, do ponto de vista do grupo de renormalização. Dessa forma, na próxima seção, explicitaremos quais os processos físicos

de maior relevância para o nosso caso bidimensional justificando qualquer aproximação que venhamos a fazer. Além disso, vamos linearizar a energia como fizemos em uma dimensão:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = v_F(|k_{\perp}| - k_F) + \epsilon_F = \begin{cases} \epsilon_{\mathbf{k}}^{(+)} = v_F(k_{\perp} - k_F) + \epsilon_F \\ \epsilon_{\mathbf{k}}^{(-)} = -v_F(k_{\perp} + k_F) + \epsilon_F \end{cases} \quad (2.20)$$

Agora, o vetor de “nesting”  $\mathbf{Q}$  será  $\mathbf{Q} = (0, 2k_F)$  e o vetor  $\mathbf{k} = (k_{\parallel}, k_{\perp})$ , onde  $k_{\parallel}$  representa a componente ao longo da SF e  $k_{\perp}$ , a componente perpendicular à SF. Novamente temos a notação  $\pm$ , de mesmo significado que no caso unidimensional, mas com elétrons à direita (acima) e elétrons à esquerda (abaixo). Introduzimos uma região de corte na energia e no momento  $\lambda$  e  $\Delta$ , respectivamente, para evitarmos singularidades sem significado físico. Desta maneira, estamos restringindo o espaço dos momentos em regiões próximas aos níveis de Fermi, como desejado.

## 2.2 Teoria de Perturbação

### 2.2.1 Modelo de Lagrangiano

Em nossos cálculos perturbativos vamos adotar o modelo de Lagrangiano, a fim de que a regularização por contratermos seja realizada de forma mais natural. Assim, vamos primeiramente definir nosso modelo de Lagrangiano a partir do modelo Hamiltoniano, motivado pelos argumentos que se seguem, bem como todas as funções de Green em  $d$ -dimensões e, então, particularizaremos nossa análise para os casos em que  $d = 1$  e  $d = 2$ .

Na seção 2.1.1, vimos o que acontece com a parte do Hamiltoniano de Hubbard não interagente ao passarmos para o espaço dos momentos considerando o limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ). Em nosso modelo, a parte cinética será idêntica à parte cinética do modelo de Hubbard. Entretanto, para motivarmos os processos de espalhamento importantes em nosso modelo, necessitamos que a parte de interação seja mais geral do que a considerada no modelo

de Hubbard para uma rede quadrada de dimensões  $L \times L$ . Para isso, considere o seguinte Hamiltoniano interagente:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\substack{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4}} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) a_{\mathbf{r}_4\sigma}^\dagger a_{\mathbf{r}_3\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{r}_2\sigma'} a_{\mathbf{r}_1\sigma} \quad (2.21)$$

No Apêndice A, mostramos que esse Hamiltoniano de interação também é  $SU(2)$  invariante. Além disso, no Apêndice B, mostramos como nosso Hamiltoniano de interação pode ser reescrito no espaço dos momentos e no limite termodinâmico. Ao fazermos isso, surgem os acoplamentos dependentes dos momentos, e o Hamiltoniano de interação pode, então, ser reescrito como:

$$H(t) = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \epsilon_{\mathbf{p}} a_{\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t) a_{\sigma}(\mathbf{p}, t) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) a_{\sigma}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, t) a_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{k}, t) a_{\sigma'}(\mathbf{q}, t) a_{\sigma}(\mathbf{p}, t) \quad (2.22)$$

Note que o acoplamento no espaço dos momentos  $g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  define vários tipos de processos em sua forma mais geral. Além disso, estamos interessados em um modelo que descreva partículas em seções antípodas dos níveis de Fermi e, para tanto, devemos redefinir os operadores de criação e destruição de partículas de forma que:

$$a_{\sigma}^\dagger \rightarrow \psi_{(+)\sigma}^\dagger + \psi_{(-)\sigma}^\dagger \\ a_{\sigma} \rightarrow \psi_{(+)\sigma} + \psi_{(-)\sigma} \quad (2.23)$$

onde  $\pm$  significa partícula à direita (ou acima) e partícula à esquerda (ou abaixo), respectivamente, indicando seções antípodas dos níveis de Fermi, seja  $d = 1$ , seja  $d = 2$ . Além disso, podemos chegar ao modelo de Lagrangiano fazendo a seguinte transformada de Legendre:

$$L(t) = -H(t) + \sum_{\sigma, a=\pm} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t) \partial_t \psi_{(a)\sigma}(\mathbf{p}, t) \quad (2.24)$$

Podemos ver que o acoplamento  $g$  no espaço dos momentos está na sua forma mais geral. Vamos, então, usar a “g-ologia” para definirmos quais os processos importantes do ponto de vista do GR. São eles:  $g_1$  do tipo “backscattering”, em que a transferência de momento é da ordem de  $2k_F$ ,  $g_2$  e  $g_4$  do tipo “forward” cuja transferência de momento é pequena e  $g_3$  do tipo “Umklapp” que é importante apenas no caso de banda semi-cheia, onde a diferença entre os momentos finais e iniciais das partículas é igual a  $4k_F$  que, por sua vez, é idêntico ao vetor da rede recíproca. Esses processos são caracterizados pela devida escolha dos momentos e conservação de “spin”, como veremos a seguir. Dada a nossa forma particular da SF<sup>2</sup> em  $d = 2$  e até mesmo em  $d = 1$ , utilizando a redefinição dos campos (2.23) e a transformada de Legendre (2.24), podemos chegar ao modelo de Lagrangiano utilizado em todos os nossos cálculos:

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{\sigma, a=\pm} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t) [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{p}}] \psi_{(a)\sigma}(\mathbf{p}, t) - \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \\
& - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(\mathbf{k}, t) \psi_{(-)\beta}(\mathbf{q}, t) \psi_{(+)\alpha}(\mathbf{p}, t) = L[\psi_{(a)}^\dagger, \psi_{(a)}; g_1, g_2]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Apesar de termos escrito os  $g$ 's dentro das integrais sugerindo, assim, uma dependência com os momentos, devemos analisar caso a caso. Isso porque, em uma dimensão, não teremos dependência dos  $g$ 's com os momentos e, dessa forma, quando formos analisar cada caso mais adiante levaremos tal fato em consideração. Os processos de interação partícula-partícula que vamos considerar, como já mencionamos anteriormente, são do tipo “backward” representado por  $g_1$  e “forward” representado por  $g_2$ , conforme a figura 2.4. As linhas pontilhadas significam

---

<sup>2</sup>Os acoplamentos mais importantes considerados aqui são  $g_1$  e  $g_2$ , pois, mesmo no caso unidimensional, queremos evitar o caso de banda semi-cheia e, dessa forma, podemos desprezar o processo de “Umklapp”. O processo do tipo  $g_4$  é importante para o caso de separação de “spin-carga”, mas a finalidade de nosso trabalho é comparar os métodos do GR e confirmar as instabilidades físicas importantes. Portanto, vamos desprezar este último processo por motivos de simplificação.

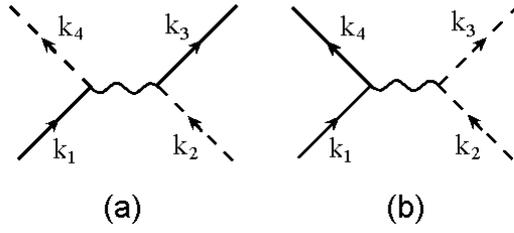


Figura 2.4: Acoplamentos que representam processos de interação partícula-partícula: (a) interação do tipo “backward”  $g_1$  e (b) interação do tipo “forward”  $g_2$ .

regiões antípodas às regiões representadas pelas linhas cheias. Além disso, a conexão com o modelo de Hubbard será feita apenas quando tomarmos como valores iniciais para as equações do GR  $\bar{g}_1 = \bar{g}_2 = U$ , onde  $\bar{g}_1 = g_1/\pi v_F$  e  $\bar{g}_2 = g_2/\pi v_F$ .

Ao escrevermos o Lagrangiano como na equação (2.25), devemos ressaltar algumas simetrias que os  $g$ 's devem obedecer no caso em que  $d > 1$  para que o Lagrangiano permaneça invariante sob certas transformações, ou seja:

$$\begin{aligned}
 g_i(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= g_i(-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) \\
 g_i(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= g_i(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) \\
 g_i(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= g_i(\mathbf{k}_4, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

com  $i = 1, 2$ . A primeira simetria refere-se à inversão temporal que inverte o sinal dos momentos e, juntamente com a simetria de invariância de reflexão espacial, garante que os  $g$ 's em questão sejam reais. A segunda simetria é a simetria de permutação. Por último, temos a simetria com relação à hermiticidade do modelo de Lagrangiano. Discorreremos mais sobre o modelo de Lagrangiano nas seções seguintes, em que estudaremos os casos em que  $d = 1, 2$ .

## 2.2.2 Funções de Green

### Propagador de uma partícula livre

Antes de efetuarmos qualquer cálculo em teoria de perturbação, introduziremos, primeiramente, os propagadores de uma partícula (ou funções de Green de uma partícula), pois, ao realizarmos a teoria de perturbação, estaremos considerando o estado não perturbado como o gás de Fermi.

A função de Green de uma partícula livre deve satisfazer a seguinte equação de Schrödinger:

$$[i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}}] G^{(0)}(\mathbf{k}, t - t') = \delta(t - t') \quad (2.27)$$

onde  $\epsilon_{\mathbf{k}} = k^2/2m$  é a energia de uma partícula livre. É conveniente definirmos a função de Green de uma partícula em relação aos operadores de criação e destruição de partículas dependentes do tempo e em relação aos níveis de Fermi. Assim, o propagador livre de uma partícula é definido como:

$$G_{(a)\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{p}, t) = -i \langle 0 | T \psi_{(a)\sigma}(\mathbf{p}, t) \psi_{(a)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}, 0) | 0 \rangle \quad (2.28)$$

onde  $T$  é o operador de ordenamento temporal e  $a = \pm$  significa seções antípodas dos níveis de Fermi como definimos anteriormente. Lembrando que  $H = H_0$  (no caso não interagente), é fácil ver que:

$$G_{(a)\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{p}, t) = -i \left[ \theta(t) \theta(\epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} - \epsilon_F) e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} t} - \theta(-t) \theta(\epsilon_F - \epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)}) e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} t} \right] \quad (2.29)$$

onde  $\theta$  é a conhecida função degrau. Conseqüentemente, se tomarmos a transformada de Fourier com relação a  $t$ , chegamos a:

$$G_{(a)\sigma}^{(0)}(\mathbf{p}, p_0) = \frac{\theta(\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}}^{(a)})}{p_0 - \epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} + i\delta} + \frac{\theta(-\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}}^{(a)})}{p_0 - \epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} - i\delta} \quad (2.30)$$

onde  $\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}}^{(a)} = \epsilon_{\mathbf{p}}^{(a)} - \epsilon_F$  e suprimimos um dos índices de “spin”, já que, se não há nada que quebre simetria, deve sempre haver conservação do “spin”.

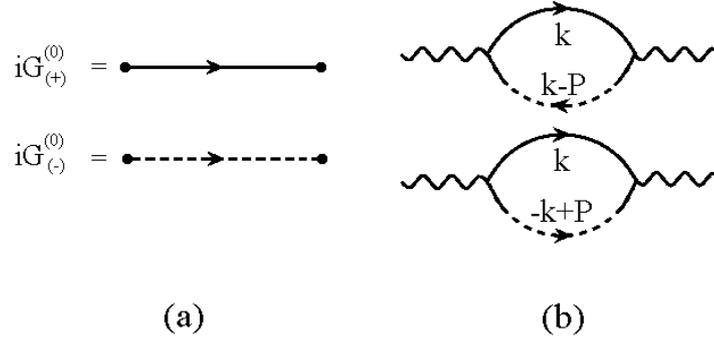


Figura 2.5: a) Propagadores livres de uma partícula. b) “bolhas” do tipo partícula-buraco e partícula-partícula.

A figura 2.5 (a) mostra a representação esquemática do propagador de uma partícula livre. Agora, podemos resumir as principais regras de Feynman[51] geradas pelo nosso modelo de Lagrangiano no espaço dos momentos:

1. Cada linha cheia ou pontilhada contribui com  $iG_{\pm}^{(0)}(\mathbf{p}, p_0)$  para as integrais;
2. Cada linha de interação como as da figura 2.4 contribui com  $-ig_i$  ( $i = 1, 2$ );
3. Para cada diagrama, a distribuição de momentos deve sempre ser conservada;
4. Cada “loop” interno cujo “spin” deve ser somado contribui com um sinal negativo;
5. Cada variável interna contribui com uma integração independente do tipo  $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{dp_0}{2\pi}$ .

Uma vez definidas as regras de Feynman, podemos definir duas quantidades(ou “bolhas” como mostra a figura 2.5 (b)) que, devido à forma especial de nossa SF (ou até mesmo no caso unidimensional em que temos pontos de Fermi), são logaritmicamente divergentes e importantes do ponto de vista do GR:

$$\begin{aligned}
 i\chi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{P}, P_0) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(\mathbf{k}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{P}; k_0 - P_0) \\
 i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{P}, P_0) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(\mathbf{k}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(-\mathbf{k} + \mathbf{P}; -k_0 + P_0) \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

onde os  $G_{\pm}^{(0)}$ 's são dados de acordo com a equação (2.29). Para calcularmos essas duas quantidades, devemos particularizar cada caso. Como exemplo, considere-se o caso em que  $d = 2$  com a SF chata adotada em nosso modelo (figura 2.3), como descrita na seção anterior. Essas integrais serão reescritas como:

$$\begin{aligned} i\chi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{P}, P_0) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)} \int \frac{dk_{\perp}}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(\mathbf{k}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{P}; k_0 - P_0) \\ i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(\mathbf{P}, P_0) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)} \int \frac{dk_{\perp}}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(\mathbf{k}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(-\mathbf{k} + \mathbf{P}; -k_0 + P_0) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde os intervalos na parte perpendicular serão definidos de acordo com as funções degrau definidas na equação (2.29). Assim, podemos calcular essas duas quantidades a partir de nossa SF chata em duas dimensões mostrada na figura 2.3, resultando<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P_{\parallel}, P_{\perp} = 2k_F; P_0 - \epsilon_F = \omega) &= \frac{(2\Delta - |P_{\parallel}|)}{4\pi^2 v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\ \Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P_{\parallel}, P_{\perp} = 0; P_0 - \epsilon_F = \omega) &= -\frac{(2\Delta - |P_{\parallel}|)}{4\pi^2 v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Devido às regras de Feynman para os propagadores, podemos imaginar essas duas quantidades como duas “bolhas”: uma do tipo partícula-buraco ( $\chi^{(0)}$ ), associada diretamente com uma fase antiferromagnética do tipo ODS (onda de densidade de “spin”), e a outra do tipo partícula-partícula ( $\Pi^{(0)}$ ), relacionada diretamente com a tão conhecida instabilidade supercondutora. Além disso, se considerássemos o caso particular em que  $d = 1$ , teríamos apenas uma mudança no fator que multiplica  $\ln$  de  $(2\Delta - |P_{\parallel}|)/4\pi^2 v_F$  para  $1/2\pi v_F$ . Agora, podemos partir para a definição dos propagadores no sistema físico interagente, os quais serão calculados perturbativamente tendo como ponto de partida o gás de elétrons livres cujo estado fundamental é o “mar” de Fermi.

---

<sup>3</sup>Para chegarmos a esse resultado consideramos apenas a parte real dos logaritmos, pois neste caso a parte imaginária não contribui com singularidades ao nos aproximarmos da SF. Por essa razão, de agora em diante vamos omitir a parte imaginária dos logaritmos no cálculo dos diagramas escrevendo apenas a parte real a não ser que seja estritamente necessário.

## Propagadores no Sistema Físico Interagente

Na seção anterior, definimos o propagador de uma partícula para o caso de um sistema não interagente cujo estado fundamental é o “mar” de Fermi. Entretanto, para efetuarmos os cálculos das funções de Green para o sistema interagente relevantes em nosso modelo, devemos, primeiramente, definir o funcional gerador  $\mathcal{Z}$  dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}] &= \int \prod_a \mathcal{D}\bar{\psi}_{(a)\sigma} \mathcal{D}\psi_{(a)\sigma'} \exp i \left\{ S[\bar{\psi}_{(a)}, \psi_{(a)}; g_1, g_2] + \sum_{\delta} \left[ \int_{\mathbf{k}, t} \bar{\psi}_{(+)\delta}(\mathbf{k}, t) \eta_{\delta}(\mathbf{k}, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{\eta}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \psi_{(+)\delta}(\mathbf{k}, t) + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{\psi}_{(-)\delta}(\mathbf{k}, t) j_{\delta}(\mathbf{k}, t) + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{j}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \psi_{(-)\delta}(\mathbf{k}, t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}$  são as fontes que obedecem à álgebra de Grassmann e

$$S[\bar{\psi}_{(a)}, \psi_{(a)}; g_1, g_2] = \int dt L[\bar{\psi}_{(a)}, \psi_{(a)}; g_1, g_2] \quad (2.35)$$

e

$$\int_{\mathbf{k}, t} = \int dt \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (2.36)$$

No entanto, qualquer cálculo direto envolvendo  $\mathcal{Z}$  para gerar as funções de Green produzirá tanto diagramas conectados quanto desconectados. Assim, para evitarmos lidar com diagramas desconectados, definimos:

$$iW[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}] = \ln \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}] \quad (2.37)$$

Conseqüentemente, as funções de Green de uma partícula escrevem-se<sup>4</sup>:

$$\left. \frac{\delta^2 W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}]}{\delta \eta_{\sigma}(\mathbf{p}, t) \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, 0)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=0} = i \left\langle T \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}, t) \psi_{(+)\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}, 0) \right\rangle_c = -G_{(+)\sigma}^{(2)}(\mathbf{p}, t)$$

---

<sup>4</sup>Repare que os  $\bar{\psi}$  se tornaram  $\psi^{\dagger}$ , pois estamos usando a notação convencional na qual os conjugados complexos dos campos fermiônicos clássicos são designados com barra e os quânticos, com daga.

$$\frac{\delta^2 W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}]}{\delta j_\sigma(\mathbf{p}, t) \delta \bar{j}_\sigma(\mathbf{p}, 0)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=0} = i \left\langle T \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}, t) \psi_{(-)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, 0) \right\rangle_c = -G_{(-)\sigma}^{(2)}(\mathbf{p}, t) \quad (2.38)$$

onde  $c$  designa apenas diagramas conectados. Uma outra quantidade importante é a função de Green de duas partículas que se apresenta em dois distintos canais de espalhamento:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}]}{\delta \eta_\sigma(\mathbf{p}_4, t_4) \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}_3, t_3) \delta \bar{\eta}_{\sigma'}(\mathbf{p}_2, t_2) \delta \bar{j}_\sigma(\mathbf{p}_1, t_1)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=0} = \\ & -i \left\langle T \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \psi_{(+)\sigma'}(\mathbf{p}_2, t_2) \psi_{(-)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \right\rangle_c = i G_{(1)\sigma\sigma'}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}; \{t_i\}) \\ & \frac{\delta^4 W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}]}{\delta \eta_\sigma(\mathbf{p}_4, t_4) \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}_3, t_3) \delta \bar{j}_{\sigma'}(\mathbf{p}_2, t_2) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}_1, t_1)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=0} = \\ & -i \left\langle T \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \psi_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}_2, t_2) \psi_{(-)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \right\rangle_c = i G_{(2)\sigma\sigma'}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}; \{t_i\}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Os propagadores no sistema físico interagente serão calculados perturbativamente. Entretanto, é possível escrever os propagadores em termos de suas respectivas funções irreduzíveis, as quais descrevem os processos virtuais que, neste caso, são de uma ou duas partículas. No Apêndice D, nós demonstramos tais relações, que serão muito úteis ao empregarmos a sistemática de renormalização. Como resultado, temos a seguinte expressão para  $G_{(\pm)}$ :

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt'' \left[ \Gamma_{(+)\sigma}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \right] G_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, t' - t'') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(t' - t) \\ & \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt'' \left[ \Gamma_{(-)\sigma}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \right] G_{(-)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, t' - t'') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(t' - t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

as quais nos permitem identificar:

$$\begin{aligned} G_{(+)\sigma}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) &= \Gamma_{(+)\sigma}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \\ G_{(-)\sigma}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) &= \Gamma_{(-)\sigma}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

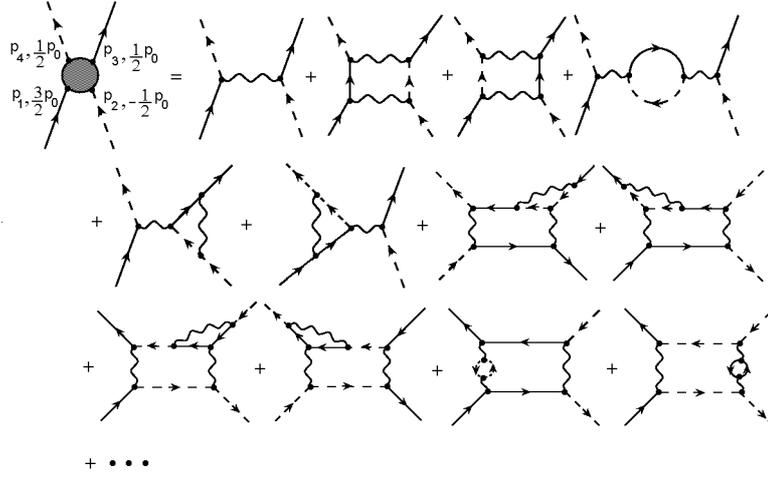


Figura 2.6: Diagramas até dois “loops” para a função irreduzível  $\Gamma_{1\sigma\sigma'}^{(4)}$ .

Encontra-se também no Apêndice D a demonstração das relações das funções de Green de duas partículas e suas respectivas funções irreduzíveis, resultando nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
iG_{1\sigma\sigma'}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}, \mathbf{q}, t, t', t'', t''') &= \int_{\mathbf{p}_1, t_1} \int_{\mathbf{p}_2, t_2} \int_{\mathbf{p}_3, t_3} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}, t_1 - t) \\
&\times iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}, t_2 - t') \left( i\Gamma_{1\sigma\sigma'}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}, \{t_i\}) \right) iG_{(+)\sigma'}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_3, t'' - t_3) iG_{(-)\sigma}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}', t_4 - t''') \\
iG_{2\sigma\sigma'}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}, \mathbf{q}, t, t', t'', t''') &= \int_{\mathbf{p}_1, t_1} \int_{\mathbf{p}_2, t_2} \int_{\mathbf{p}_3, t_3} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}, t_1 - t) \\
&\times iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}, t_2 - t') \left( i\Gamma_{2\sigma\sigma'}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}, \{t_i\}) \right) iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_3, t'' - t_3) iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}', t_4 - t''')
\end{aligned} \tag{2.42}$$

com  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Agora, podemos calcular perturbativamente os objetos  $\Gamma_{1\sigma\sigma'}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2\sigma\sigma'}^{(4)}$  até dois “loops”, que é o caso que nos interessa. Assim, se considerarmos a transformada de Fourier em relação aos  $t$ 's, podemos chegar aos diagramas das figuras 2.6 e 2.7. Os únicos diagramas de dois “loops” que contribuem com divergências logarítmicas são os chamados de não-parquet, como mostram as figuras citadas. Outras contribuições do tipo  $\ln^n$ , com  $n > 1$ , não são mostradas, pois

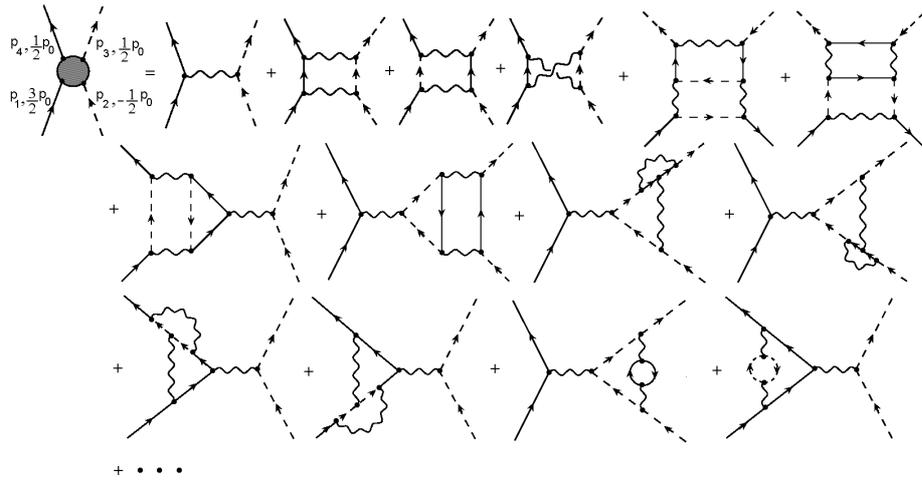


Figura 2.7: Diagramas até dois “loops” para a função irreduzível  $\Gamma_{2\sigma\sigma'}^{(4)}$ .

serão canceladas exatamente ordem a ordem pelo nosso esquema de renormalização, conforme veremos no próximo capítulo.

Uma vez definidos o modelo de Lagrangiano e o funcional gerador, podemos demonstrar as equações de Schwinger-Dyson que levam à definição da auto-energia como veremos a seguir.

### 2.2.3 Equações de Schwinger-Dyson e a Auto-Energia

O conjunto de equações de Schwinger-Dyson fornece uma relação de caráter não perturbativo. Usaremos tal conjunto de equações para derivar a auto-energia, que desempenha um papel muito importante no contexto da renormalização.

No Apêndice E, derivamos as equações de Schwinger-Dyson para o nosso modelo de Lagrangiano e definimos a auto-energia a partir de tais equações. Devido ao fato de termos níveis de Fermi simétricos, seja em uma dimensão, seja em duas dimensões, as funções de Green de uma partícula em ramos antípodas geram contribuições equivalentes. Portanto, vamos escolher apenas  $G_{(+)}$  para escrever a seguinte equação de Dyson:

$$iG_{(+) \sigma}(\mathbf{k}', t' - t) = iG_{(+) \rho}^{(0)}(\mathbf{k}', t' - t) + \int dt'' iG_{(+) \sigma}^{(0)}(\mathbf{k}', t'' - t) (-i\Sigma_{(+) \sigma}(\mathbf{k}', t'')) iG_{(+) \sigma}(\mathbf{k}', t' - t'')$$

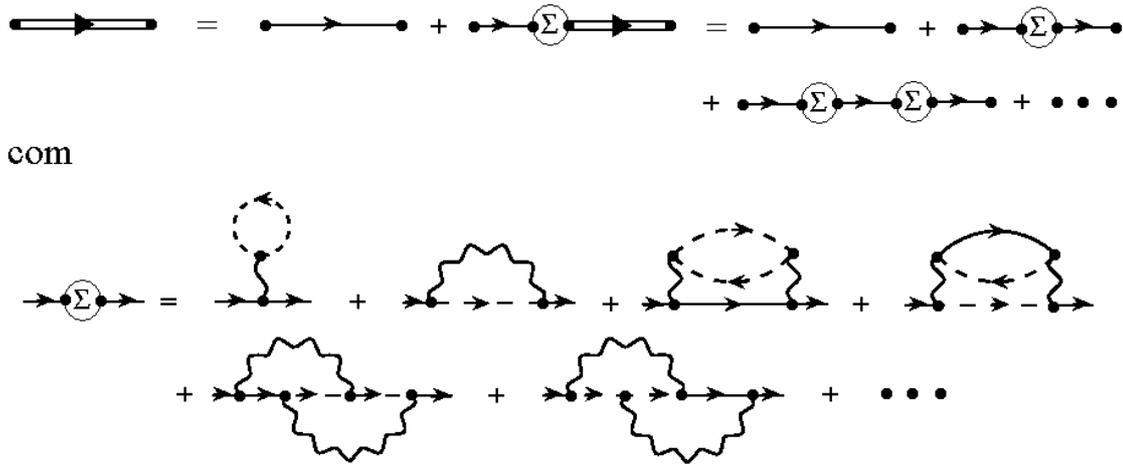


Figura 2.8: Equação de Dyson e a Auto-Energia.

(2.43)

A equação acima é exata. Se a resolvermos iterativamente, geraremos infinitos diagramas como mostra a figura 2.8. Entretanto, se truncarmos a auto-energia em alguma ordem, a equação de Dyson irá somar uma certa classe de diagramas até ordem infinita. Assim, para conhecermos a função de Green de uma partícula exata, precisamos conhecer a série da auto-energia exata. Em nosso caso, vamos truncar a série da auto-energia em dois “loops” para que, dessa forma, possamos empregar uma sistemática perturbativa no contexto do grupo de renormalização.

## 2.2.4 Caso 1D

Em  $d = 1$ , o Lagrangiano (2.25) se reduz a:

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{\sigma, a=\pm} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(p, t) [i\partial_t - v_F(|k| - k_F) - \epsilon_F] \psi_{(a)\sigma}(p, t) \\
 & - \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} [g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(p + q - k, t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(k, t) \psi_{(-)\beta}(q, t) \psi_{(+)\alpha}(p, t).
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

onde, em  $d = 1$ , temos pontos de Fermi como os mostrados na figura 2.1 (b). A figura 2.9

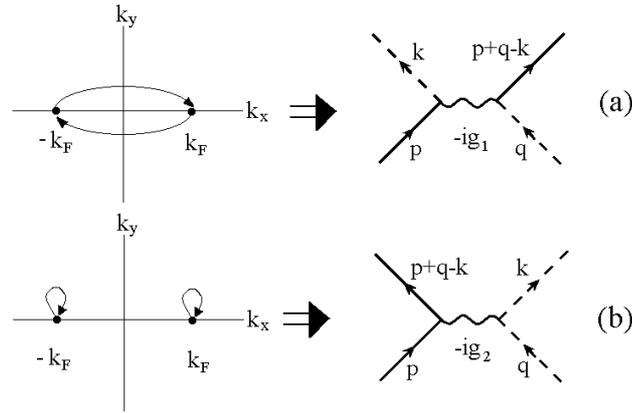


Figura 2.9: Interações em uma dimensão.

mostra as interações no caso unidimensional. O processo  $g_1$  ocorre quando duas partículas em seções antípodas trocam de posição; o processo  $g_2$  ocorre quando as partículas envolvidas permanecem em suas respectivas seções antípodas.

Na seção anterior, mostramos como chegar aos diagramas da auto-energia. Se truncarmos a série em dois “loops” e usarmos as devidas regras de Feynman mencionadas anteriormente, podemos calcular os diagramas da auto-energia da figura 2.8. Ali aparecem várias “bolhas” do tipo partícula-partícula e partícula-buraco, logicamente divergentes, como mostramos na seção 2.2.2. Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p = k_F, p_0) &= -i\frac{(2g_2 - g_1)\lambda}{\pi} - i\frac{[g_1g_2 - g_1^2 - g_2^2]}{8\pi^2v_F^2} \\
 &\times \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega + p_0 - \epsilon_F - i\delta}{p_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) + (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega - p_0 + \epsilon_F - i\delta}{-p_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + 2\Omega \right] \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

onde  $\Omega = 2v_F\lambda$ , e todos os momentos externos foram fixados nos pontos de Fermi. É bem conhecido que, ao lidarmos com a teoria do líquido de Fermi, a parte imaginária da auto-energia tende a zero quando nos aproximamos dos níveis de Fermi. Entretanto, resultado semelhante também aparece em nosso modelo bidimensional em um cálculo até dois “loops”. Em líquidos de Fermi marginais, a parte imaginária da auto-energia tem um papel fundamental no cálculo

da função espectral. Em nossa análise do grupo de renormalização, a parte imaginária da auto-energia pode ser desprezada neste cálculo de dois “loops”. Conseqüentemente, poderemos escrever a parte real da auto-energia da seguinte forma:

$$\Sigma(p = k_F, p_0) = \frac{(2g_2 - g_1)\lambda}{\pi} - \frac{[g_1^2 + g_2^2 - g_1g_2]}{4\pi^2v_F^2} \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \Omega \right] \quad (2.46)$$

Esta equação é não-analítica quando nos aproximamos da SF, uma vez que  $p_0 - \epsilon_F$  é a diferença de energia entre um estado excitado e o nível de Fermi. Obviamente, ao definirmos uma escala de energia  $\omega$  que mede a diferença de energia para regiões muito próximas dos níveis de Fermi, devemos nos assegurar que nosso modelo de Lagrangiano represente bem o sistema através de seus parâmetros definidos em tal escala. Isso somente é possível mediante as equações do grupo de renormalização, que serão discutidas no capítulo seguinte.

Analogamente ao cálculo dos diagramas da auto-energia, usaremos as regras de Feynman juntamente com os níveis de Fermi da figura 2.1 (b) para chegarmos às seguintes expressões para as funções irreduzíveis  $\Gamma_1^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$  das figuras 2.6 e 2.7:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(4)}(\{p_i\}; p_0) &= g_1 - \frac{g_1^2}{\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) - \frac{1}{2\pi^2v_F^2} (g_1^2g_2 - g_1g_2^2) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \\ \Gamma_2^{(4)}(\{p_i\}; p_0) &= g_2 - \frac{g_1^2}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \frac{1}{2\pi^2v_F^2} (g_1^2g_2 - g_1g_2^2) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \\ &\quad - \frac{(g_1^3 - 2g_2^3)}{4\pi^2v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde fixamos novamente todos os momentos externos nos pontos de Fermi. Essas equações para as funções irreduzíveis também são logaritmicamente divergentes quando tomamos o limite de  $p_0 - \epsilon_F \sim \omega \rightarrow 0$ . Por conseguinte, devemos fazer um tratamento via grupo de renormalização a fim de regularizarmos tais divergências.

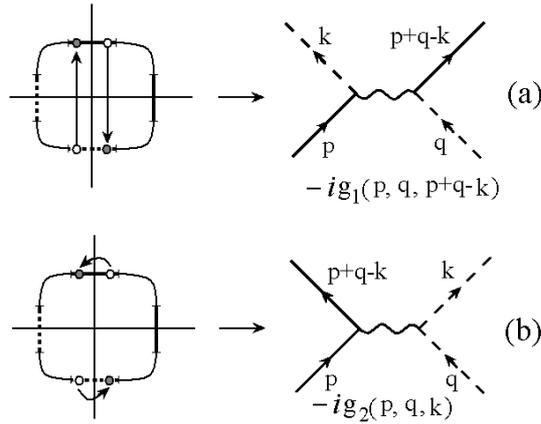


Figura 2.10: Interações em duas dimensões.

### 2.2.5 Caso 2D

Conforme mencionado anteriormente, a SF que devemos adotar no caso bidimensional é a da figura 2.2 (b). O Lagrangiano neste caso se reduz a:

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{\sigma, a=\pm} \int_{\mathbf{p}} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t) [i\partial_t - v_F(|k_\perp| - k_F) - \epsilon_F] \psi_{(a)\sigma}(\mathbf{p}, t) - \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} \int_{\mathbf{k}} [g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \\
 & - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(\mathbf{k}, t) \psi_{(-)\beta}(\mathbf{q}, t) \psi_{(+)\alpha}(\mathbf{p}, t). \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

onde  $f = \int d^2p / (2\pi)^2$  e o mesmo acontece com as outras integrais. Entretanto, a única restrição para a ocorrência de processos do tipo “backward”  $g_1$  e “forward”  $g_2$  é que eles sejam de regiões antípodas na direção perpendicular à SF. Para o processo do tipo  $g_1$ , as partículas devem trocar de seções da SF, o que representa um processo de grande transferência de momento.

Para o processo do tipo  $g_2$ , as partículas permanecem nas suas próprias seções antípodas, o que corresponde a processos com baixa transferência de momento. Isso introduz uma dependência dos processos com os momentos como mostra a figura 2.10.

Para evitar dificuldades analíticas, devemos fixar os momentos externos na SF, como fizemos com os pontos de Fermi no caso unidimensional. Entretanto, não há nenhuma restrição quanto a parte paralela à SF. Conseqüentemente, ao fixarmos os momentos perpendiculares na

SF teremos que  $g_i(\mathbf{p})|_{p_\perp=k_F} = g_i(p_\parallel)$ .

No Apêndice C, mostramos como calcular um diagrama de auto-energia e um da função irreduzível  $\Gamma_1^{(4)}$  e outro de  $\Gamma_2^{(4)}$  no caso bidimensional. Uma vez que os acoplamentos, na vizinhança do nível de Fermi, dependem somente dos momentos paralelos,<sup>5</sup> podemos separar a integração com relação aos momentos perpendiculares e com relação aos momentos paralelos. Nessa aproximação, portanto, os acoplamentos dependerão apenas dos momentos paralelos. Conseqüentemente, se considerarmos os diagramas da figura 2.8 para o cálculo dos diagramas de auto-energia, poderemos chegar à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \Sigma(p_\parallel; p_0) &= \frac{\lambda^2}{\pi^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} dq_\parallel \left[ 2g_2(p_\parallel, q_\parallel, q_\parallel) - g_1(p_\parallel, q_\parallel, p_\parallel) \right] \\ &- \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \int_{\mathcal{D}} dk_\parallel dq_{1\parallel} \left[ 2g_1(-k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}, k_\parallel, q_{1\parallel}) g_1(p_\parallel, q_{1\parallel}, k_\parallel) + 2g_2(p_\parallel, q_{1\parallel}, -k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}) \right. \\ &\times g_2(k_\parallel, -k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) - g_1(p_\parallel, q_{1\parallel}, k_\parallel) g_2(k_\parallel, -k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) \\ &\left. - g_2(p_\parallel, q_{1\parallel}, -k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}) g_1(k_\parallel, -k_\parallel + p_\parallel + q_{1\parallel}, p_\parallel) \right] \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \Omega \right], \quad (2.49) \end{aligned}$$

onde fixamos todas as componentes perpendiculares dos momentos externos na SF.  $\mathcal{D}$  pode ser encontrado no Apêndice G. A diferença do caso unidimensional reside em termos acoplamentos dependentes dos momentos paralelos à SF, justamente por termos uma dimensão a mais.

O cálculo das funções irreduzíveis  $\Gamma_1^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$  segue diretamente das figuras 2.6 e 2.7 considerando as devidas regras de Feynman:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(4)} &= g_1(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) - \frac{1}{4\pi^2 v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \left\{ \int_{\mathcal{D}_1} dk_\parallel [g_1(-k_\parallel + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_\parallel, p_{3\parallel}) \right. \\ &\times g_2(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_\parallel) + g_2(k_\parallel, -k_\parallel + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) g_1(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_\parallel) \left. \right] \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Ao fazermos essa afirmação, estamos assumindo um certo tipo de aproximação para que o problema seja tratável analiticamente, pois podemos fixar apenas os momentos externos. Entretanto, ao considerarmos os momentos internos dos diagramas de Feynman, que, por sua vez, devem ser integrados, não poderíamos fazer tal afirmação. Contudo, vale lembrar que estamos interessados apenas em regiões muito próximas à SF e, por essa razão, introduzimos um “cutoff”  $\lambda$ . Assim, podemos fazer esse tipo de aproximação sem maiores problemas, pois ao fixarmos esse “cutoff”, estamos considerando que os processos  $g_1$  e  $g_2$  aconteçam numa pequena região em torno do nível de Fermi.

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathcal{D}_2} dk_{\parallel} \left[ 2g_1(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, k_{\parallel})g_1(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) - g_1(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, k_{\parallel}) \right. \\
& \left. \times g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}) - g_1(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_2(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) \right] \Big\} \\
& - \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \left\{ \int_{\mathcal{D}_7} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_1(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})g_2(k_{\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}) \right. \right. \\
& \times g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}) + g_1(k_{\parallel}, q_{\parallel}, p_{3\parallel})g_1(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \\
& \times g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}) - 2g_1(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}) \\
& \left. \times g_2(k_{\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}) \right] + \int_{\mathcal{D}_8} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_2(q_{\parallel}, k_{\parallel}, p_{4\parallel})g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel}) \right. \\
& \times g_1(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) + g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel})g_1(q_{\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}) \\
& \times g_2(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}) - 2g_2(k_{\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel})g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel}) \\
& \left. \left. \times g_2(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}) \right] \right\} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

e, de forma análoga, chegamos à seguinte expressão para  $\Gamma_{2\sigma\sigma'}^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{(4)} & = g_2(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) - \frac{1}{4\pi^2 v_F} \left\{ \int_{\mathcal{D}_1} dk_{\parallel} \left[ g_2(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel})g_2(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \right. \right. \\
& \left. \left. + g_1(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel})g_1(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \right] \right. \\
& \left. - \int_{\mathcal{D}_3} dk_{\parallel} \left[ g_2(p_{1\parallel}, p_{3\parallel} - p_{1\parallel} + k_{\parallel}, p_{3\parallel})g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel} - p_{1\parallel} + k_{\parallel}) \right] \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \left\{ \int_{\mathcal{D}_5} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel})g_1(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) \right. \right. \right. \\
& \times g_1(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel}) - 2g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel})g_1(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel}) \\
& \times g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) + g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_1(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel})g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, q_{\parallel}) \\
& + g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_2(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel})g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel}) \\
& \left. \left. \left. - 2g_2(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_2(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel})g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, q_{\parallel}) \right] \right. \right. \\
& \left. + \int_{\mathcal{D}_6} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_1(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, p_{4\parallel})g_1(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_1(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) \right. \right. \\
& - 2g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_1(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_1(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) \\
& + g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_1(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_2(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \\
& \left. \left. + g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_1(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel})g_2(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$-2g_2(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_2(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})g_2(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \Big] \Big\} \quad (2.51)$$

onde fixamos todas as componentes perpendiculares dos momentos externos na SF, e os intervalos de integração  $\mathcal{D}_i$  serão mostrados no Apêndice G. Obviamente, essas equações tornam-se singulares quando nos aproximamos da SF. Devemos, então, introduzir a sistemática do grupo de renormalização para lidar com tais divergências, o que veremos no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Sistemática do Grupo de Renormalização (GR)

Neste capítulo, empregaremos a sistemática do grupo de renormalização para lidarmos com as divergências no limite do infravermelho, ou seja, quando  $p_0 - \epsilon_F = \omega \rightarrow 0$ . Para explicitarmos a técnica de maneira bem mais simples, realizaremos os cálculos em uma dimensão e, então, aplicaremos tal técnica de forma mais direta em duas dimensões, que é, de fato, nosso caso de interesse. Além disso, antes de fazermos os cálculos diretos em dois “loops”, efetuaremos os cálculos em um “loop” para que fique mais evidente o papel do peso  $Z$  da quasipartícula nos processos físicos em questão. Encerraremos o capítulo com a derivação das equações do GR para os principais parâmetros físicos presentes em nosso modelo de Lagrangiano na presença de uma SF bidimensional descrita no capítulo anterior.

### 3.1 Renormalizabilidade do Modelo

Ao empregarmos a sistemática do grupo de renormalização, convém, primeiramente, analisar a renormalizabilidade do modelo.

Comentamos anteriormente, sem demonstrar explicitamente, que ao considerarmos nosso modelo de Lagrangiano, não precisamos definir funções de Green de  $n$  partículas com  $n > 2$ , devido ao fato de tais funções não gerarem diagramas primitivos logicamente divergentes que não possam ser regularizados pelas grandezas “nuas” já consideradas. Isso já é um forte indício de que a teoria é renormalizável, pois não precisamos adicionar ao Lagrangiano contratermos cuja estrutura não esteja contida no Lagrangiano inicial.

Não apresentaremos aqui uma prova completa de sua renormalizabilidade, mas mostraremos explicitamente, até uma ordem de dois “loops”, como todos os diagramas de ordem  $\ln^2(\Omega/\omega)$  cancelam-se mutuamente. Na seção 3.2.2, mostraremos todos os diagramas nessa ordem de teoria de perturbação para as funções irreduzíveis de duas partículas  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2B}^{(4)}$ . Seguindo nossa estratégia anterior, realizaremos os cálculos em uma dimensão para, em seguida, generalizarmos esses resultados para duas dimensões.

A principal vantagem de realizarmos esses cálculos em uma dimensão é que, além de lidar com um caso muito mais simples, poderemos detectar possíveis problemas de não-renormalizabilidade do modelo antes de realizarmos cálculos mais complexos. Não chegamos a calcular explicitamente todos os diagramas, para mantermos a brevidade de nossa abordagem. Entretanto, mostramos todos os diagramas possíveis e os seus respectivos resultados. Muitos desses diagramas cancelam-se mutuamente tanto em um “loop” quanto em dois “loops”, restando apenas alguns deles. Contudo, em dois “loops” há poucos diagramas restantes  $[\sim \ln^2(\Omega/\omega)]$ , que são exatamente cancelados ao expandirmos os parâmetros “nus”, em relação aos parâmetros renormalizados, ordem a ordem na teoria de perturbação, como veremos nesta seção.

## 3.2 Caso 1D

### 3.2.1 Cálculos de um “loop” para o caso $d = 1$

No capítulo anterior, vimos que algumas grandezas físicas de interesse apresentam divergências logarítmicas em um cálculo até dois “loops”. Para visualizarmos melhor quais parâmetros devem ser renormalizados, aplicaremos, primeiramente, o GR em uma ordem de um “loop” e, em seguida realizaremos os cálculos completos em dois “loops”. Assim, até essa ordem de teoria de perturbação, não é difícil constatar que a auto-energia não é divergente em um cálculo de um “loop”. Entretanto, nessa mesma ordem, as funções irreduzíveis  $\Gamma_1^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$  são logaritmicamente divergentes. Assim, seguindo a sistemática do GR devemos adicionar contra-termos ao Lagrangiano (2.44) a fim de eliminarmos as divergências logarítmicas que aparecem nas funções irreduzíveis mencionadas acima, ou seja:

$$\begin{aligned}
L_R &= \sum_{\sigma,a=\pm} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(p,t) [i\partial_t - v_F(|k| - k_F) - \epsilon_F] \psi_{(a)\sigma}(p,t) \\
&- \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} [g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(p+q-k,t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(k,t) \psi_{(-)\beta}(q,t) \psi_{(+)\alpha}(p,t) \\
&\sum_{\sigma,a=\pm} \int \frac{dp}{2\pi} A \psi_{(a)\sigma}^\dagger(p,t) [i\partial_t - v_F(|k| - k_F) - \epsilon_F] \psi_{(a)\sigma}(p,t) \\
&- \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} [B g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - C g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(p+q-k,t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(k,t) \psi_{(-)\beta}(q,t) \psi_{(+)\alpha}(p,t) \\
L_R &= L + L_{ct}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
L_R &= \sum_{\sigma,a=\pm} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{B(a)\sigma}^\dagger(p,t) [i\partial_t - v_F(|k| - k_F) - \epsilon_F] \psi_{B(a)\sigma}(p,t) \\
&- \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} [g_{2B} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - g_{1B} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \\
&\times \psi_{B(+)\delta}^\dagger(p+q-k,t) \psi_{B(-)\gamma}^\dagger(k,t) \psi_{B(-)\beta}(q,t) \psi_{B(+)\alpha}(p,t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $v_F$ ,  $k_F$  e  $\epsilon_F$  não sofrem qualquer renormalização e as grandezas “nuas” agora incorporam os contratermos adicionados ao Lagrangiano. Podemos, então, identificar os parâmetros “nus”

como:

$$\psi_{B(a)\sigma} = (1 + A)^{1/2} \psi_{(a)\sigma} = Z^{1/2} \psi_{(a)\sigma} \quad (3.3)$$

$$g_{1B} = \frac{(1 + C)}{(1 + A)^2} g_1 = Z^{-2} (1 + C) g_1 \quad (3.4)$$

$$g_{2B} = \frac{(1 + B)}{(1 + A)^2} = Z^{-2} (1 + B) g_2. \quad (3.5)$$

Escrevendo as grandezas “nuas” dessa forma podemos definir naturalmente dois tipos de funções irreduzíveis,  $\Gamma_B^{(n)}$  e  $\Gamma_R^{(n)}$ , relacionadas entre si por meio da equação abaixo:

$$\Gamma_B^{(n)}(\{p_i\}; g_{1B}, g_{2B}, p_0) = Z^{-n/2} \Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; g_{1R}, g_{2R}, p_0) \quad (3.6)$$

ou ainda:

$$\Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; g_{1R}, g_{2R}, p_0) = Z^{n/2} \Gamma_B^{(n)}(\{p_i\}; g_{1B}, g_{2B}, p_0) \quad (3.7)$$

Aplicando a teoria de perturbação até uma ordem de um “loop”, descrita no capítulo anterior, obteremos os diagramas da figura 3.1 para auto-energia ( $\Sigma_B$ ) e os diagramas das figuras 3.2 e 3.3 para as funções irreduzíveis  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $\Gamma_{1B}^{(4)}$ . Considerando os diagramas da auto-energia e as devidas regras de Feynman, encontramos imediatamente:

$$-i\Sigma_B(p, p_0) = -i \frac{(2g_{2B} - g_{1B})\lambda}{\pi} \quad (3.8)$$

Em um “loop”, portanto, a auto-energia só contribui para renormalizar a energia de Fermi. Como não levamos em conta a renormalização da SF podemos desprezar essa contribuição.

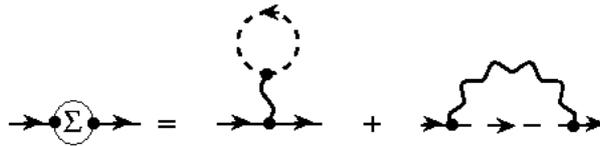


Figura 3.1: Diagramas da auto-energia até um “loop” em uma dimensão.

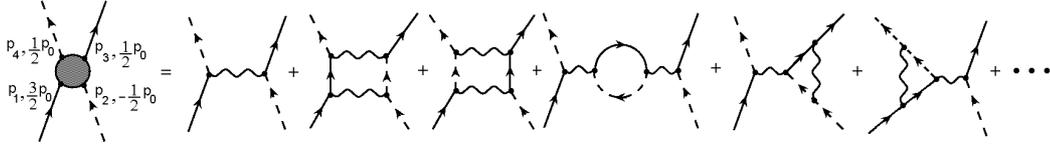


Figura 3.2: Diagramas até um “loop” no canal  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  em uma dimensão.

No capítulo anterior, vimos como a auto-energia relaciona-se com a função irreduzível de uma partícula:

$$\Gamma_{B(+)}^{(2)}(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) = G_{B(+)}^{-1}(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) \quad (3.9)$$

Tomando a transformada de Fourier em relação à parte temporal da equação de Dyson (2.43), poderemos reescrevê-la na forma:

$$G_{B(+)} = \frac{1}{(G_{B(+)}^{(0)})^{-1} - \Sigma_B} \quad (3.10)$$

Assim, a equação (3.9) se reduz a:

$$\begin{aligned} \Gamma_{B(+)}^{(2)}(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) = & (G_{B(+)}^{(0)}(p, p_0))^{-1} - \Sigma_B(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) = \\ & (p_0 - \epsilon_F - v_F(p - k_F)) - \Sigma_B(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde usamos a equação (2.30). Agora, usando a condição (3.7) juntamente com a equação (3.8), chegaremos à seguinte equação:

$$\Gamma_{R(+)}^{(2)}(p; g_{1R}, g_{2R}, p_0 - \epsilon_F = \omega) = Z(\omega) [(\omega - v_F(p - k_F))] \quad (3.12)$$

Uma vez que queremos que as funções irreduzíveis renormalizados sejam finitas ao nos aproximarmos dos níveis de Fermi, definiremos  $\Gamma_{(B)}^{(2)}$  tal que:

$$\Gamma_R^{(2)}(p = k_F; g_{1R}, g_{2R}, p_0 - \epsilon_F = \omega) = \omega \quad (3.13)$$

Substituindo a equação (3.13) na equação (3.12), resulta:

$$\omega = Z(\omega)\omega \quad (3.14)$$

Conseqüentemente, segue-se que, em um “loop”, temos que  $Z(\omega) = 1$ . Cabe ressaltar o fato de que, em um líquido de Fermi, o peso  $Z$  da quasipartícula é tal que  $0 < Z < 1$ . Assim, pelo resultado acima, podemos ser levados erroneamente a pensar que, ao obtermos  $Z = 1$ , estamos diante de um cenário típico de um líquido de Fermi. Na verdade, em uma dimensão é bem conhecido o resultado no caso em que temos o modelo de Hubbard repulsivo como modelo inicial. Neste caso, deveríamos encontrar no regime metálico o líquido de Luttinger no qual  $Z \rightarrow 0$ . Esse resultado não perturbativo não se manifesta nessa ordem de perturbação. Fica claro, então, que isso é apenas um artifício da aproximação.

Podemos, agora, analisar as funções irreduzíveis  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2B}^{(4)}$ . As figuras 3.2 e 3.3 mostram os diagramas para tais funções. Usando as devidas regras de Feynman para calcularmos esses diagramas, veremos que ocorrerão alguns cancelamentos<sup>1</sup> resultando nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{1B}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= g_{1B} - \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \\ i\Gamma_{2B}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= g_{2B} - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde fixamos os momentos externos nos pontos de Fermi. Agora, se usarmos a equação (3.7) relacionando as funções irreduzíveis de uma partícula “nuas” e renormalizadas, chegamos às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{1R}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= Z^2 \left[ g_{1B} - \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \right] \\ i\Gamma_{2R}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= Z^2 \left[ g_{2B} - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

A fim de determinarmos os parâmetros de acoplamento físicos, ou experimentalmente observáveis, devemos fazer as seguintes prescrições:

---

<sup>1</sup>Isso acontece apenas em uma dimensão.

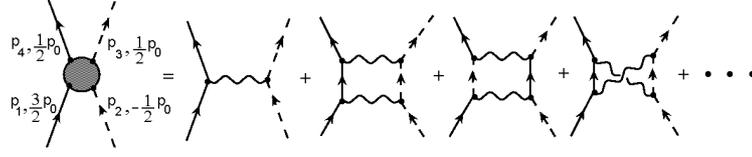


Figura 3.3: Diagramas até um “loop” no canal  $\Gamma_{2B}^{(4)}$  em uma dimensão.

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{1R}^{(4)}(p_1 = k_F, p_2 = -k_F, p_3 = k_F, p_4 = -k_F; p_0 - \epsilon_F = \omega) &= g_{1R}(\omega) \\
i\Gamma_{2R}^{(4)}(p_1 = k_F, p_2 = -k_F, p_3 = -k_F, p_4 = k_F; p_0 - \epsilon_F = \omega) &= g_{2R}(\omega)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Note que todos os parâmetros renormalizados dependem da escala de energia  $\omega$  que não se manifesta nas grandezas “nuas”. Isso acontece por havermos adicionado os contratermos para definir as grandezas “nuas”. Essa é a hipótese do GR na qual as equações do GR constroem uma teoria efetiva dependente da escala de energia.

Assim, lembrando que obtivemos  $Z = 1$ , podemos reescrever a equação (3.15) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
g_{1R} &= g_{1B} + \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \\
g_{2R} &= g_{2B} + \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
g_{1R} &= g_{1B} \left( 1 - \frac{g_{1B}}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right) \\
g_{2R} &= g_{2B} \left( 1 - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F g_{2B}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Agora, devemos inverter essas equações para obtermos os parâmetros “nus” com relação aos parâmetros renormalizados. Conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
g_{1B} &= g_{1R} \left( 1 - \frac{g_{1B}}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)^{-1} = g_{1R} \left( 1 + \frac{g_{1B}}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right) \\
g_{2B} &= g_{2R} \left( 1 - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F g_{2B}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)^{-1} = g_{2R} \left( 1 + \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F g_{2B}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ao substituímos as grandezas “nuas” desta última equação pelas expressões correspondentes em termos dos parâmetros renormalizados, mantendo a ordem de perturbação em que trabalhamos, temos que:

$$\begin{aligned} g_{1B} &= g_{1R} + \frac{g_{1R}^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \\ g_{2B} &= g_{2R} + \frac{g_{1R}^2}{2\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando o fato de que as grandezas “nuas” não dependem da escala de energia, podemos derivar esta última equação com relação a  $\omega$  para obtermos:

$$\begin{aligned} \omega \frac{dg_{1R}}{d\omega} &= \frac{g_{1R}^2}{\pi v_F} \\ \omega \frac{dg_{2R}}{d\omega} &= \frac{g_{1R}^2}{2\pi v_F} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde mantivemos apenas os termos de um “loop”, que é a ordem desejada. Essas equações construirão a dependência dos parâmetros renormalizados com relação à escala de energia. Devemos notar, também, que, diferentemente do peso  $Z$  da quasipartícula, a quantidade  $g_1 - 2g_2$  é um invariante exato, e esse resultado deve ser mantido mesmo para cálculos de ordem superior. Não é difícil ver que, para o modelo de Hubbard repulsivo, teremos pontos fixos não triviais. Neste caso, as equações do GR (3.22) não variam mais, ou seja, ao atingirmos um ponto fixo  $g_{iR} = g_{iR}^*$  devemos ter que  $dg_{iR}^*/d\omega = 0$ . Isso nos leva a concluir que  $g_{1R}^* = 0$  e  $g_{2R}^* = \text{constante}$  é a solução desejada. Caso  $g_{2R}^* = 0$ , as equações do GR são igualmente satisfeitas, mas isso constitui uma solução trivial do sistema físico que não nos interessa. O resultado não-trivial caracteriza a tão conhecida linha de Luttinger[29] no espaço dos  $g$ 's. A seguir, passaremos aos cálculos em dois “loops” para podermos analisar suas principais peculiaridades e vantagens.

### 3.2.2 Cálculos de dois “loops” para o caso $d = 1$

No cálculo de um “loop”, vimos que o peso  $Z$  da quasipartícula é sempre igual a um. Entretanto, nesta seção mostraremos que uma das principais vantagens de realizar cálculos até dois “loops” é que  $Z$  não possui mais um valor fixo, mas evolui com as equações do GR e eventualmente se anula quando  $\omega \rightarrow 0$ .

Na seção C.3 do Apêndice C, mostramos de forma sucinta, como exemplo, os cálculos para um dos diagramas da auto-energia ( $\Sigma$ ) e um diagrama de cada uma das funções irreduzíveis  $\Gamma_1^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$  usando as já definidas regras de Feynman. Assim, utilizando o Lagrangiano renormalizado 3.2 podemos fazer teoria de perturbação até dois “loops” para chegarmos às seguintes expressões:

$$-i\Sigma_B(p = k_F, p_0) = i \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \right] + \dots \quad (3.23)$$

onde mais uma vez desprezamos os efeitos produzidos pelas contribuições constantes na auto-energia  $-i\Sigma_B$ , e:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{1B}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= g_{1B} - \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) - \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \\ i\Gamma_{2B}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; p_0) &= g_{2B} - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \\ &\quad - \frac{(g_{1B}^3 - 2g_{2B}^3)}{4\pi^2 v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

para as funções irreduzíveis  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2B}^{(4)}$ .

Analisaremos, agora, a auto-energia. Aplicaremos a sistemática do GR, como fizemos no caso de um “loop”. Para tanto, faremos uso das equações (3.23) e (3.11) para escrever:

$$\Gamma_{B(+)}^{(2)}(p; g_{1B}, g_{2B}, p_0) = (p_0 - \epsilon_F - v_F(p - k_F)) + \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \right] + \dots \quad (3.25)$$

Assim, se usarmos a equação (3.7), chegaremos a:

$$\Gamma_{R(+)}^{(2)}(p; g_{1R}, g_{2R}, p_0) = Z(\omega) \left[ (p_0 - \epsilon_F - v_F(p - k_F)) + \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \right] + \dots \right] \quad (3.26)$$

Novamente, a fim de determinar as grandezas renormalizadas finitas, devemos fazer prescrições. Usaremos a mesma prescrição mostrada na equação (3.13) para escrever a última equação na seguinte forma:

$$\omega = Z(\omega) \left[ \omega + \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \left[ \omega \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) \right] + \dots \right] \quad (3.27)$$

Esta última equação define a relação funcional do peso de quasipartículas com a escala de energia  $\omega$ . Segue-se que:

$$Z(\omega) = \left( 1 + \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) + \dots \right)^{-1} \quad (3.28)$$

Note que  $Z(\omega) = 0$  no limite  $\omega \rightarrow 0$ . No regime de aproximação  $O(g_{iR}^2)$ , podemos expandir  $Z$ , mantendo a devida ordem em teoria de perturbação  $O(g_{iR}^2)$ , resultando em:

$$Z(\omega) = 1 - \frac{[g_{1R}^2 + g_{2R}^2 - g_{1R}g_{2R}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) + \dots \quad (3.29)$$

que é a forma funcional do peso  $Z$  da quasipartícula com relação à escala de energia  $\omega$  em um cálculo até dois “loops”. Devemos ainda derivar uma equação do GR para  $Z$ . Colocando  $\omega dZ/d\omega$  nessa ordem de aproximação chega-se ao resultado desejado:

$$\frac{\omega}{Z} \frac{dZ}{d\omega} \cong \frac{[g_{1R}^2 + g_{2R}^2 - g_{1R}g_{2R}]}{4\pi^2 v_F^2} = \gamma \quad (3.30)$$

ou ainda,

$$\omega \frac{dZ(\omega)}{d\omega} = \gamma Z(\omega) \quad (3.31)$$

onde:

$$\gamma = \frac{[g_{1R}^2 + g_{2R}^2 - g_{1R}g_{2R}]}{4\pi^2 v_F^2} \quad (3.32)$$

é a conhecida dimensão anômala[52, 53]. Assim, derivamos uma equação do GR para o peso  $Z$  da quasipartícula que constitui efetivamente a dependência de  $Z$  com a escala de renormalização  $\omega$ . O fator gama geralmente é chamado de dimensão anômala devido ao fato de que em um regime de pontos fixos o peso de quasipartículas,  $Z \sim \omega^{\gamma^*}$ , introduz uma dimensão extra às funções de Green renormalizadas. Isso caracteriza o desaparecimento das quasipartículas quando  $\gamma^* \neq 0$ .

Uma vez que calculamos  $Z$  e sua respectiva equação do GR podemos, então, derivar uma equação do GR para os acoplamentos renormalizados. Usando a equação (3.7) podemos escrever:

$$\Gamma_{iR}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1R}, g_{2R}, p_0) = Z^2 \Gamma_{iB}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1B}, g_{2B}, p_0) \quad (3.33)$$

com  $i = 1, 2$ . No capítulo anterior mostramos apenas os diagramas que contribuem com  $O(\ln)$ , pois são esses diagramas que realmente importam, como veremos a seguir.

Para visualizar isso, devemos calcular todos os diagramas das figuras 2.6 e 2.7 juntamente com os diagramas das figuras 3.4 e 3.5. Após vários cancelamentos mútuos, e considerando esta última equação chegamos aos seguintes resultados<sup>2</sup>:

---

<sup>2</sup>Devemos sempre manter em mente que devemos ter de um lado grandezas renormalizadas e do outro apenas grandezas “nuas”.

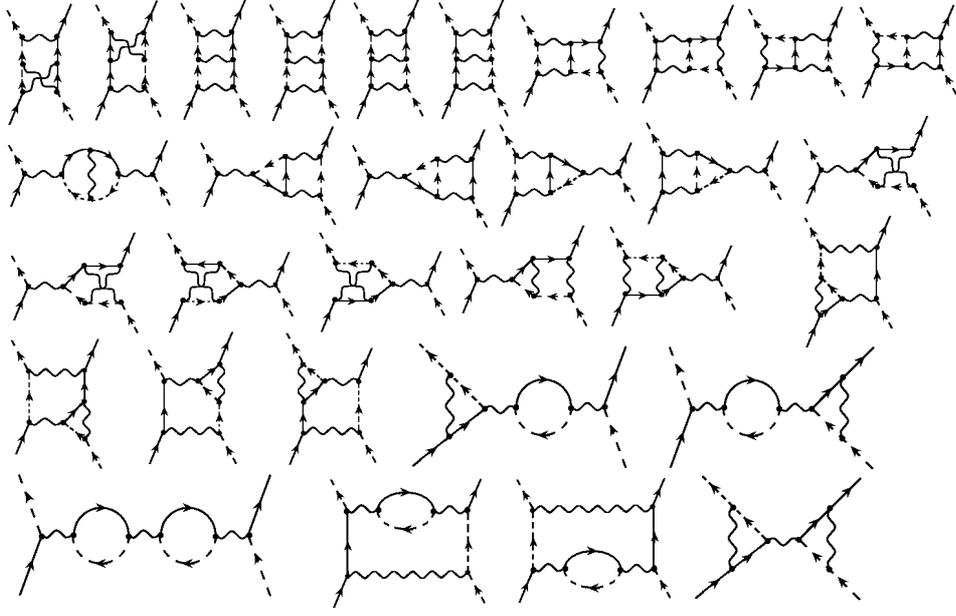


Figura 3.4: Diagramas de  $O(\ln^2)$  para o canal  $\Gamma_{1B}^{(4)}$ .

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{1R}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; g_{1R}, g_{2R}, p_0) &= \left(1 - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right)^2 \left[ g_{1B} - \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) + \frac{g_{1B}^3}{\pi^2 v_F^2} \ln^2\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) + \dots \right] \\
i\Gamma_{2R}^{(4)}(\{p_i\} = \pm k_F; g_{1R}, g_{2R}, p_0) &= \left(1 - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right)^2 \left[ g_{2B} - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) - \frac{(g_{1B}^3 - 2g_{2B}^3)}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) + \frac{g_{1B}^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln^2\left(\frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F}\right) + \dots \right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Se mantivermos apenas termos de  $O(g_{iB}^3)$  e usarmos as prescrições (3.17) poderemos escrever:

$$\begin{aligned}
g_{1R} = & \quad g_{1B} - \frac{g_{1B}^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{g_{1B}^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& \quad + \frac{[g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2]}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1B}^3}{\pi^2 v_F^2} \ln^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots
\end{aligned}$$

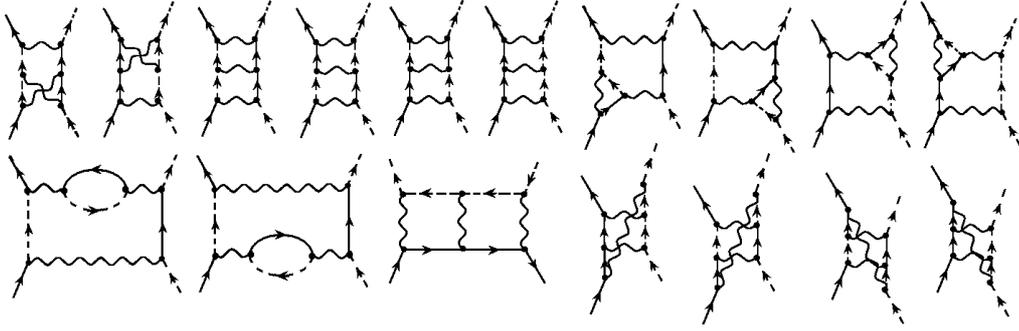


Figura 3.5: Diagramas de  $O(\ln^2)$  para o canal  $\Gamma_{2B}^{(4)}$ .

$$\begin{aligned}
g_{2R} = & g_{2B} - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{g_{1B}^3}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 g_{2B} - g_{1B} g_{2B}^2) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& + \frac{g_{2B}^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{2B} g_{1B}^2 + g_{2B}^3 - g_{1B} g_{2B}^2]}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1B}^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Similarmente ao que fizemos no cálculo em um “loop”, se colocarmos  $g_{1B}$  e  $g_{2B}$  em evidência nas respectivas equações e invertermos as equações chegaremos aos resultados:

$$\begin{aligned}
g_{1B} = & g_{1R} \left( 1 - \frac{g_{1B}}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{g_{1B}^2}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B} g_{2B} - g_{2B}^2) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \right. \\
& \left. + \frac{[g_{1B} g_{2B} - g_{2B}^2]}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1B}^2}{\pi^2 v_F^2} \ln^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)^{-1} \\
g_{2B} = & g_{2R} \left( 1 - \frac{g_{1B}^2}{2\pi v_F g_{2B}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{g_{1B}^3}{4\pi^2 v_F^2 g_{2B}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1B}^2 - g_{1B} g_{2B}) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \right. \\
& \left. + \frac{g_{2B}^2}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B} g_{2B}]}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1B}^3}{2\pi^2 v_F^2 g_{2B}} \ln^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Agora, podemos usar a expansão de um “loop” para os parâmetros “nus” (3.18) que, após alguns cancelamentos, nos leva às seguintes equações:

$$g_{1B} = g_{1R} + \frac{g_{1R}^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1R}^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$$

$$g_{2B} = g_{2R} + \frac{g_{1R}^2}{2\pi v_F} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{g_{1R}^3}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \quad (3.37)$$

onde expandimos a função inversa dos acoplamentos mantendo a coerência na ordem de teoria de perturbação. Ao usarmos a expansão (3.18) os termos em  $\ln^2$  são cancelados exatamente provando, efetivamente, que nossa teoria é renormalizável<sup>3</sup>. Derivando em relação à  $\omega$  (lembrando que as grandezas “nuas” não dependem da escala de energia), chegaremos às seguintes equações do GR para os acoplamentos renormalizados:

$$\begin{aligned} \omega \frac{dg_{1R}}{d\omega} &= \frac{g_{1R}^2}{\pi v_F} + \frac{g_{1R}^3}{2\pi^2 v_F^2} \\ \omega \frac{dg_{2R}}{d\omega} &= \frac{g_{1R}^2}{2\pi v_F} + \frac{g_{1R}^3}{4\pi^2 v_F^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Note que essas equações satisfazem a condição  $d(g_{1R} - 2g_{2R})/d\omega = 0$ , como esperado.

Assim, a quantidade  $g_{1R} - 2g_{2R}$  continua sendo um invariante exato.

### 3.3 Caso 2D

Em duas dimensões, vimos que os acoplamentos dependem dos momentos ao longo da SF. Nosso caso de interesse é o cálculo de dois “loops” com a SF da figura 2.3, porque, como vimos, é a partir dessa ordem de perturbação que a amplitude de quasipartículas passa a ser não-trivial. A sistemática do GR é exatamente a mesma descrita na seção anterior, com uma diferença peculiar que é a integração dos acoplamentos em relação aos momentos paralelos.

Assim, não é necessário repetir todas as discussões feitas na seção anterior<sup>4</sup>. Contudo, em duas

---

<sup>3</sup>Como resultado iremos, de agora em diante, apenas efetuar cálculos de diagramas que contribuem com termos em  $\ln(\Omega/\omega)$ .

<sup>4</sup>O caso 2D parece ser uma generalização do caso unidimensional. Entretanto, é preciso tomar cuidado com essa linha de raciocínio. Com efeito, poderíamos ser levados a pensar que os processos no caso 2D são como os processos no caso unidimensional correspondendo-se ponto a ponto na SF dando um caráter quasi-unidimensional. Contudo, não é bem isso o que acontece e vários processos envolvendo pontos de regiões diferentes da SF podem ocorrer caracterizando um processo efetivamente bidimensional como veremos mais adiante na análise de resultados.

dimensões as prescrições são feitas de forma a que fixemos as componentes perpendiculares dos momentos externos na SF. Conseqüentemente a prescrição (3.13) se torna:

$$i\Gamma_R^{(2)}(p_{\parallel}, p_{\perp} = k_F; g_{1R}, g_{2R}, p_0 - \epsilon_F = \omega) = \omega \quad (3.39)$$

e, portanto, a componente do momento ao longo da SF não é fixada pela condição de renormalização.

Essa dimensão extra, em relação ao caso unidimensional, passa também a ser levada em conta nas integrações dos momentos internos de todos os diagramas de Feynman. Em decorrência, todos os diagramas serão funções de momentos paralelos. No Apêndice C mostramos explicitamente como levar em consideração a dependência dos acoplamentos com relação aos momentos paralelos tanto para a auto-energia quanto para as funções irreduzíveis de duas partículas.

Seguindo essa sistemática para a equação da auto-energia (2.49) e considerando a prescrição (3.39) podemos chegar à seguinte equação para  $Z$ , que generaliza para o caso bidimensional nosso resultado encontrado na equação (3.31):

$$\begin{aligned} Z(p_{\parallel}; \omega) = & 1 - \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \int_{\mathcal{D}} dk_{\parallel} dq_{1\parallel} \left[ 2g_{1R}(-k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, k_{\parallel}, q_{1\parallel})g_{1R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}) \right. \\ & + 2g_{2R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel})g_{2R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) - g_{1R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}) \\ & \times g_{2R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) - g_{2R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}) \\ & \left. \times g_{1R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, p_{\parallel}) \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mais uma vez, dentro do mesmo limite de aproximação, o peso  $Z$  da quasipartícula obedece uma equação do GR do tipo:

$$\omega \frac{dZ(p_{\parallel}; \omega)}{d\omega} = \gamma(p_{\parallel})Z(p_{\parallel}; \omega) \quad (3.41)$$

onde a dimensão anômala  $\gamma$  é agora mais complexa e dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma(p_{\parallel}) = & \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \int_{\mathcal{D}} dk_{\parallel} dq_{1\parallel} \left[ 2g_{1R}(-k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, k_{\parallel}, q_{1\parallel})g_{1R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}) \right. \\
& + 2g_{2R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel})g_{2R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) - g_{1R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}) \\
& \left. \times g_{2R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, q_{1\parallel}) - g_{2R}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel})g_{1R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, p_{\parallel}) \right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde  $\mathcal{D}$  pode ser encontrado no Apêndice G. Suprimimos a dependência dos  $g_{iR}$ 's com a escala de energia  $\omega$  para não sobrecarregarmos a notação. Dessa forma, vamos suprimir qualquer explicitação da dependência dos parâmetros renormalizados com a escala de energia  $\omega$ , a não ser quando estritamente necessário, pois sabemos de antemão que qualquer parâmetro renormalizado depende da escala de energia  $\omega$ .

Uma vez que temos  $Z(p_{\parallel}; \omega)$ , podemos derivar em seguida as equações do GR para os acoplamentos renormalizados. Para tanto, devemos primeiramente reescrever a equação (3.7), pois a dependência dos acoplamentos renormalizados com os momentos ao longo da SF faz surgir a necessidade de escrever um peso de quasipartículas para cada momento externo, ou seja:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{iR}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1R}, g_{2R}, p_0) = & Z^{1/2}(p_{1\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{2\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{3\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{4\parallel}; \omega) \\
& \times \Gamma_{iB}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1B}, g_{2B}, p_0)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Usando a equação (3.42), podemos reescrever a equação (3.40) da seguinte forma:

$$Z(p_{\parallel}; \omega) = 1 - \gamma(p_{\parallel}) \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) \tag{3.44}$$

Assim, podemos usar a seguinte expansão:

$$Z^{1/2}(p_{\parallel}; \omega) = 1 - \frac{\gamma(p_{\parallel})}{2} \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) \tag{3.45}$$

em que usamos o fato de que temos que manter a coerência na ordem de teoria de perturbação  $O(g_i^2)$ . Dessa forma, podemos escrever:

$$Z^{1/2}(p_{1\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{2\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{3\parallel}; \omega) Z^{1/2}(p_{4\parallel}; \omega) = 1 - \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma(p_{i\parallel})}{2} \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) \quad (3.46)$$

e a equação (3.43) se reduz a:

$$\Gamma_{iR}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1R}, g_{2R}, p_0) = \left( 1 - \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma(p_{i\parallel})}{2} \ln \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) \right) \Gamma_{iB}^{(4)}(\{p_i\}; g_{1B}, g_{2B}, p_0) \quad (3.47)$$

com  $i = 1, 2$ . Além disso, devemos fazer novas prescrições para as funções irreduzíveis  $\Gamma_{1R}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2R}^{(4)}$  tais que na SF tenhamos:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{1R}^{(4)}(\{p_{i\parallel}\}, p_{1\perp} = k_F, p_{2\perp} = -k_F, p_{3\perp} = k_F, p_{4\perp} = -k_F; p_0 - \epsilon_F = \omega) &= g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \\ i\Gamma_{2R}^{(4)}(\{p_{i\parallel}\}, p_{1\perp} = k_F, p_{2\perp} = -k_F, p_{3\perp} = -k_F, p_{4\perp} = k_F; p_0 - \epsilon_F = \omega) &= g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aplicando a sistemática do GR apresentada no caso unidimensional em dois “loops”, e com o auxílio das equações (2.50) e (2.51), é possível chegarmos às seguintes equações do GR para os acoplamentos:

$$\begin{aligned} \omega \frac{dg_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})}{d\omega} &= \frac{1}{4\pi^2 v_F} \left\{ \int_{\mathcal{D}_1} dk_{\parallel} [g_1(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel}) \right. \\ &\times g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) + g_{2R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})] \\ &+ \int_{\mathcal{D}_2} dk_{\parallel} \left[ 2g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, k_{\parallel}) g_{1R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) - g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, k_{\parallel}) \right. \\ &\times g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}) - g_{1R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel} - p_{3\parallel} + k_{\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) \left. \right] \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \left\{ \int_{\mathcal{D}_7} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_{1R}(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}) \right. \right. \\ &\times g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}) + g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel}, p_{3\parallel}) g_{1R}(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \\ &\times g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}) - 2g_{1R}(k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}) \\ &\left. \left. \times g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel}) \right] + \int_{\mathcal{D}_8} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_{2R}(q_{\parallel}, k_{\parallel}, p_{4\parallel}) g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel}) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times g_{1R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) + g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel})g_{1R}(q_{\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}) \\
& \times g_{2R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}) - 2g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel})g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}, p_{3\parallel}) \\
& \times g_{2R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel}) \Big] \Big\} + g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma(p_{i\parallel})}{2} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

e, de forma análoga, chegamos à seguinte equação para  $g_{2R}$ :

$$\begin{aligned}
\omega \frac{dg_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})}{d\omega} &= \frac{1}{4\pi^2 v_F} \left\{ \int_{\mathcal{D}_1} dk_{\parallel} \left[ g_{2R}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel}) \right. \right. \\
& \times g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) + g_{1R}(k_{\parallel}, -k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel})g_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \Big] \\
& - \int_{\mathcal{D}_3} dk_{\parallel} \left[ g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{3\parallel} - p_{1\parallel} + k_{\parallel}, p_{3\parallel})g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel} - p_{1\parallel} + k_{\parallel}) \right] \Big\} \\
& + \frac{1}{32\pi^4 v_F^2} \left\{ \int_{\mathcal{D}_5} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel})g_{1R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}) \right. \right. \\
& \times g_{1R}(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel}) - 2g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel})g_{1R}(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel}) \\
& \times g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) + g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_{1R}(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, p_{4\parallel})g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, q_{\parallel}) \\
& + g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_{2R}(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel})g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, k_{\parallel}) \\
& \left. \left. - 2g_{2R}(k_{\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})g_{2R}(k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel}, q_{\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel})g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel}, q_{\parallel}) \right] \right. \\
& + \int_{\mathcal{D}_6} dk_{\parallel} dq_{\parallel} \left[ g_{1R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, p_{4\parallel})g_{1R}(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_{1R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) \right. \\
& - 2g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_{1R}(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_{1R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel}) \\
& + g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_{1R}(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel})g_{2R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \\
& + g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_{1R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, q_{\parallel})g_{2R}(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \\
& \left. \left. - 2g_{2R}(p_{1\parallel}, k_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel})g_{2R}(k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})g_{2R}(q_{\parallel}, k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \right] \right\} \\
& + g_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel}) \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma(p_{i\parallel})}{2} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

onde a dimensão anômala  $\gamma$  é dada pela equação (3.42). É impossível resolver essas últimas equações analiticamente, pois são equações integro-diferenciais. Mais adiante, recorreremos a técnicas numéricas. Além disso,  $g_{1R} - 2g_{2R}$  não é mais um diferencial exato, o que é importante para chegarmos à equação do GR para o peso  $Z$  da quasipartícula. Entretanto, uma vez

que os diagramas da auto-energia que geram esse termo não são logaritmicamente divergentes, assumiremos que essa quantidade não contribui significativamente para a renormalização de  $Z$ , e pode ser desprezada. Quando obtivermos para os resultados numéricos, veremos que essa é uma boa aproximação.

# Capítulo 4

## Suscetibilidades

Nesse capítulo, introduziremos as funções respostas que originam as respectivas suscetibilidades estudadas em nosso modelo. Em uma dimensão, exploraremos algumas simetrias com relação às projeções de “spin” para definirmos funções resposta do tipo onda de densidade de carga, *ODC*, onda de densidade de “spin”, *ODS*, supercondutividade do tipo singleto, *SCS* e, finalmente, supercondutividade do tipo tripleto, *SCT*. Em nosso caso bidimensional, surge mais uma simetria intrínseca de nosso modelo que, por sua vez, nos permite definir funções resposta simetrizadas com relação ao sinal dos momentos paralelos como onda de densidade de spin dos tipos s e d ( $ODS_{\pm}$ ), onda de densidade de carga dos tipos s e d ( $ODC_{\pm}$ ), supercondutividade do tipo singleto s e d ( $SCS_{\pm}$ ) e supercondutividade do tipo tripleto s e d ( $SCT_{\pm}$ ). Vamos, ainda, calcular os diagramas referentes a cada simetria até um “loop”. Como veremos, não há necessidade de ir além disso, pois os diagramas gerariam contribuições de ordem superior que são cancelados por contratermos apropriados. Novamente, vamos fazer toda a renormalização em uma dimensão para, então, mais uma vez, generalizarmos nossos resultados para o caso em duas dimensões.

## 4.1 Fontes Geradoras das Simetrias

Nos últimos dois capítulos, calculamos grandezas físicas pertinentes ao nosso modelo microscópico que apresentam singularidades logarítmicas à medida que nos aproximamos da SF. Para lidar com tais singularidades, adicionamos contratermos ao Lagrangiano para que, dessa forma, a teoria se torne finita. Empregamos a sistemática do GR para derivarmos as respectivas equações do GR para os acoplamentos tanto em uma quanto em duas dimensões. Antes de irmos adiante com a renormalização das funções resposta e as respectivas suscetibilidades devemos, primeiramente, gerar todas as simetrias pertinentes ao nosso modelo, adicionando ao Lagrangiano dois campos externos fictícios,  $h_{sc}$  (para o termo de emparelhamento superconductor) e  $h_{od}$  (para onda de densidade), que atuam essencialmente como fontes para a geração dos pares de partícula-partícula e partícula-buraco. Para tanto, nós definimos:

$$L_{ext}(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt' [h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') + h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t') + c.c.]. \quad (4.1)$$

que, por sua vez, deve ser adicionado ao nosso modelo de Lagrangiano.

No capítulo 2, vimos que pares de operadores  $\psi_{(+)}$  e  $\psi_{(-)}$  geram contribuições logarítmicas. No caso das funções resposta, os diagramas gerados também apresentam singularidades logarítmicas e, portanto, devemos adicionar contratermos para regularizar a teoria. Dessa forma, temos:

$$L_{ext}^R(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt' [h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') + h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t') + c.c.] + \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt' [E h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') + F h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t') + c.c.]. \quad (4.2)$$

Usando a relação (3.5) segue-se, outra vez, que:

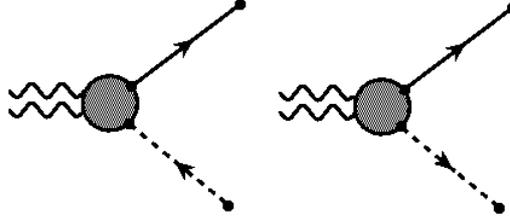


Figura 4.1: Representação diagramática das funções de Green  $G_{SC}^{(2,1)}$  e  $G_{OD}^{(2,1)}$ .

$$\psi_{B(a)\sigma} = Z^{1/2} \psi_{(a)\sigma} \quad (4.3)$$

Identificando-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} &= Z^{-1/2} Z^{-1/2} (1 + E) \mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta} = Z^{-1/2} Z^{-1/2} Z_{SC}^{-1} \mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta} \\ \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} &= Z^{-1/2} Z^{-1/2} (1 + F) \mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta} = Z^{-1/2} Z^{-1/2} Z_{OD}^{-1} \mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

podemos, então, escrever:

$$\begin{aligned} L_{ext}^R(t) &= \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt' [h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{B(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{B(-)\beta}^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') \\ &\quad + h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{B(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{B(-)\beta}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') + c.c.]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde os termos  $\mathcal{T}_i^{B\alpha\beta}$  ( $i = SC, OD$ ) são os chamados fatores de forma que definem as simetrias já mencionadas na introdução deste capítulo. Incorporando essas simetrias, podemos definir as funções de Green relativas às funções resposta ( $G_i^{(2,1)}$ 's com  $i = SC, OD$ ). Para tanto, vamos escrever:

$$iG_{BOD\alpha\beta}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}; t, t', t'') = \left. \frac{\delta^3 W}{\delta h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t'') \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}', t') \delta \bar{\eta}_{\sigma'}(\mathbf{p}, t)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=h_{SC}^{\alpha\beta}=h_{OD}^{\alpha\beta}=0} \quad (4.6)$$

e

$$iG_{BSC\alpha\beta}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}; t, t', t'') = \left. \frac{\delta^3 W}{\delta h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t'') \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}', t') \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}, t)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=j=\bar{j}=h_{SC}^{\alpha\beta}=h_{OD}^{\alpha\beta}=0} \quad (4.7)$$

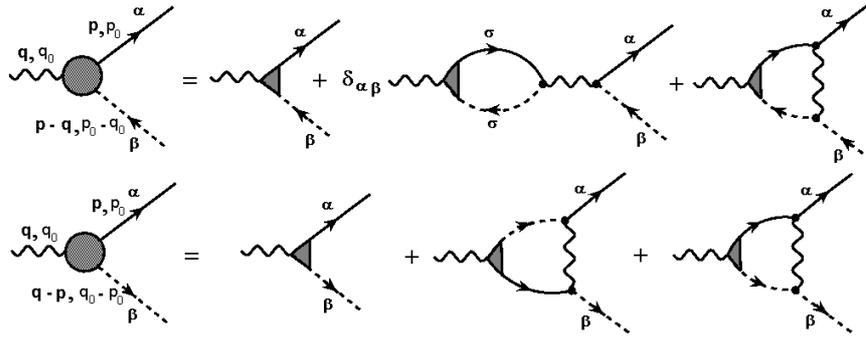


Figura 4.2: Diagramas até um “loop” para  $\Gamma_{BSC}^{(2,1)}$  e  $\Gamma_{BOD}^{(2,1)}$ .

No Apêndice F, nós demonstramos a relação entre as funções irreduzíveis  $\Gamma_i^{(2,1)}$  com  $i = SC, OD$  e suas respectivas funções de Green. Assim, fazendo uso das relações (F.14) e (F.15), nós podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 -iG_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; t, t_1, t_2) &= \int \int \int_{\mathbf{q}, \bar{t}, \mathbf{p}', t', \mathbf{p}'', t''} iD_{\delta\gamma}^{OD}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) \Gamma_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') \\
 &\times iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1; t' - t_2) iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'')
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

e

$$\begin{aligned}
 -iG_{SC\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; t, t_1, t_2) &= \int \int \int_{\mathbf{q}, \bar{t}, \mathbf{p}', t', \mathbf{p}'', t''} iD_{\delta\gamma}^{SC}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) \Gamma_{SC\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') \\
 &\times iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'; t_2 - t') iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'')
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde  $D_{\delta\gamma}^i$  com  $i = SC, OD$  são os propagadores de convolução do tipo supercondutor e onda de densidade e os  $G_{\pm}$  os propagadores de partícula. Na figura 4.1, mostramos a representação diagramática dessas duas últimas expressões. No Apêndice F encontra-se, também, a definição algébrica dos propagadores de convolução,  $D_{\delta\gamma}^i$ . Dessa forma, podemos usar a teoria de perturbação para gerar os diagramas da figura 4.2 até um “loop”, pois em dois “loops” há apenas contribuições<sup>1</sup> do tipo  $O(\ln^2)$  que se cancelam mutuamente. Para simplificarmos nossos cálculos,

<sup>1</sup>Apesar de estarmos indo apenas até um “loop” nas funções resposta o que determinará a ordem de perturbação será as equações do GR para os acoplamentos.

usamos a conservação dos momentos para modificarmos a disposição dos momentos externos nesses diagramas. Além disso, ao escrevermos as equações (4.4) poderemos definir duas funções irreduzíveis,  $\Gamma_i^{B(2,1)}$  e  $\Gamma_i^{R(2,1)}$  com  $i = SC, OD$ , que estão relacionadas através das equações a seguir:

$$\begin{aligned}\Gamma_{SC\alpha\beta}^{B(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; q_0, p_0) &= Z^{-1/2}(\mathbf{p}, \omega) Z^{-1/2}(\mathbf{q} - \mathbf{p}; \omega) Z_{SC}^{-1}(\mathbf{q}; \omega) \Gamma_{SC\alpha\beta}^{R(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \omega, \epsilon) \\ \Gamma_{OD\alpha\beta}^{B(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; q_0, p_0) &= Z^{-1/2}(\mathbf{p}, \omega) Z^{-1/2}(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \omega) Z_{OD}^{-1}(\mathbf{q}; \omega) \Gamma_{OD\alpha\beta}^{R(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \omega, \epsilon)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Nosso objetivo é obter as suscetibilidades. Vamos iniciar nossa discussão apresentando o que acontece, inicialmente, em uma dimensão. Podemos, então, partir para os cálculos e a obtenção das equações do GR para as suscetibilidades em uma dimensão como se segue. Os resultados encontrados serão generalizados em seguida, para o caso bidimensional.

## 4.2 Cálculo das funções resposta e das suscetibilidades no caso 1D até dois “loops”

Vamos, agora, seguir com a sistemática do GR para o caso em que  $d = 1$ . Se calcularmos os diagramas da figura 4.2 para o caso unidimensional obtemos<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}\Gamma_{OD\alpha\beta}^{(2,1)B} &= -i\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} + i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} \right] \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \\ \Gamma_{SC\alpha\beta}^{(2,1)B} &= -i\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} + i \left[ \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}}{2\pi v_F} \right] \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) + \dots\end{aligned}\tag{4.11}$$

onde fixamos todos os momentos externos tais que,  $q = 2k_F, p = k_F$ , para a simetria do tipo  $OD$ , e,  $q = 0, p = k_F$ , para a simetria do tipo  $SC$ . Para chegarmos às equações do GR devemos fazer a seguinte prescrição<sup>3</sup>:

<sup>2</sup>Novamente usamos o fato da parte imaginária dos logaritmos não contribuir com divergências e, portanto, devemos manter somente a parte real.

<sup>3</sup>Para evitar sobrecarga da notação vamos, a partir de agora, omitir toda a dependência dos parâmetros renormalizados com a escala de energia, pois devemos ter em mente sempre que as grandezas renormalizadas dependem sempre da escala de energia  $\omega$ .

$$\begin{aligned}
\Gamma_{OD\alpha\beta}^{R(2,1)}(q = 2k_F, p = k_F; q_0 - \epsilon_F = \omega, p_0 = \epsilon) &= -i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} \\
\Gamma_{SC\alpha\beta}^{R(2,1)}(q = 0, p = k_F; q_0 - \epsilon_F = \omega, p_0 = \epsilon) &= -i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

As grandezas “nuas” estão relacionadas com as grandezas renormalizadas por meio das relações (4.10). Assim, usando as prescrições acima bem como as relações (4.10) poderemos escrever:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} &= Z^{1/2} Z^{1/2} Z_{OD} \Gamma_{OD\alpha\beta}^{(2,1)B} \\
-i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} &= Z^{1/2} Z^{1/2} Z_{SC} \Gamma_{SC\alpha\beta}^{(2,1)B}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

mas, no capítulo 3, já realizamos os cálculos para a determinação de  $Z$ . Assim, da equação (3.29) e das equações (4.11) poderemos escrever:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} &= Z_{OD} \left( 1 - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right) \\
&\times \left( -i\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} + i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right) \\
-i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} &= Z_{SC} \left( 1 - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right) \\
&\times \left( -i\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} + i \left[ \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

No capítulo anterior, vimos que o peso  $Z$  da quasipartícula renormaliza os acoplamentos e possui uma forma do tipo  $Z = 1 + O(g_i^2)$ . Analogamente, a constante de renormalização dos fatores de forma  $Z_{OD(SC)}$  devem ter, no mínimo, uma forma do tipo  $1 + O(\mathcal{T}_{OD(SC)})$ . Claramente, se  $Z_{OD}$  e  $Z_{SC}$  forem diferentes de 1 teremos contribuições do tipo  $O(\mathcal{T}_{OD}^2)$  e  $O(\mathcal{T}_{SC}^2)$ . Portanto, nessa ordem de teoria de perturbação,  $Z_{OD} = Z_{SC} = 1$  e:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} - \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} + \dots \\
\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} - \left[ \frac{g_{2B}\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} + \dots
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} \left\{ - \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1B}\mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2B}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right\} \\ \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} \left\{ - \left[ \frac{g_{2B}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1B}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{[g_{1B}^2 + g_{2B}^2 - g_{1B}g_{2B}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \right\}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Novamente, como fizemos no capítulo anterior, se invertermos essa equação, usando tanto a equação (4.15) como as expansões dos acoplamentos “nus” dadas em (3.18), chegamos às seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} + \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{OD}^{R\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{[g_{1R}^2 + g_{2R}^2 - g_{1R}g_{2R}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} + \dots \\ \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} + \left[ \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{SC}^{R\beta\alpha}}{2\pi v_F} \right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{[g_{1R}^2 + g_{2R}^2 - g_{1R}g_{2R}]}{4\pi^2 v_F^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta} + \dots\end{aligned}\quad (4.17)$$

Derivando ambos os lados destas equações com relação a  $\omega$  em uma ordem  $O(g_{iR})$  podemos escrever:

$$\begin{aligned}0 &= \omega \frac{d\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}}{d\omega} - \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{OD}^{R\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} \right] - \gamma \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} \\ 0 &= \omega \frac{d\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}}{d\omega} - \left[ \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{SC}^{R\beta\alpha}}{2\pi v_F} \right] - \gamma \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde levamos em consideração a independência das grandezas “nuas” em relação à escala de energia  $\omega$ . A dimensão anômala,  $\gamma$ , é extraída diretamente da equação (3.32). Assim, chegamos às equações do GR para as funções resposta de simetria  $OD$  e  $SC$ :

$$\begin{aligned}\omega \frac{d\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}}{d\omega} &= \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{OD}^{R\sigma\sigma}}{2\pi v_F} - \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} + \gamma \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta} \\ \omega \frac{d\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}}{d\omega} &= \frac{g_{2R}\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}}{2\pi v_F} - \frac{g_{1R}\mathcal{T}_{SC}^{R\beta\alpha}}{2\pi v_F} + \gamma \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Uma vez de posse das equações do GR para as funções resposta podemos explorar as suas simetrias referentes às projeções de “spin”. Se definirmos:

$$\mathcal{T}_{ODC}^R = \mathcal{T}_{OD}^{R\uparrow\uparrow} + \mathcal{T}_{OD}^{R\downarrow\downarrow} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{T}_{ODS}^R = \mathcal{T}_{OD}^{R\uparrow\uparrow} - \mathcal{T}_{OD}^{R\downarrow\downarrow} \quad (4.21)$$

$$\mathcal{T}_{SCS}^R = \mathcal{T}_{SC}^{R\uparrow\downarrow} - \mathcal{T}_{SC}^{R\downarrow\uparrow} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{T}_{SCT}^R = \mathcal{T}_{SC}^{R\uparrow\downarrow} + \mathcal{T}_{SC}^{R\downarrow\uparrow} \quad (4.23)$$

onde *ODC*, *ODS*, *SCS* e *SCT* significam onda de densidade de carga, onda de densidade de “spin”, supercondutividade do tipo singleto e supercondutividade do tipo tripleto respectivamente. A simetria do tipo *ODC*, como o próprio nome sugere, é uma oscilação coletiva de carga e tem sido medida para vários sistemas. Como exemplo, podemos citar os supercondutores orgânicos quasi-unidimensionais tanto na fase isolante quanto na fase supercondutora. A simetria do tipo *ODS* é uma oscilação coletiva de “spins” e é encontrada, por exemplo, em sistemas com flutuações antiferromagnéticas de “spin”, como o Cr. A supercondutividade do tipo *SCS* representa um estado supercondutor cuja soma total de “spins” dos pares de partículas é nula. Por último, temos a supercondutividade do tipo *SCT* que é um estado supercondutor com um par de Cooper de “spin” total igual a um. Nesse caso, pode haver a coexistência entre as fases supercondutora e ferromagnética.

Não é difícil ver que teremos quatro equações do GR para essas simetrias a partir das equações do GR (4.19):

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{ODC}^R}{d\omega} = \frac{2g_{1R} - g_{2R}}{2\pi v_F} \mathcal{T}_{ODC}^R + \gamma \mathcal{T}_{ODC}^R \quad (4.24)$$

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{ODS}^R}{d\omega} = \frac{-g_{2R}}{2\pi v_F} \mathcal{T}_{ODS}^R + \gamma \mathcal{T}_{ODS}^R \quad (4.25)$$

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{SCS}^R}{d\omega} = \frac{g_{1R} + g_{2R}}{2\pi v_F} \mathcal{T}_{SCS}^R + \gamma \mathcal{T}_{SCS}^R \quad (4.26)$$

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{SCT}^R}{d\omega} = \frac{g_{2R} - g_{1R}}{2\pi v_F} \mathcal{T}_{SCT}^R + \gamma \mathcal{T}_{SCT}^R \quad (4.27)$$

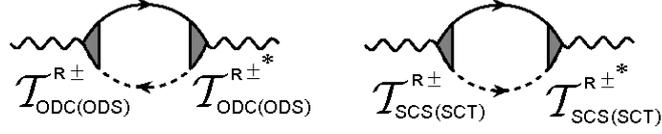


Figura 4.3: Diagramas para o cálculo das suscetibilidades.

Entretanto, estamos interessados no cálculo das suscetibilidades. Para tanto, devemos olhar para a figura 4.3 na qual vemos que as suscetibilidades são calculadas diretamente a partir das funções resposta. Em nosso caso, todas as funções respostas são reais. Entretanto, se fossemos considerar processos do tipo *Umklapp* teríamos que considerar, também, as contribuições da parte imaginária das funções resposta. Portanto, escolhemos, aqui, a definição na forma mais geral possível. Note que há uma “bolha” partícula-buraco e uma “bolha” partícula-partícula, respectivamente, que, por sua vez, produzem divergências logarítmicas como vimos na seção 2.2.2. Se calcularmos tais diagramas chegaremos às seguintes equações:

$$\chi_{ODC}^R = -\frac{1}{2\pi v_F} (\mathcal{T}_{ODC}^R)^2 \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) \quad (4.28)$$

$$\chi_{ODS}^R = -\frac{1}{2\pi v_F} (\mathcal{T}_{ODS}^R)^2 \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) \quad (4.29)$$

$$\chi_{SCS}^R = -\frac{1}{2\pi v_F} (\mathcal{T}_{SCS}^R)^2 \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) \quad (4.30)$$

$$\chi_{SCT}^R = -\frac{1}{2\pi v_F} (\mathcal{T}_{SCT}^R)^2 \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) \quad (4.31)$$

Dessa forma, as suscetibilidades também apresentam singularidades logarítmicas. Note que as suscetibilidades já foram calculadas com todos os parâmetros renormalizados. Para contornarmos a presença dessas singularidades, derivamos uma equação do GR para as suscetibilidades. Assim, se fizermos  $q_0 - \epsilon_F = \omega$ , é suficiente derivarmos as equações (4.28-4.31) em relação a  $\omega$  para obtermos:

$$\omega \frac{d\chi_{ODC}^R}{d\omega} = \frac{1}{2\pi v_F} (\mathcal{T}_{ODC}^R)^2 \quad (4.32)$$

$$\omega \frac{d\chi_{ODS}^R}{d\omega} = \frac{1}{2\pi v_F} \left( \mathcal{T}_{ODS}^R \right)^2 \quad (4.33)$$

$$\omega \frac{d\chi_{SCS}^R}{d\omega} = \frac{1}{2\pi v_F} \left( \mathcal{T}_{SCS}^R \right)^2 \quad (4.34)$$

$$\omega \frac{d\chi_{SCT}^R}{d\omega} = \frac{1}{2\pi v_F} \left( \mathcal{T}_{SCT}^R \right)^2 \quad (4.35)$$

que são as equações do GR para as suscetibilidades. A resolução destas equações, seguindo o exemplo do que fizemos com as outras equações do GR para os acoplamentos, é feita numericamente. Seus resultados serão apresentados em detalhe no próximo capítulo. Podemos, então, prosseguir para os cálculos em duas dimensões que é nosso caso de maior interesse.

### 4.3 Cálculo das funções resposta e das suscetibilidades no caso 2D até dois “loops”

Temos visto, nos últimos capítulos, que o problema análogo em duas dimensões necessariamente faz os acoplamentos dependerem dos momentos ao longo da SF. Assim, as funções resposta, que estão relacionadas diretamente com os fatores de forma, também dependerão das projeções dos momentos ao longo da SF. Desse modo, se calcularmos os diagramas da figura 4.2 em  $d = 2$ , as equações (4.11) são reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Gamma_{OD\alpha\beta}^{(2,1)B}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & -i\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} g_{1B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right. \\ & \left. - g_{2B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right] \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{SC\alpha\beta}^{(2,1)B}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & -i\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{2B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right. \\ & \left. - g_{1B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right] \ln \left( \frac{\Omega}{q_0 - \epsilon_F} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde, agora, fixamos todas as componentes perpendiculares dos momentos externos tais que  $q_{\perp} = 2k_F; p_{\perp} = k_F$  para a simetria do tipo  $OD$  e, semelhantemente,  $q_{\perp} = 0; p_{\perp} = k_F$  para a simetria do tipo  $SC$ . Os intervalos de integração  $\mathcal{D}_9$  e  $\mathcal{D}_{10}$  são dados no Apêndice G. Análogo ao caso unidimensional, para chegarmos às equações do GR faremos inicialmente as seguintes

prescrições<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}\Gamma_{OD\alpha\beta}^{R(2,1)}(q_{\perp} = 2k_F, p_{\perp} = k_F; q_0 - \epsilon_F = \omega, p_0 = \epsilon) &= -i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega) \\ \Gamma_{SC\alpha\beta}^{R(2,1)}(q_{\perp} = 0, p_{\perp} = k_F; q_0 - \epsilon_F = \omega, p_0 = \epsilon) &= -i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega)\end{aligned}\quad (4.38)$$

Novamente, as grandezas “nuas” estão relacionadas com as grandezas renormalizadas por meio das relações (4.10). Assim, usando as prescrições acima, bem como as relações (4.10), podemos escrever:

$$\begin{aligned}-i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) &= Z^{1/2}(p_{\parallel}; \omega)Z^{1/2}(p_{\parallel} - q_{\parallel}; \omega)Z_{OD}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega)\Gamma_{OD\alpha\beta}^{(2,1)B}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \\ -i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) &= Z^{1/2}(p_{\parallel}; \omega)Z^{1/2}(q_{\parallel} - p_{\parallel}; \omega)Z_{SC}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega)\Gamma_{SC\alpha\beta}^{(2,1)B}(p_{\parallel}, q_{\parallel})\end{aligned}\quad (4.39)$$

No capítulo anterior, mostramos, através da equação (3.45), que  $Z^{1/2}$  para o caso  $d = 2$  pode ser escrito como:

$$Z^{1/2}(p_{\parallel}; \omega) = 1 - \frac{\gamma(p_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \quad (4.40)$$

Analogamente, temos que, em uma ordem  $O(g_{iR}^2)$ :

$$\begin{aligned}Z^{1/2}(p_{\parallel} - q_{\parallel}; \omega) &= 1 - \frac{\gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \\ Z^{1/2}(q_{\parallel} - p_{\parallel}; \omega) &= 1 - \frac{\gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots\end{aligned}\quad (4.41)$$

onde a dimensão anômala  $\gamma(p_{\parallel})$  é dada pela equação (3.42). Assim, podemos reescrever as equações (4.39) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}-i\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) &= Z_{OD}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega) \left(1 - \frac{\gamma(p_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right) \left(1 - \frac{\gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right) \\ &\times \left(-i\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} g_{1B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right.\right. \\ &\left.\left.- g_{2B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots\right)\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Apesar de termos adicionado uma outra escala de energia ( $\epsilon$ ) as funções resposta não dependem de tal escala, pois esta somente entra nos cálculos para conservar a energia das pernas externas e quando entra nos cálculos sempre se cancela.

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & Z_{SC}(p_{\parallel}, q_{\parallel}; \omega) \left(1 - \frac{\gamma(p_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right) \left(1 - \frac{\gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel})}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right) \\
& \times \left(-i\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[g_{2B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right. \right. \\
& \left. \left. - g_{1B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots\right) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, devemos fazer  $Z_{OD} = Z_{SC} = 1$  nessa ordem de perturbação.

Assim, a equação acima torna-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) - \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} g_{1B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{OD}^{B\sigma\sigma}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right. \\
& \left. - g_{2B}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& - \frac{1}{2} \left(\gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel})\right) \mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \\
\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) - \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[g_{2B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right. \\
& \left. - g_{1B}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{B\beta\alpha}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& - \frac{1}{2} \left(\gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel})\right) \mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Novamente, devemos inverter essa última equação e expandir os parâmetros “nus” em termos dos parâmetros renormalizados. Fazendo isso, encontramos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{OD}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} g_{1R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{OD}^{R\sigma\sigma}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right. \\
& \left. - g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel})\right) \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \\
\mathcal{T}_{SC}^{B\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = & \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right. \\
& \left. - g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel})\mathcal{T}_{SC}^{R\beta\alpha}(k_{\parallel}, q_{\parallel})\right] \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel})\right) \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \dots \quad (4.44)
\end{aligned}$$

onde mantivemos apenas termos de ordem  $O(\ln)$  em concordância com essa ordem de perturbação dos  $g$ 's. Agora, se derivarmos ambos os lados com relação a escala de energia  $\omega$  chegamos às equações do GR para as funções resposta para  $d = 2$ :

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} &= \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} g_{1R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{R\sigma\sigma}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right. \\
&\quad \left. - g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{OD}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \\
\omega \frac{d\mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} &= \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right. \\
&\quad \left. - g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{SC}^{R\beta\alpha}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{SC}^{R\alpha\beta}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Novamente, usamos novamente o fato de que as grandezas “nuas” não dependem da escala de energia  $\omega$ . Uma vez que conhecemos as equações do GR para as simetrias do tipo onda de densidade e supercondutora, podemos explorar as simetrias com relação às projeções de “spin” definindo:

$$\mathcal{T}_{ODC}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{OD}^{R\uparrow\uparrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \mathcal{T}_{OD}^{R\downarrow\downarrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.46}$$

$$\mathcal{T}_{ODS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{OD}^{R\uparrow\uparrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) - \mathcal{T}_{OD}^{R\downarrow\downarrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.47}$$

$$\mathcal{T}_{SCS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SC}^{R\uparrow\downarrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) - \mathcal{T}_{SC}^{R\downarrow\uparrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.48}$$

$$\mathcal{T}_{SCT}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SC}^{R\uparrow\downarrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) + \mathcal{T}_{SC}^{R\downarrow\uparrow}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.49}$$

Obtemos, então, quatro equações do GR para as funções resposta em  $d = 2$ :

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\mathcal{T}_{ODC}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} &= \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[ 2g_{1R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) - g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{ODC}^R(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{ODC}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\mathcal{T}_{ODS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} &= -\frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{ODS}^R(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{ODS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \tag{4.51}
\end{aligned}$$

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{SCS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) + g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{SCS}^R(k_{\parallel}, q_{\parallel})$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{SCS}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\mathcal{T}_{SCT}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = & \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) - g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{SCT}^R(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\ & + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{SCT}^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Devido ao nosso modelo de Lagrangiano juntamente com a forma especial de nossa SF em duas dimensões, os acoplamentos obedecem às simetrias discutidas na seção 2.2.1. Assim, surge um novo tipo de simetria que as equações do GR acima devem obedecer: a simetria com relação à mudança de sinal de  $p_{\parallel}$ . Conseqüentemente, vamos definir novas funções resposta que obedecem essa nova simetria:

$$\mathcal{T}_i^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_i^R(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \pm \mathcal{T}_i^R(-p_{\parallel}, q_{\parallel}) \quad (4.54)$$

onde  $i = ODC, ODS, SCS, SCT$ . Na verdade, essa simetria é análoga à simetria das funções de onda do tipo-s e do tipo-d do átomo de hidrogênio referentes à mudança de sinal dessas funções de onda nos quadrantes no espaço das coordenadas. Assim, vamos nos referir ao sinal + como uma simetria do tipo-s e em relação ao sinal – como uma simetria do tipo-d. Dessa forma, com o auxílio das equações (2.26), chegamos, afinal, às seguintes equações do GR para as funções resposta simetrizadas em  $d = 2$ :

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\mathcal{T}_{ODC}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = & \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} \left[ 2g_{1R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) - g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{ODC}^{R\pm}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\ & + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{ODC}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\mathcal{T}_{ODS}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = & -\frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_9} dk_{\parallel} g_{2R}(k_{\parallel}, p_{\parallel} - q_{\parallel}, p_{\parallel}) \mathcal{T}_{ODS}^{R\pm}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\ & + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(p_{\parallel} - q_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{ODS}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\mathcal{T}_{SCS}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = & \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) + g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{SCS}^{R\pm}(k_{\parallel}, q_{\parallel}) \\ & + \frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{SCS}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\omega \frac{d\mathcal{T}_{SCT}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel})}{d\omega} = \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{10}} dk_{\parallel} \left[ g_{2R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, q_{\parallel} - p_{\parallel}) - g_{1R}(k_{\parallel}, q_{\parallel} - k_{\parallel}, p_{\parallel}) \right] \mathcal{T}_{SCT}^{R\pm}(k_{\parallel}, q_{\parallel})$$

$$+\frac{1}{2} \left( \gamma(p_{\parallel}) + \gamma(q_{\parallel} - p_{\parallel}) \right) \mathcal{T}_{SCT}^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \quad (4.58)$$

Uma vez que obtivemos as equações do GR para as funções resposta, podemos calcular as suscetibilidades que são as quantidades que nos interessam mais diretamente. Para isso, devemos considerar os diagramas da figura 4.3 em que as suscetibilidades são calculadas a partir das funções resposta renormalizadas. Novamente, vemos que, se calcularmos diretamente as suscetibilidades a partir desses diagramas, todas as suscetibilidades apresentarão singularidades. Assim, analogamente ao que fizemos em uma dimensão para contornarmos essas singularidades, derivamos as seguintes equações do GR para as suscetibilidades:

$$\omega \frac{d\chi_a^{R\pm}(q_{\parallel})}{d\omega} = \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{11}} dp_{\parallel} \left( \mathcal{T}_a^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \right)^2 \quad (4.59)$$

$$\omega \frac{d\chi_b^{R\pm}(q_{\parallel})}{d\omega} = \frac{1}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_{12}} dp_{\parallel} \left( \mathcal{T}_b^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) \right)^2 \quad (4.60)$$

onde  $a = ODC, ODS$  e  $b = SCS, SCT$ . Os intervalos de integração podem ser encontrados no Apêndice G. Aparentemente, as equações do GR para as funções resposta (4.55-4.58) não diferem das equações (4.50-4.53), assim, poderíamos nos perguntar como as simetrias do tipo-s e tipo-d surgiriam destas equações. Para respondermos a essa pergunta, devemos lembrar do início deste capítulo onde chamamos as funções  $\mathcal{T}$  de fatores de forma. Na verdade, as simetrias do tipo-s e tipo-d se tornarão evidentes apenas quando formos resolver as equações do GR para as funções resposta quando definirmos o valor inicial das funções resposta, ou fatores de forma, de modo a reproduzir essas simetrias, como veremos no capítulo seguinte.

Devemos, contudo, dar significado físico a essas suscetibilidades. No início deste capítulo perturbamos o sistema com um termo que cria pares do tipo partícula-partícula e partícula-buraco para que, através da teoria de perturbação, calculássemos a resposta do sistema a esse tipo de perturbação. Exploramos as diversas simetrias contidas em nosso modelo para definirmos as suscetibilidades acima descritas como onda de densidade de carga s e d ( $ODC\pm$ ),

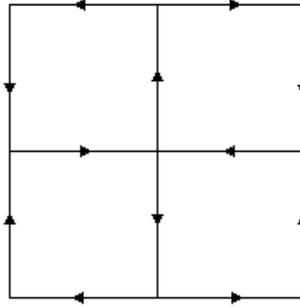


Figura 4.4: Padrão das correntes de carga (“spin”) ao longo das ligações da rede quadrada.

onda de densidade de “spin” s e d ( $ODS\pm$ )<sup>5</sup>, supercondutividade do tipo singlete s e d ( $SCS\pm$ ) e, finalmente, supercondutividade do tipo tripleto s e d ( $SCT\pm$ ).

As suscetibilidades como  $ODC+$  e  $ODS+$  são as conhecidas onda de densidade de carga e de “spin”, respectivamente, e são amplamente medidas experimentalmente em vários sistemas físicos[54]. Entretanto, devemos manter em mente que estamos lidando com uma teoria que, de alguma forma, no processo de renormalização passa de acoplamento moderado para forte acoplamento e, portanto, podemos esperar que a fase  $ODS+$  represente uma fase antiferromagnética como no caso dos cupratos supercondutores em baixas dopagens.

As suscetibilidades como  $SCS+$  e  $SCT+$  são atribuídas às fases supercondutoras do tipo singlete e tripleto, respectivamente, com simetria do tipo s. No final da década de 80, voltou-se a explorar o modelo de Hubbard[55, 56] estudando as várias simetrias que aparecem nesse modelo para uma rede quadrada em banda semi-cheia. Dentre essas simetrias, duas novas simetrias intrínsecas do modelo chamam a atenção, as chamadas fases de fluxo ou correntes de carga e correntes de “spin” que são, também, identificadas em nosso modelo pelas funções  $ODC-$  e  $ODS-$ . Entretanto, a referência [56] chama a atenção para o fato de que tais simetrias não induzem qualquer deformação na rede ou, até mesmo, momento magnético e, portanto, se

<sup>5</sup>Daqui em diante vamos nos referir à supercondutividade com sinal - como supercondutividade tipo  $d_{x^2-y^2}$ .

tornam difíceis de ser detectados experimentalmente<sup>6</sup>. Na figura 4.4, mostramos o padrão das correntes de carga (“spin”) numa rede quadrada que pode ser encontrado na referência [55].

Finalmente, temos as supercondutividades do tipo singlete e tripleto do tipo d  $SCS-$  e  $SCT-$ , respectivamente, que são atribuídas a supercondutores com simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$ , como mencionamos anteriormente. O primeiro tipo de supercondutividade é de grande relevância no caso dos cupratos supercondutores que apresentam um comportamento supercondutor com simetria  $d_{x^2-y^2}$  cuja soma total de “spins” dos pares de partículas é nula. A supercondutividade do tipo tripleto do tipo d, além de ter uma simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$ , apresenta uma fase ferromagnética coexistindo com a fase supercondutora. Como exemplo, esta última simetria pode desempenhar seu papel em sistemas como os cobaltatos que parecem apresentar esse tipo de comportamento<sup>7</sup>.

Uma vez que definimos todas as suscetibilidades podemos, então, partir para a resolução das equações do GR e discussão dos resultados.

---

<sup>6</sup>Até o presente momento não é de meu conhecimento que tenham conseguido detectar tais fases do ponto de vista experimental.

<sup>7</sup>Estamos apenas exemplificando onde tem sido mais comum encontrar essas fases do ponto de vista experimental. Não queremos fazer de nosso modelo um modelo que possa estar associado a todos esses diferentes tipos de supercondutores. Lembramos que nosso modelo se refere a uma rede quadrada e não faria sentido tentar associá-lo com os cobaltatos, por exemplo, que possuem uma rede triangular e uma SF um tanto diferente da nossa.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

Neste capítulo, discutiremos os principais resultados provenientes das equações do grupo de renormalização (GR) para os acoplamentos, para as funções resposta e, finalmente, para as suscetibilidades. Discutiremos, também, como resolver as equações do GR para os parâmetros já mencionados, numericamente, as aproximações envolvidas e, em especial, até que ponto a resolução numérica pode ser usada para fazermos algumas inferências físicas de nosso modelo. Seguindo nossa estratégia habitual, apresentaremos, inicialmente, os resultados para o caso unidimensional e, em seguida, os resultados para o caso em duas dimensões. Construiremos os diagramas de fase para ambos os casos, apontando as simetrias e as fases dominantes. Terminamos o capítulo com uma extensa análise sobre as implicações físicas de nossos resultados.

## 5.1 Discussões sobre o método numérico

Nos capítulos anteriores, estabelecemos as equações do GR para os acoplamentos, para as funções resposta e suas respectivas suscetibilidades. Vimos, também, que a evolução do fluxo de uma só equação afeta diretamente todas as demais, tornando-as equações diferenciais acopladas no caso unidimensional, e integro-diferenciais acopladas no problema em duas dimensões. Vamos, agora, partir para a resolução dessas equações.

Em uma dimensão, as equações diferenciais para os acoplamentos podem ser resolvidas facilmente, do ponto de vista analítico, originando pontos fixos da teoria[47]. Entretanto, para aferirmos a confiabilidade de nosso método, realizamos todos os cálculos das equações do GR em uma dimensão usando, também, métodos numéricos.

Como afirmamos anteriormente, em duas dimensões, uma solução analítica para o problema é praticamente impossível. Assim, temos de recorrer a métodos numéricos de resolução.

O método numérico utilizado para resolver as equações do GR, tanto em uma dimensão quanto em duas dimensões, é o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Como não necessitamos de um alto nível de acurácia, podemos empregá-lo sem restrições para suprir nossa necessidade numérica na abordagem do problema. A sua implementação é rápida e direta e, além disso, mais estável que outros métodos.

Há, no entanto, uma maneira muito eficaz de aumentar sua acurácia através do controle de passo. Em uma dimensão, isso já não seria fácil de fazer, uma vez que as equações são acopladas ; se o fosse, teríamos um aumento do tempo de computação.

Em duas dimensões, a situação é ainda mais crítica, pois, ao discretizarmos nossa SF de modo a que cada segmento seja dividido em 33 pontos, temos  $33 \times 33 \times 33 = 35.937$  equações do GR apenas para os acoplamentos. Além disso, seria um verdadeiro desastre se apenas uma delas fluisse com um passo diferente das outras. Por essa e outras razões práticas,

não implementamos o controle de passo em nenhum dos dois casos. No entanto, para o caso unidimensional, conseguimos achar os pontos fixos com uma acurácia de até 7 casas, no regime de dupla precisão do FORTRAN 77, com apenas algumas poucas iterações das equações do GR para os acoplamentos.

O programa para o caso bidimensional demanda tempo de computação considerável, visto ser necessária grande quantidade de memória física para armazenar 35.937 acoplamentos, sem mencionarmos as funções resposta e suscetibilidades. Evidentemente, cada vez que o programa chama esses vetores, o tempo computacional aumenta muito, tornando-se uma limitação para o aumento do número de pontos sobre a SF. Isso implica, necessariamente, o estabelecimento de um limite no nosso processo de discretização e, conseqüentemente, no fluxo do GR, na região onde o método numérico é aplicável, como veremos adiante.

Devemos, ainda, ressaltar que a dependência dos acoplamentos e outros parâmetros com os momentos paralelos é construída por meio das equações do GR e, portanto, não sabemos a forma funcional explícita dessa dependência. Temos, assim, apenas pontos gerados pelas equações do GR, no espaço dos acoplamentos, para serem integrados várias vezes em cada iteração. Por esse motivo, escolhemos um método de integração numérica que demanda o mínimo de tempo computacional possível e que oferece ao mesmo tempo acurácia razoável para o nosso problema bidimensional: o método dos trapézios. Esse método funciona muito bem para o nosso problema, pois o erro associado à integração numérica é da ordem de  $O(h^3)$ , onde  $h$  é o passo da integral que, em nosso caso, é de  $1/16$ , dando uma precisão de até três casas decimais.

Para o caso unidimensional, o tempo computacional é muito curto. Entretanto, para o caso bidimensional, o cenário torna-se totalmente diferente. Para se ter uma idéia da demanda de tempo computacional de nosso programa, basta mencionarmos que se rodarmos o programa

em um “Pentium” IV de 2.8 GHz, o cálculo de cada iteração leva cerca de 3min e 20 seg. Assim, para termos uma precisão razoável do método de Runge-Kutta de quarta ordem para as equações do GR, devemos ter no mínimo 200 iterações, o que demanda cerca de 11h 6min e 40 seg.

No Apêndice H, mostramos o fluxograma do programa principal. Nesse apêndice, comentamos, de forma sucinta, como deve funcionar o programa para o cálculo das equações integro-diferenciais no caso bidimensional.

Para elaborarmos o programa<sup>1</sup>, usamos, ao invés da escala de energia  $\omega$ , o passo do GR ( $l$ ) tal que  $\omega = \Omega \exp(-l)$ , por razões práticas. Assim, quanto maior o passo do GR ( $l$ ), menor a escala de energia  $\omega$  (que queremos que tenda a zero, significando que estamos nos aproximando da SF). Além disso, estamos fazendo  $(\Omega/v_F\Delta) = 1$ , também por uma questão de praticidade. Dessa forma, podemos ir adiante com os resultados para uma e duas dimensões.

## 5.2 Resultados para o caso unidimensional

As equações diferenciais que devemos resolver simultaneamente no caso unidimensional são (3.38), (3.31), (4.24-4.27) e (4.32-4.35) para os acoplamentos, para o peso  $Z$  da quasipartícula, para as funções resposta e, finalmente, para as suscetibilidades, respectivamente. Nosso principal objetivo é construir o diagrama de fase para diversos regimes de acoplamentos iniciais. Em nossa análise, vamos adotar a convenção  $\bar{g}_{1R} = g_{1R}/\pi v_F$  e  $\bar{g}_{2R} = g_{1R}/\pi v_F$ .

Para a equação diferencial do peso  $Z$  da quasipartícula, tomamos como valor inicial  $Z(l = 0) = 1$ . Para as funções resposta, tomamos como valor inicial  $\mathcal{T}_i^R(l = 0) = 1$ , e, para as suscetibilidades,  $\chi_i^R(l = 0) = 0$  com  $i = ODC, ODS, SCS, SCT$ . Para os acoplamentos, tomamos diversos valores iniciais convenientemente de acordo com o que queremos demonstrar, e assim o fizemos para construirmos o diagrama de fase da figura 5.1. Primeiramente, determi-

---

<sup>1</sup>Comentaremos mais sobre o programa na parte dos resultados para o caso bidimensional.

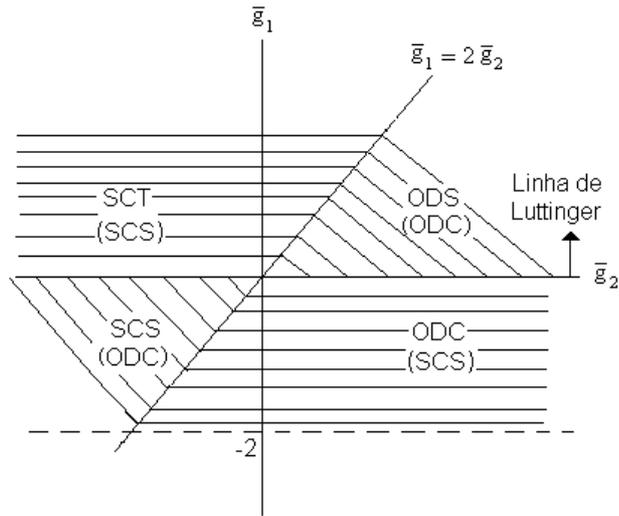


Figura 5.1: Diagrama de fase construído a partir de vários valores iniciais dos acoplamentos.

namos os pontos fixos para vários valores iniciais dos acoplamentos. Pudemos constatar que, se  $\bar{g}_{1R} > 0$ , independentemente do sinal de  $\bar{g}_{2R}$ , os acoplamentos sempre fluem para  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R}^*$  (onde \* significa ponto fixo, caracterizando o regime de Luttinger). Entretanto, se  $\bar{g}_{1R} < 0$ , independentemente do sinal de  $\bar{g}_{2R}$ , os acoplamentos sempre fluem para  $\bar{g}_{1R} = -2$  e  $\bar{g}_{2R}^*$ , caracterizando uma outra linha de pontos fixos. Esse comportamento pode ser visualizado na figura 5.1 por meio das linhas pontilhadas.

Em 1950, Tomonaga[57] propôs um modelo repulsivo no qual as interações com grande transferência de momento são desprezadas. Em 1963, Luttinger[29] propôs um modelo similar que foi resolvido via Bosonização. Comparado ao modelo de Tomonaga, o modelo de Luttinger apresenta novos estados distantes, porém, dos pontos de Fermi, que são preenchidos no estado fundamental. Entretanto, como se considera que somente elétrons e buracos são importantes nas proximidades dos pontos de Fermi, os dois modelos são equivalentes. Somente em 1973, Dzyaloshinsky e Larkin[58] aplicaram um método exato para a resolução do modelo proposto por Tomonaga, usando identidades de Ward, e obtendo como resultado, dentre outras coisas, o ponto fixo de Luttinger no qual  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R}^*$ , representados pela linha de Luttinger mostrada

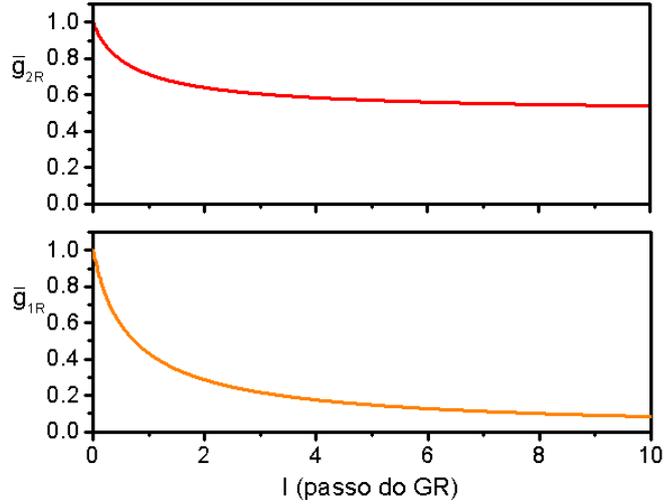


Figura 5.2: Fluxo dos acoplamentos renormalizados para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ .

na figura 5.1.

Devemos ressaltar, ainda, que calculamos os pontos fixos para chutes iniciais que conduzem aos pontos fixos de Luttinger usando um método perturbativo. Assim, só pudemos chegar a esse resultado considerando a linha de Luttinger como um caso assintótico (vide figura 5.2 na qual fizemos  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$  como chute inicial) e mostramos o fluxo até um passo do GR de  $l = 10$ , ou seja,  $\omega$  da ordem de  $10^{-5}$ . Podemos ir até um passo do GR dessa magnitude devido ao fato de que, em uma dimensão, não temos restrições em relação a  $l$ , ao contrário do que ocorre no caso bidimensional em que discretizamos a SF. Entretanto, apesar de  $\bar{g}_{1R}$  ser pequeno em  $l = 10$ , apenas podemos atingir o ponto fixo no infinito. Por outro lado, fizemos o teste no qual fixamos desde o início  $\bar{g}_{1R} = 0$  como condição inicial e, realmente, para qualquer valor inicial de  $\bar{g}_{2R}$  o valor de  $\bar{g}_{1R}$  permanece inalterado, confirmando, dessa forma, a linha de Luttinger como pontos fixos da teoria.

A figura 5.3 mostra o fluxo dos acoplamentos para  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ , juntamente com o fluxo do peso  $Z$  da quasipartícula fixado em  $Z = 1$ , como condições iniciais, até um valor de  $l = 100$ . Pode-se ver, claramente, o comportamento assintótico do peso  $Z$  da quasipartícula,

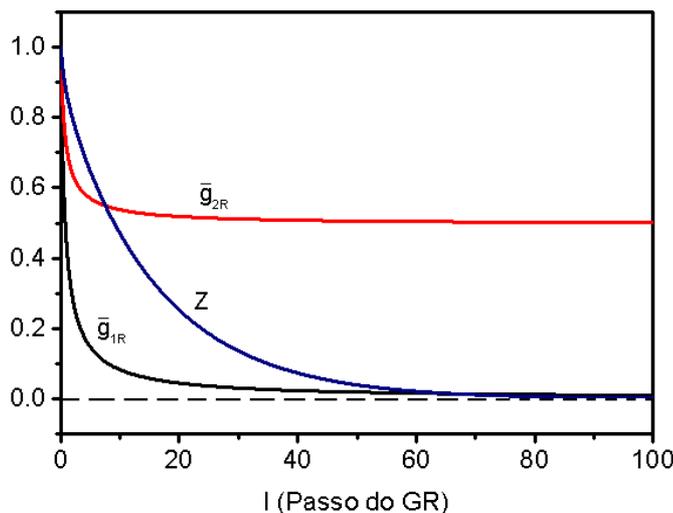


Figura 5.3: Fluxo dos acoplamentos renormalizados para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$  e para o peso  $Z$  da quasipartícula com chute inicial igual a 1.

que tende a zero no infinito ou quando  $\omega \rightarrow 0$ . Sabemos que essa quantidade mede a presença de quasipartículas no sistema, o que é característico de um líquido de Fermi de Landau. Se  $Z$  tender para um valor finito ( $0 < Z < 1$ ), podemos dizer que temos um líquido de Fermi de Landau, mas como temos uma tendência de completo anulamento de  $Z$ , devemos ter, na verdade, um tipo de líquido de não-Fermi.

Contudo, se as interações com grande transferência de momento, como  $g_1$ , estiverem presentes, as identidades de Ward não são mais facilmente implementáveis e uma solução exata para o modelo torna-se praticamente impossível. Nesse caso, o melhor que pode ser feito é empregar o método do GR, que dá um significado de escala para o problema original, ou alternativamente, aplicar o método de Bosonização para este caso unidimensional.

Em 1974, Luther e Emery[59] empregaram o método de Bosonização para um regime atrativo e mostraram que, para alguns valores particulares dos acoplamentos, o problema com grande transferência de momento podia ser resolvido exatamente definindo a linha de pontos fixos de Luther-Emery localizada em  $g_{1R}^*/2\pi v_F = -3/5$  e  $g_{2R}^*/2\pi v_F = cte$ . Entretanto, não se

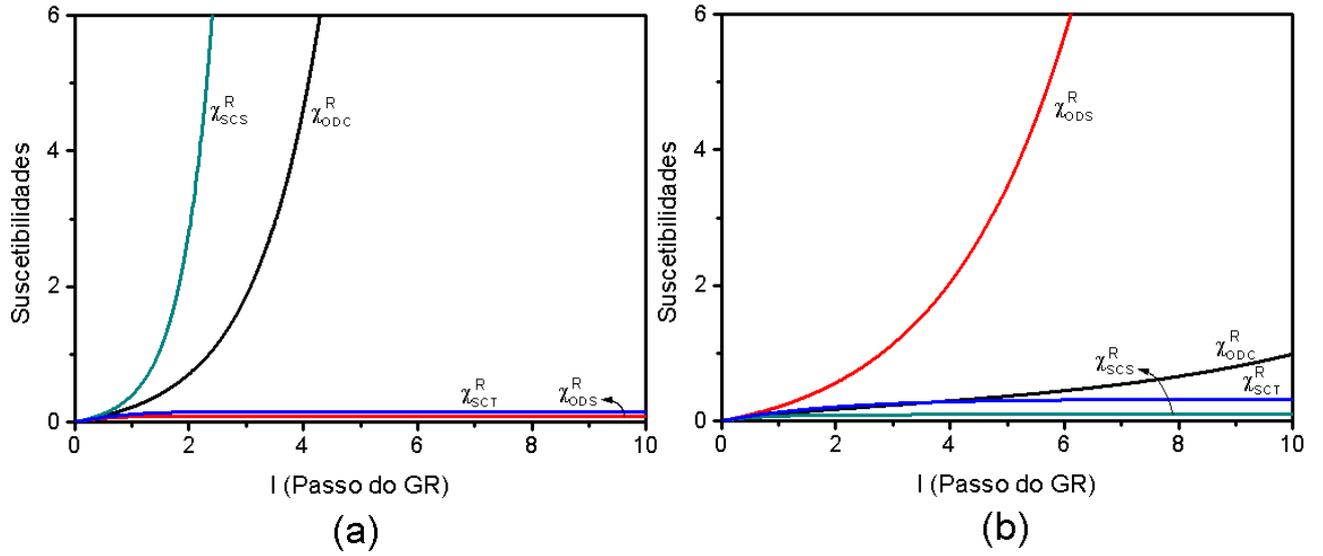


Figura 5.4: Fluxo das suscetibilidades renormalizadas: a) para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = -1$  e b) para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ .

pode afirmar que essa linha é uma linha de pontos fixos da teoria, pois esse resultado foi obtido apenas para uma certa escolha dos acoplamentos.

Em nosso trabalho, encontramos uma linha de pontos fixos para  $\bar{g}_{1R}^* = g_{1R}^*/\pi v_F = -2$ , ou  $g_{1R}^*/2\pi v_F = -1$ , e  $\bar{g}_{2R}^*$  para o regime atrativo. Diferentemente do caso da linha de Luttinger, ao fixarmos valores iniciais abaixo desta linha os acoplamentos não fluem para esses pontos fixos de forma assintótica. Além disso, ao fazermos o teste de fixarmos  $\bar{g}_{1R} = -2$  e  $\bar{g}_{2R} = cte$ , como condições iniciais, o valor de  $\bar{g}_{1R}$  permanece inalterado confirmando a linha abaixo da linha de Luttinger como pontos fixos da teoria, como pode ser visto na figura 5.1.

Para ilustrarmos como construímos o diagrama de fase da figura 5.1, plotamos os gráficos das figuras 5.4 (a) e 5.4 (b) com valores iniciais para os acoplamentos  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$  e  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = -1$ , respectivamente. Pode-se ver, claramente, que, em qualquer regime de acoplamentos, temos sempre duas suscetibilidades divergindo. Dessa forma, é apropriado construirmos o diagrama de fase considerando sempre as duas suscetibilidades que divergem.

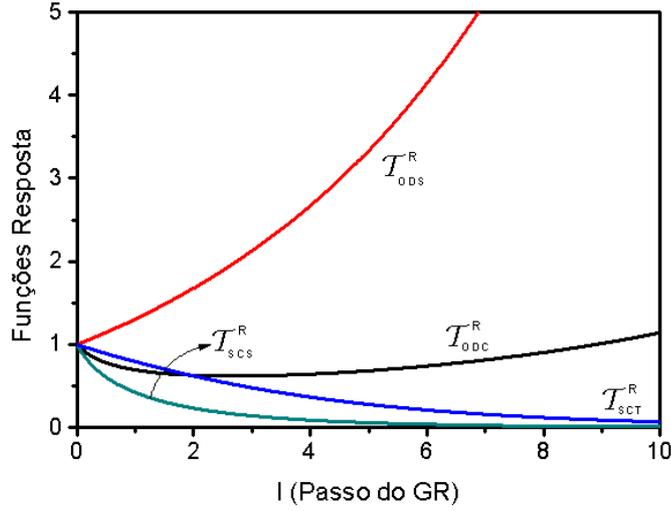


Figura 5.5: Funções resposta renormalizadas para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ .

As outras duas suscetibilidades atingem pontos fixos. Na figura 5.4 (b) a suscetibilidade  $\chi_{ODC}^R$  tem um comportamento suave com relação à suscetibilidade  $\chi_{ODS}^R$ . Entretanto, a suscetibilidade com simetria  $ODC$  também diverge, mas para um valor maior de  $l$  ( $l = 34$ ) e, por essa razão, não aparece no gráfico de forma mais pronunciada.

Apesar de termos divergências nas suscetibilidades, temos que tomar um certo cuidado para evitarmos que tal comportamento corresponde à existência de ordenamento de *longo alcance*. Inicialmente, devemos salientar que temos pontos fixos para os acoplamentos e, portanto, tanto as funções resposta quanto as suscetibilidades podem ser representadas como uma lei de potências na escala de energia  $\omega$  cujos expoentes são funções dos acoplamentos considerados.

A figura 5.5 mostra o que acontece com as funções resposta, as quais podemos identificar como parâmetros de ordem, no caso em que temos  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$  como valor inicial. Podemos ver duas funções resposta,  $\mathcal{T}_{ODS}^R$  e  $\mathcal{T}_{ODC}^R$ , divergindo e outras duas,  $\mathcal{T}_{SCS}^R$  e  $\mathcal{T}_{SCT}^R$ , indo para zero de forma assintótica. Assim, devido à existência desses valores fixos, esse comportamento pode ser exibido como uma lei de potências<sup>2</sup>. Desse modo, podemos concluir que as flutuações

<sup>2</sup>Veja a referência [47]

quânticas induzidas pelas interações de pares de partícula-partícula e partícula-buraco, relativamente simetrizados, são mais fortes quando as funções resposta divergem.

Em muitos estudos, tem sido observado que variar a escala de energia  $\omega$  é, de muitas formas, similar a variar a temperatura. Assim, se identificarmos a escala  $\omega$  com a temperatura podemos verificar se nossos resultados estão de acordo com o teorema de Mermin e Wagner[60] que afirma que não podemos ter quebra espontânea de simetria em temperaturas finitas, para sistemas com interações de curto alcance, e baixa dimensionalidade ( $d \leq 2$ ). Na verdade, em uma dimensão não há arranjo de *longo alcance* mesmo para  $T = 0$ , pois as flutuações quânticas destroem qualquer tipo de ordenamento dessa natureza.

Em conclusão, podemos afirmar com convicção que não há arranjos de *longo alcance* no sistema físico e, sim, de *quase-longo alcance* com fortes oscilações coletivas que se refletem nas leis de potências das suscetibilidades nas vizinhanças da SF, como foi sugerido na referência [47]. Podemos, então, apresentar, em seguida, nossos resultados para o caso bidimensional.

### 5.3 Resultados para o caso bidimensional

No caso bidimensional, obtivemos as equações do GR para vários parâmetros considerando a SF da figura 2.3. Para os acoplamentos devemos resolver as equações (3.49) e (3.50), levando-se em conta que para o peso da quasipartícula devemos resolver a equação (3.42), e para as funções resposta as equações (4.55-4.58). Finalmente, para obtermos as suscetibilidades precisamos resolver as equações do GR (4.59) e (4.60) com  $a = ODC, ODS$  e  $b = SCS, SCT$ .

Antes de partirmos, efetivamente, para a resolução de tais equações, devemos manter sempre em mente que temos apenas pontos no espaço dos acoplamentos tornando a elaboração do programa uma tarefa mais engenhosa. Dividimos cada segmento chato da SF em 33 pontos, ou seja, como  $-\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta$ , todas as integrais nos momentos paralelos devem correr todos

esses valores aumentando o tempo de computação consideravelmente a cada iteração. Além disso, por razões de simplificação adotamos a convenção  $\Omega/v_F\Delta = 1$  e  $\omega = \Omega \exp(-l)$ , como mencionamos na parte de discussão numérica. Devido ao processo discretização, devemos impor restrições ao passo do GR ( $l$ ) se quisermos evitar que a escala de energia  $\omega$  seja menor que a distância entre os pontos da SF, ou seja,  $l_c = 2.8$ , onde  $l_c$  é o passo de corte do GR. Ao fazermos isso, podemos afirmar com certeza que o método numérico empregado gera resultados aceitáveis, do ponto de vista físico, ao invés de resultados que possam levar a conclusões duvidosas devido ao processo de discretização.

Sabemos, de antemão, que o sistema flui para um regime de forte acoplamento devido a várias simulações com nosso programa. Assim, faremos toda nossa análise de dados para um chute inicial moderado dos acoplamentos no regime de Hubbard repulsivo  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = U = 8$ , a não ser quando quisermos fazer outro tipo de análise na qual explicitaremos o chute inicial dos acoplamentos. Ao fazermos tal escolha, esperamos que o sistema flua mais rapidamente, passando de acoplamento moderado para forte acoplamento. Poder-se-ia argumentar que as equações do GR estão produzindo apenas resultados diretamente ligados a esse valor de acoplamento moderado, pois estamos usando um método perturbativo. Entretanto, como veremos mais adiante, mesmo com um chute inicial de maior magnitude, mostraremos que nossos resultados seguem o mesmo comportamento e são, portanto, uma tendência natural das equações do GR.

### 5.3.1 Resultados para os acoplamentos e o peso $Z$ da quasipartícula

Os acoplamentos  $g_{1R}$  e  $g_{2R}$  aparecem em quase todas as equações do GR e devem ser resolvidas antes de qualquer outra equação. Na verdade, como todas as equações do GR são acopladas, o que devemos fazer é calcular uma pequena evolução no fluxo das equações (3.49) e (3.50) para que, em seguida, possamos calcular a evolução no fluxo de qualquer outra das

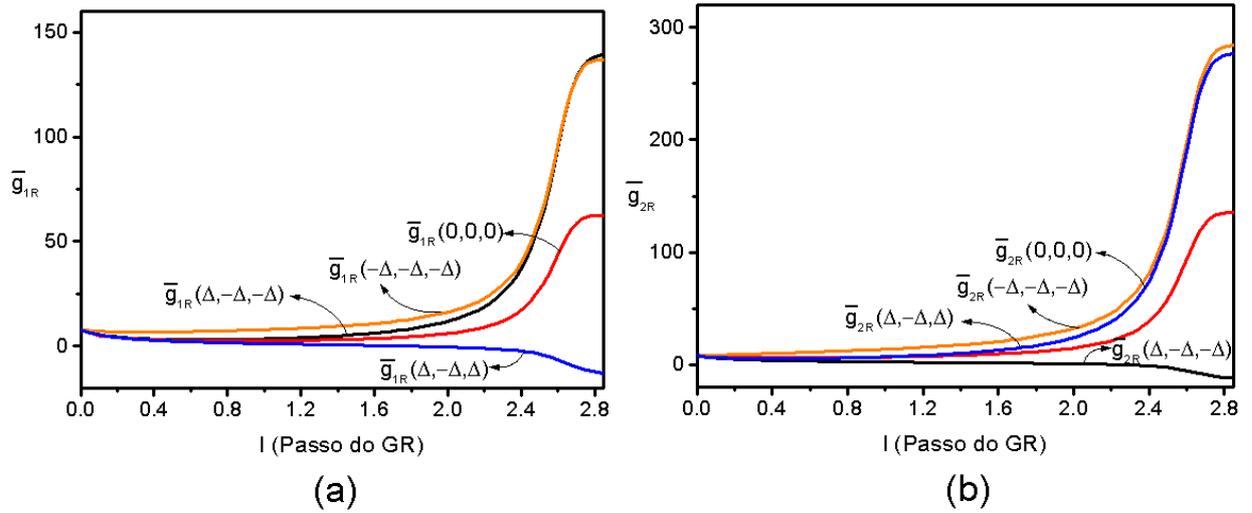


Figura 5.6: Fluxo para os acoplamentos renormalizados para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ : a) Acoplamento  $g_{1R}$  para algumas escolhas dos momentos ao longo da SF versus passo do GR ( $l$ ). b) Acoplamento  $g_{2R}$  para algumas escolhas dos momentos ao longo da SF versus passo do GR ( $l$ ).

equações do GR.

Na figura 5.6, mostramos o fluxo das equações do GR para um valor inicial dos acoplamentos para o regime do modelo de Hubbard repulsivo  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ . Pode-se ver, claramente, que os acoplamentos estão indo de um regime de acoplamento moderado para um regime de forte acoplamento. Além disso, podemos pensar que os acoplamentos estão fluindo para pontos fixos, mesmo que assintoticamente, pois seus valores continuam mudando a taxas pequenas. Na verdade, o que temos são pseudopontos fixos, uma vez que fizemos o teste de variarmos o número de pontos da discretização da SF e constatamos a sensibilidade desses quase-patamares de valores fixos ao aumento do número de pontos. Para se ter uma idéia, se dobrarmos o número de pontos de discretização da SF esses patamares de valores fixos se formarão para valores que serão o dobro daqueles onde se formaram anteriormente. Dessa forma, não podemos afirmar que temos pontos fixos para os acoplamentos para este caso bidimensional.

Uma quantidade que afeta diretamente as equações do GR para os acoplamentos é o peso

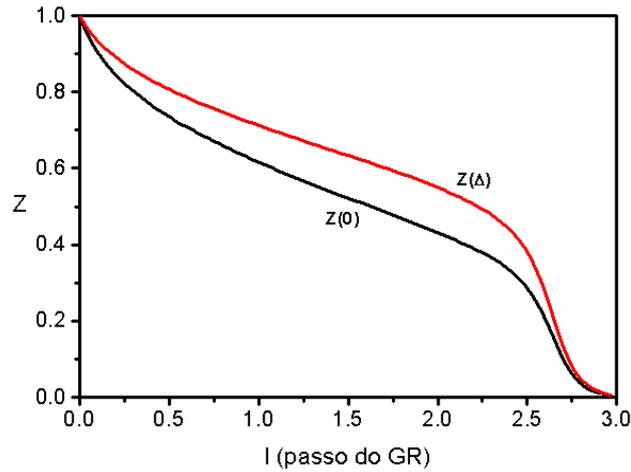


Figura 5.7: Fluxo para o peso de quasipartículas  $Z(p_{\parallel}; l)$  com dois valores fixos de  $p_{\parallel}$  para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ .

$Z$  da quasipartícula cujo fluxo é mostrado nas figuras 5.7 e 5.8. Na figura 5.7, mostramos o fluxo de  $Z$  em função do passo do GR ( $l$ ), para duas escolhas de momentos paralelos, em que podemos ver claramente sua tendência de anulamento em  $l_c = 2.8$ . Entretanto, na figura 5.8 mostramos o fluxo de  $Z$  para determinados valores de  $l$  para valores iniciais de acoplamento tais que  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$  (a) e  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$  (b).

Nas figuras 5.6, vemos que após uma forte renormalização o fluxo dos acoplamentos perde a força indo, aparentemente, para valores fixos em  $l = 2.75$ . Olhando para a figura 5.7 (a) vemos que, para  $l = 2.75$ ,  $Z$  tem um valor entre 0.05 e 0.1 para qualquer valor do momento paralelo  $p_{\parallel}$ . Isso é um forte indicativo de que o completo anulamento do peso  $Z$  da quasipartícula causa o enfraquecimento do fluxo dos acoplamentos podendo, até mesmo, levar aos pontos fixos. Entretanto, não atingimos nenhum ponto fixo nas funções de acoplamento, pois, como já mencionamos, os patamares de valores fixos são sensíveis ao processo de discretização.

Agora, nos voltamos para a figura 5.7 (b), onde o valor inicial para os acoplamentos é tal que  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ . Vemos que, para um regime de fraco acoplamento, o peso  $Z$  da quasipartícula não varia muito, permanecendo na região próxima de seu valor unitário. Assim,

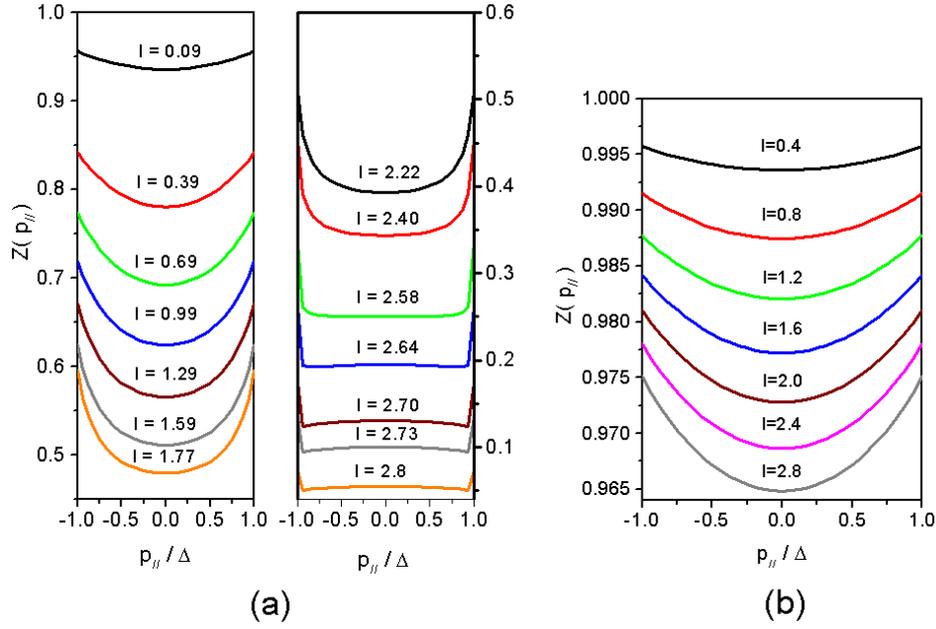


Figura 5.8: Fluxo para o peso  $Z$  da quasipartícula: a) Peso de quasipartículas versus  $p_{\parallel}$  para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ . b) Peso de quasipartículas versus  $p_{\parallel}$  para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 1$ .

é mais interessante considerarmos o regime de acoplamento moderado no qual  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$  onde o peso da quasipartícula, ao tender a zero, faz com que o fluxo dos acoplamentos no regime de forte acoplamento perca sua força.

No capítulo 3, fizemos uma aproximação na auto-energia desprezando as contribuições de um “loop” sob a alegação de que suas respectivas derivadas com relação à escala de energia  $\omega$  não eram importantes do ponto de vista do GR, uma vez que a SF é mantida fixa. Considerando o primeiro termo da equação da auto-energia (2.49) podemos escrever:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} dq_{\parallel} \left[ 2g_{2R}(p_{\parallel}, q_{\parallel}, q_{\parallel}) - g_{1R}(p_{\parallel}, q_{\parallel}, p_{\parallel}) \right] = I_R(p_{\parallel}) \quad (5.1)$$

Na figura 5.9, mostramos dois gráficos com relação a integral da auto-energia renormalizada (5.1). Evidentemente, devemos resolver as equações dos acoplamentos até dois “loops”, as quais foram obtidas desconsiderando tais termos, para que, dessa forma, possamos calcular esta integral. Na figura 5.9 (a) mostramos a integral  $I_R$  versus  $p_{\parallel}$  enquanto que na figura 5.9

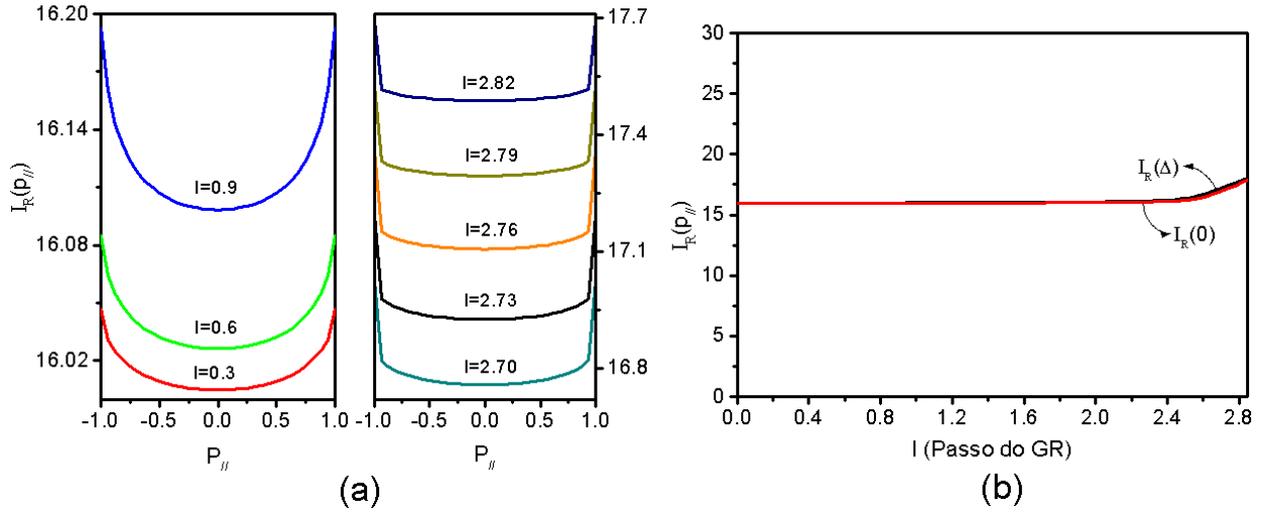


Figura 5.9: Integral da auto-energia renormalizada até um “loop” para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ : a) Integral da auto-energia renormalizada até um “loop” versus  $p_{\parallel}$  para vários valores do passo do GR ( $l$ ). b) Integral da auto-energia renormalizada versus passo do GR ( $l$ ) para algumas escolhas de momento paralelo ao longo da SF.

(b) mostramos a evolução da integral  $I_R$  com relação ao passo do GR ( $l$ ) até  $l = l_c$ . O que podemos ver, dessas duas figuras, é que essa integral não varia muito com o passo do GR e o mesmo acontece com sua derivada com relação a escala de energia  $\omega$ . Uma pequena variação da derivada (proporcionando um aumento em termos absolutos) ocorre no final do gráfico da figura 5.9 (b), mas como se pode ver não é nada significativo. Assim, ao desprezarmos essa contribuição com a SF fixa estamos fazendo uma boa aproximação, uma vez que toda nossa análise é feita de forma qualitativa e não quantitativa.

Um fato interessante de nosso modelo é que o fluxo dos acoplamentos do tipo  $\bar{g}_{1R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})$  e  $\bar{g}_{2R}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, p_{3\parallel})$  tais que  $p_{1\parallel} \neq p_{2\parallel} \neq p_{3\parallel}$  fluem para zero como mostra a figura 5.10. Assim, poderíamos elaborar um modelo efetivo que, logo de início, esses acoplamentos sejam todos nulos. Uma vez que discutimos os resultados para os acoplamentos e peso  $Z$  da quasipartícula podemos ir para as funções resposta e as respectivas suscetibilidades.

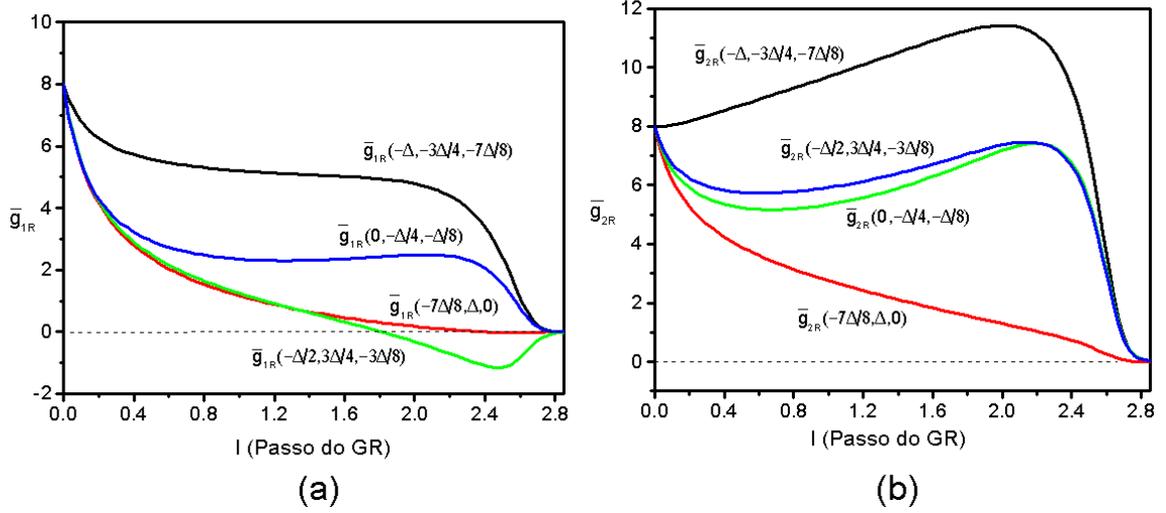


Figura 5.10: Fluxo dos acoplamentos renormalizados para um chute inicial  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$  : a) Fluxo para o acoplamento  $g_{1R}$  para uma escolha de momentos na qual  $p_{1\parallel} \neq p_{2\parallel} \neq p_{3\parallel}$ . b) Fluxo para o acoplamento  $g_{2R}$  para uma escolha de momentos na qual  $p_{1\parallel} \neq p_{2\parallel} \neq p_{3\parallel}$ .

### 5.3.2 Resultados para as funções resposta e as suscetibilidades

Para calcularmos as funções resposta e as respectivas suscetibilidades, como já mencionamos, devemos resolver as equações (4.55-4.58), (4.59) e (4.60) com  $a = ODC, ODS$  e  $b = SCS, SCT$  respectivamente. Nosso objetivo é construir o diagrama de fase para este caso bidimensional. Para isso, vamos fazer a seguinte escolha para os valores iniciais das funções resposta:

$$\mathcal{T}_{ODC}^{R+}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{ODS}^{R+}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SCS}^{R+}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SCT}^{R+}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = 1 \quad (5.2)$$

$$\mathcal{T}_{ODC}^{R-}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{ODS}^{R-}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SCS}^{R-}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \mathcal{T}_{SCT}^{R-}(p_{\parallel}, q_{\parallel}) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi p_{\parallel}}{2}\right) \quad (5.3)$$

Note que do lado esquerdo colocamos explicitamente a dependência com  $q_{\parallel}$  ao qual vamos nos referir, a partir de agora, como a componente paralela do vetor de transferência de momento. Apesar do lado direito não conter nenhuma informação a respeito de  $q_{\parallel}$ , a dependência será construída naturalmente pelas equações do GR. O valor inicial para as funções resposta com simetria + é motivada pelo fato da simetria do tipo s ser esférica, em analogia com a função

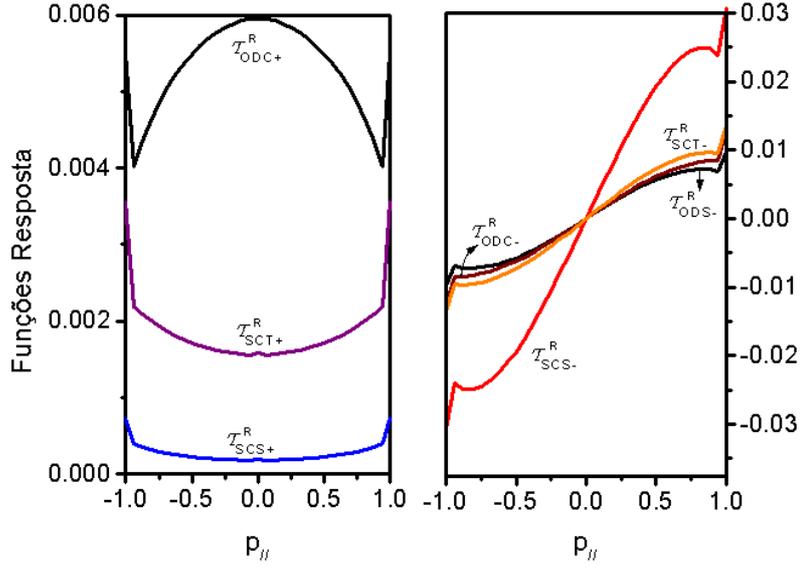


Figura 5.11: Gráfico das funções resposta  $\mathcal{T}_i^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel} = 0; l = 2.8)$  versus momento ao longo da SF ( $p_{\parallel}$ ).

de onda do tipo s no átomo de hidrogênio. Por outro lado, o valor inicial para as funções resposta com simetria  $-$  é motivado pela simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$  que muda de sinal de acordo com o quadrante da SF, também em analogia com o que acontece nos orbitais “d” no átomo de hidrogênio. No caso das suscetibilidades tomaremos como valor inicial  $\chi_i^R(q_{\parallel}; l = 0) = 0$  com  $i = ODC, ODS, SCS, SCT$ . Ao tomarmos tal valor inicial estamos dizendo que, inicialmente, o sistema não é perturbado por nenhum campo externo.

Na figura 5.11, mostramos o gráfico das funções resposta, exceto a função resposta com simetria  $ODS+$ , para um dado valor do passo do GR (1) e um dado valor da componente paralela do vetor de transferência de momento  $\mathcal{T}_i^{R\pm}(p_{\parallel}, q_{\parallel} = 0; l = 2.8)$ . Note que as simetrias sugeridas pelos valores iniciais (5.2) e (5.3) são mantidas do início ao fim do fluxo, pois  $l = 2.8$  é nosso passo de corte do GR. A simetria do tipo  $ODS+$  não é representada graficamente aqui devido ao fato de estar com valores muito elevados para serem plotados com esse valor do passo do GR.

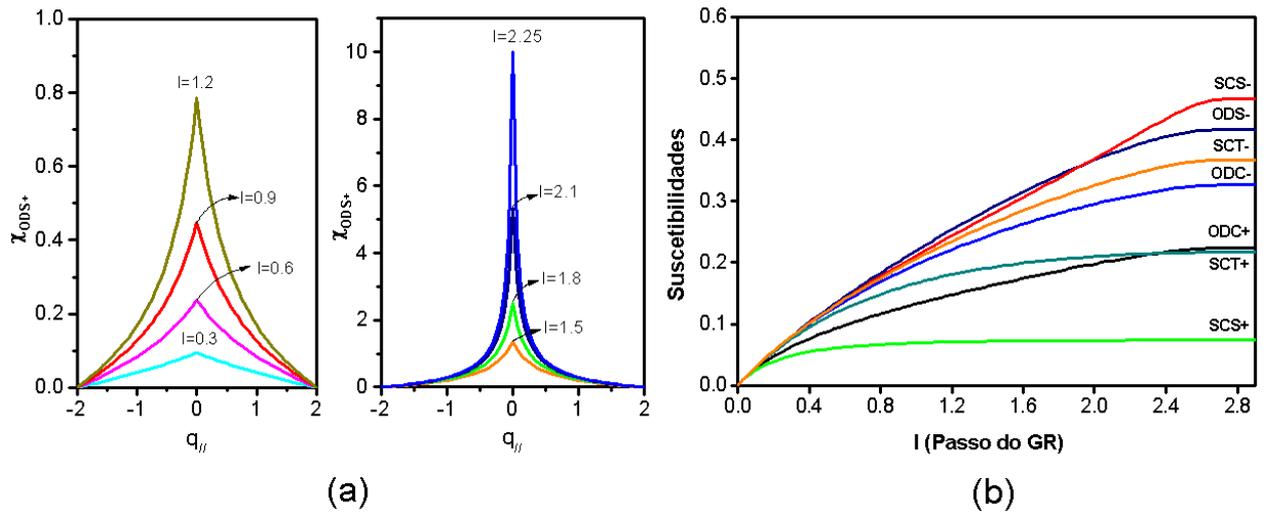


Figura 5.12: a) Gráfico da suscetibilidade  $\chi_{ODS+}^{R+}(q_{||}; l)$  versus componente paralela do vetor de transferência de momento  $q_{||}$  para vários valores do passo do GR ( $l$ ). b) Fluxo das suscetibilidades, exceto para o caso  $ODS+$ . Ambos os gráficos foram confeccionados para valores iniciais dos acoplamentos tais que  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$

Para termos uma idéia do que se passa com a suscetibilidade do tipo  $ODS+$ , plotamos o gráfico de  $\chi_{ODS+}^{R+}(q_{||}; l)$  versus componente paralela do vetor de transferência de momento  $q_{||}$  para vários valores do passo do GR ( $l$ ) na figura 5.12 (a). Podemos ver que em  $q_{||} = 0$  temos a maior contribuição para essa suscetibilidade. Isso acontece devido ao fato dessa simetria ser originada a partir de diagramas do tipo partícula-buraco e quando o vetor de transferência de momento é tal que  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}^* = (0, 2k_F)$ , onde  $\mathbf{Q}^*$  é o vetor de “nesting”<sup>3</sup>, temos um reforço em tal simetria.

Na figura 5.12 (b), plotamos o fluxo das suscetibilidades, exceto a do tipo  $ODS+$ , onde podemos ver que todas vão para pontos fixos. Ao contrário do que acontece com os acoplamentos, esses são pontos fixos reais, pois não dependem do processo de discretização. Isso é muito importante, pois podemos concluir que as respectivas funções resposta estão indo para zero e no caso de  $\chi_{ODS+}^{R+}$  a função resposta diverge. Diferente do caso unidimensional não temos

<sup>3</sup>Veja o capítulo 2.

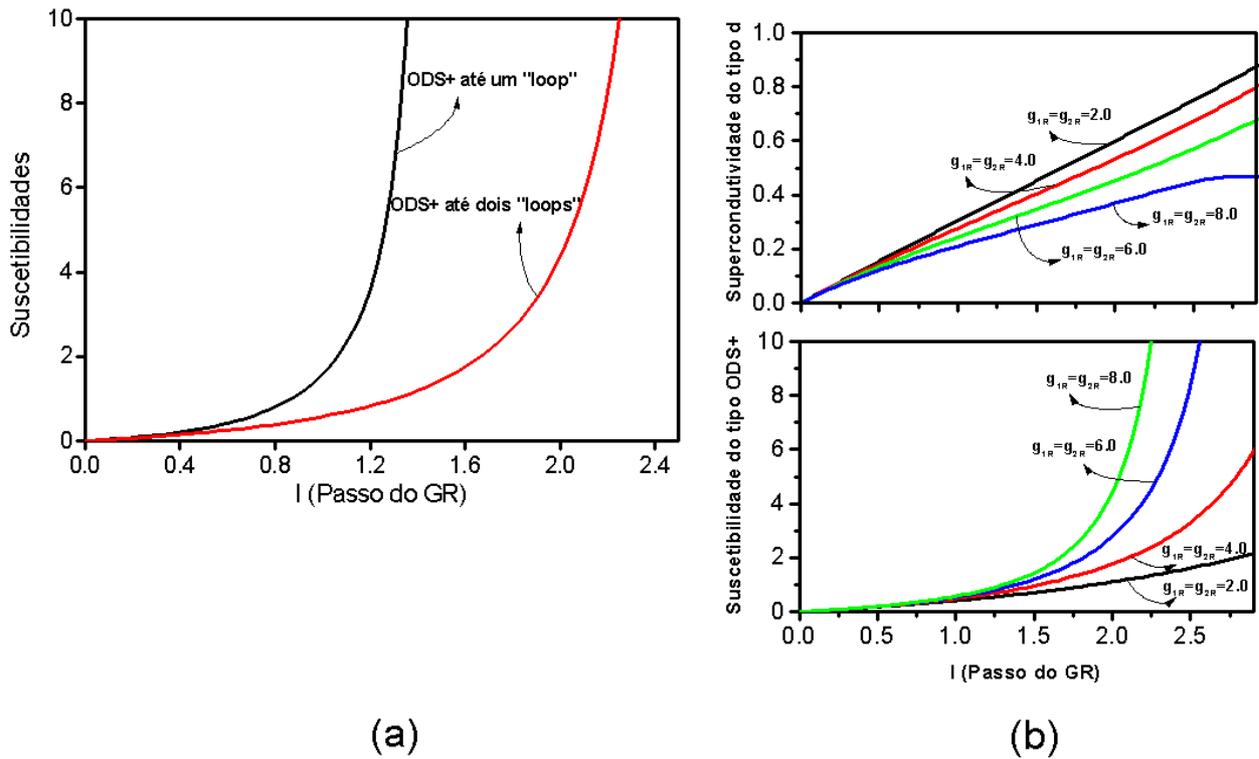


Figura 5.13: a) Fluxo da suscetibilidade  $\chi_{ODS^+}^{R+}(q_{\parallel} = 0; l)$  tanto para um “loop” quanto para dois “loops” para valores iniciais dos acoplamentos tais que  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$ . b) Fluxo das suscetibilidades  $\chi_{ODS^+}^{R+}(q_{\parallel} = 0; l)$  e  $\chi_{SCS^+}^{R-}(q_{\parallel} = 0; l)$  para vários valores iniciais dos acoplamentos.

pontos fixos para os acoplamentos e, portanto, não podemos fazer a mesma análise do ponto de vista de lei de potências. Entretanto, sabemos que as funções resposta são identificadas como parâmetros de ordem. Se por um acaso uma delas divergir exponencialmente significa que pode haver uma transição de fase.

Na figura 5.13 (a), mostramos o fluxo para a suscetibilidade do tipo  $ODS^+$  para um “loop” e dois “loops”. Podemos ver nesta figura que, ao passarmos de um cálculo de um “loop” para dois “loops”, a divergência acontece mais tardiamente com relação ao passo do GR ( $l$ ). Assim, podemos esperar que, se levarmos em conta cálculos de ordem superior, essa divergência acontecerá para valores cada vez mais altos de  $l$ , ou seja, na verdade essa divergência deverá acontecer apenas quando  $\omega = 0$ . Conseqüentemente, não podemos afirmar que há uma

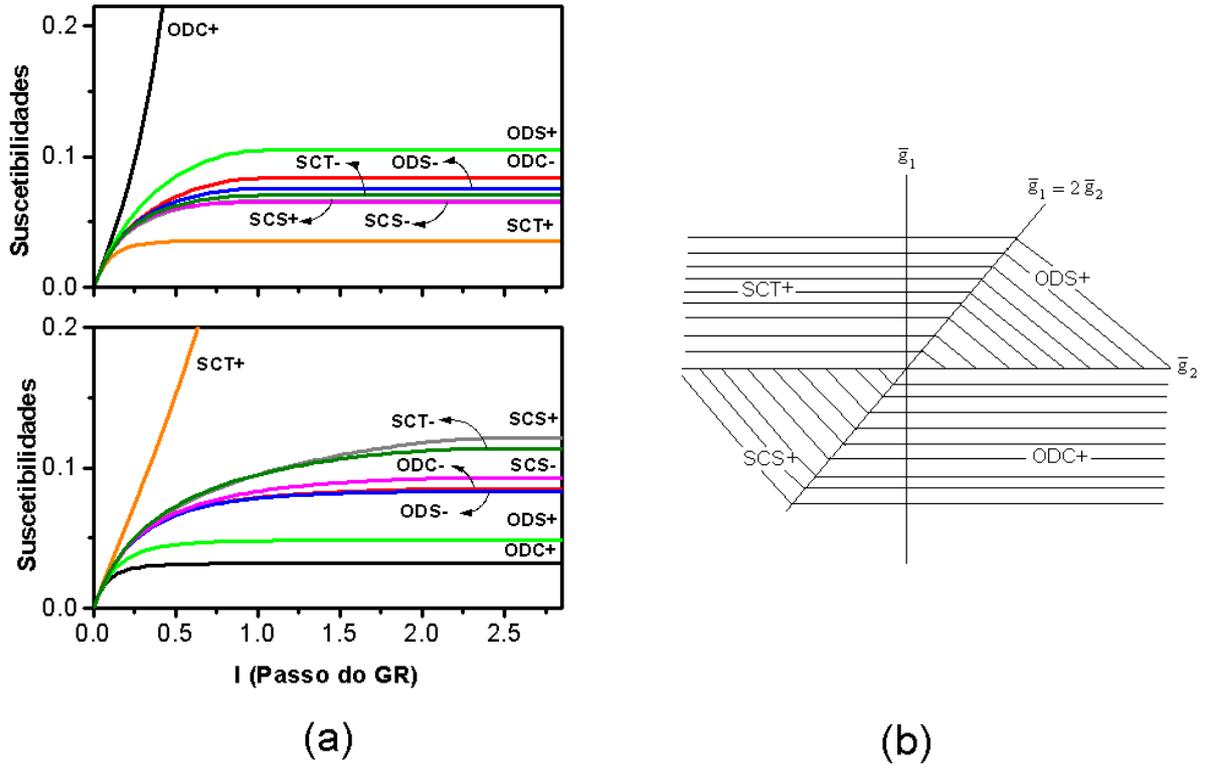


Figura 5.14: a) Fluxo das suscetibilidades para chutes iniciais diferentes para os acoplamentos  $\bar{g}_{1R} = -\bar{g}_{2R} = 8$  para o de cima e  $\bar{g}_{1R} = -\bar{g}_{2R} = -8$  para o de baixo. b) Diagrama de fase considerando as suscetibilidades mais pronunciadas de acordo com a região do espaço dos acoplamentos.

transição de fase neste caso bidimensional, mas, sim, correlações de *quase-longo alcance* com grandes oscilações coletivas como vimos no caso unidimensional. Dessa forma, o teorema de Mermin e Wagner[60] para um sistema de baixa dimensionalidade ( $d = 2$ ) e interações de curto alcance é satisfeito e uma transição de fase somente é possível quando  $\omega = 0$  ou, se identificarmos a escala de energia  $\omega$  como uma temperatura efetiva, quando  $T = 0$ .

Na seção anterior, mencionamos o fato de que, ao estarmos num regime de acoplamento moderado, isso poderia gerar resultados que seriam apenas peculiares dos valores iniciais dos acoplamentos. Entretanto, plotamos o gráfico da figura 5.13 (b) para vários valores iniciais dos acoplamentos  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 2, 4, 6, 8$ , para mostrarmos que não é isso o que acontece. Ao analisarmos o gráfico, vemos que partindo de um regime de acoplamento fraco as suscetibilidades do

tipo  $ODS+$  e  $SCS-$  para o regime de acoplamento moderado no qual  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$  aparecem como uma tendência das suscetibilidades no regime de fraco acoplamento derrubando esse argumento de que um chute de valor inicial dessa magnitude pode não representar corretamente o sistema físico em questão.

A figura 5.14 (a) mostra o fluxo das suscetibilidades para chutes iniciais diferentes  $\bar{g}_{1R} = -\bar{g}_{2R} = \pm 8$  representando diferentes regiões no espaço dos acoplamentos. Como temos visto ao longo desta seção, a escolha dos chutes iniciais dos acoplamentos seleciona diferentes regiões do espaço dos acoplamentos as quais uma das suscetibilidades predomina sobre as outras. Na verdade, há apenas uma suscetibilidade que, aparentemente, diverge e as demais sempre vão para valores fixos.

Um fato interessante ocorre tanto em uma dimensão quanto em duas dimensões. Ao chutarmos valores iniciais para os acoplamentos próximos de um dos eixos de “transição”<sup>4</sup> notamos que há um fortalecimento na fase seguinte, constituindo uma “transição” contínua. Assim, construímos o diagrama de fase da figura 5.14 (b) que mostra as suscetibilidades que, aparentemente, divergem, mas como vimos são apenas um artifício da aproximação da ordem de perturbação do GR.

Para valores iniciais positivos dos acoplamentos entre  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} > 0$  e  $\bar{g}_{1R} = 2\bar{g}_{2R}$  a suscetibilidade do tipo  $ODS+$  aparece de forma pronunciada. Isso quer dizer que, nesse regime repulsivo, as flutuações antiferromagnéticas estão sendo reforçadas. Já a região compreendida entre  $\bar{g}_{1R} > 2\bar{g}_{2R}$  e  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} < 0$  apresenta um reforço nas flutuações supercondutoras do tipo tripleto com simetria  $s$ . Por outro lado, na região em que temos valores iniciais entre  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} < 0$  e  $\bar{g}_{1R} < 2\bar{g}_{2R}$  há um reforço nas flutuações supercondutoras do tipo singlete com simetria  $s$ . Finalmente, na região com valores iniciais para os acoplamentos compreendidos

---

<sup>4</sup>A palavra transição aqui é usada apenas no sentido de linha de separação entre uma fase dominante e outra e não no sentido de transição de fase como estamos acostumados a pronunciar, pois não há quebra espontânea de simetria como provamos.

entre  $\bar{g}_{1R} > 2\bar{g}_{2R}$  e  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} > 0$  a suscetibilidade reforçada é a do tipo  $ODC+$ .

Os resultados aqui obtidos foram submetidos para publicação em periódico internacional, mas uma versão pode ser encontrada na referência [61].

# Capítulo 6

## Conclusão

Levando em conta o caráter bidimensional dos planos de  $Cu - O$  e o regime de forte interação eletrônica em duas dimensões nos cupratos supercondutores, tomamos como ponto de partida um modelo com as principais características do modelo de Hubbard repulsivo[28] em duas dimensões. Em caso de uma banda semi-cheia, temos, em média, um elétron por sítio e, em um regime de forte interação eletrônica, o sistema físico é um isolante de Mott antiferromagnético.

No caso de banda semi-cheia, a superfície de Fermi de elétrons livres se apresenta em uma forma quadrada, com perfeito “nesting”, e com singularidades na densidade de estados, as chamadas singularidades de van Hove, localizadas nos seus quatro vértices. Entretanto, estamos interessados em um regime de dopagem na vizinhança de um regime de banda semi-cheia em que essas singularidades deixam de existir.

Como já chamamos a atenção, a região onde se manifesta o “pseudogap” se encontra entre os regimes de dopagem ótima e de baixa dopagem de portadores de carga. Isso fica evidente quando observamos a figura 1.3 (a). A SF, na região subdopada, apresenta uma anisotropia na densidade de estados que, em determinadas direções, apresenta um valor finito (como  $(0, 0) - (\pi, \pi)$ ) e em outras desaparece completamente (como  $((0, \pi) - (\pi, \pi))$ ), caracterizando o “pseudogap” anisotrópico.

Nessa figura (originada de experimentos do tipo ARPES) vemos que, na direção  $(0, 0) - (\pi, \pi)$ , temos uma SF com um certo grau de “nesting”, ou uma região cuja curvatura é muito pequena. Podemos ver, também, ao caminharmos na direção das bordas da SF, outras regiões com uma curvatura maior. Por essa razão, adotamos uma SF com “cantos” arredondados que, de certa forma, leva em conta esses aspectos experimentais, como mostramos na figura 2.3.

No regime de baixa dopagem em nossa SF, podemos cortar um considerável número de diagramas em um cálculo de dois “loops”, já que os processos do tipo “Umklapp” ( $g_3$ ) podem ser desprezados. Dessa forma, seguindo as convenções da “g-ologia”, os únicos processos que são relevantes para nosso modelo bidimensional são os produzidos por  $g_1$ , um acoplamento do tipo “backscattering”, e por  $g_2$ , um acoplamento do tipo frontal. O processo do tipo frontal  $g_4$  entre duas partículas associadas a um mesmo ramo da SF, também é desprezado, pois, além de aumentar bastante o número de diagramas de dois “loops” para os acoplamentos, ele só se torna decisivo para o estudo dos efeitos da separação de carga e “spin”, como tem sido demonstrado em cálculos realizados em uma dimensão [47, 30]. Em decorrência disso, a conexão com o modelo de Hubbard repulsivo é feita apenas quando tomamos  $g_1 = g_2 = U$ .

Em nosso caso bidimensional, os acoplamentos dependem apenas dos momentos ao longo da SF. Além disso, linearizamos a relação de dispersão de energia ( $\epsilon_{\mathbf{k}} = v_F(|k_{\perp}| - k_F) + \epsilon_F$ ) que depende apenas da componente do momento linear perpendicular à SF. Conseqüentemente, podemos separar as integrações duplas em uma parte ao longo da SF e em outra parte perpendicular à SF gerando inúmeras divergências logarítmicas. Apesar disso, os cálculos realizados para os acoplamentos, em duas dimensões, mesmo em uma aproximação de até um “loop”, são muito intrincadas e de difícil manuseio. Assim, adotamos a estratégia de realizar todas as demonstrações importantes em uma dimensão espacial para só, em seguida, generalizarmos os resultados encontrados para o caso bidimensional.

Usando a teoria de perturbação, calculamos duas quantidades físicas importantes: as funções irreduzíveis de uma e de duas partículas,  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$ . A função  $\Gamma^{(2)}$  está diretamente relacionada à auto-energia  $\Sigma$  dos portadores de carga. Por outro lado, a função  $\Gamma^{(4)}$  está diretamente relacionada com processos de interação entre duas partículas. Em se tratando do ponto de vista do grupo de renormalização, apenas  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$ ,  $\Gamma^{(2,1)}$  e  $\Gamma^{(0,2)}$ , apresentam singularidades logarítmicas ao nos aproximarmos dos níveis de Fermi. As demais funções irreduzíveis de  $n$  partículas, com  $n > 2$  e  $m > 2$ , não produzem nenhuma nova singularidade primitiva, como mencionamos na primeira parte do capítulo 3. Mencionamos, também, que isso é um forte indício de que nossa teoria é renormalizável. Para confirmarmos tal fato, nós fizemos uso da sistemática do grupo de renormalização, que fornece um significado de escala para o problema original. Assim, adicionamos os devidos contratermos ao nosso modelo de Lagrangiano definindo as grandezas “nuas”, que se encarregam de renormalizar todas as divergências geradas pela teoria de perturbação.

Ao efetuarmos os cálculos dos diagramas da auto-energia e das funções  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $\Gamma_{2B}^{(4)}$  até uma ordem de dois “loops”, constatamos a presença de divergências logarítmicas ou comportamentos não-analíticos, ao nos aproximarmos dos níveis de Fermi em ambos os casos dimensionais ( $d = 1, 2$ ). Assim, surge naturalmente a necessidade de fazermos prescrições para as funções renormalizadas irreduzíveis de uma e de duas partículas de modo a que elas passam a ser relacionadas corretamente, com grandezas físicas experimentalmente observáveis. Esse é o ponto chave para regularizarmos todas as divergências produzidas pelo problema original.

Seguindo nossa estratégia, primeiramente, efetuamos os cálculos para o caso unidimensional. Devido à existência de pontos fixos bem definidos para os acoplamentos, os resultados encontrados são mais, facilmente, comparáveis aos métodos de resolução exatos, como pode ser visto na referência [47]. Em cálculos de um “loop” nos acoplamentos, o peso  $Z$  da quasipartícula

tem um valor fixo e igual a um. Assim, nessa ordem de perturbação o caráter de líquido de Luttinger do sistema físico não é tão aparente. Então, passamos para o cálculo de dois “loops” nos acoplamentos que, no regime repulsivo, leva ao completo anulamento de  $Z$  quando os acoplamentos fluem para os pontos fixos. Isso demonstra a ausência de quasipartículas no sistema físico e, portanto, a impropriedade da teoria do líquido de Fermi de Landau (LFL), uma vez que, para a sua validade, devemos ter  $0 < Z < 1$ .

Devemos ressaltar, ainda, que a parte real da auto-energia, num cálculo de dois “loops”, possui uma dependência com a escala de energia típica de um líquido de Fermi marginal [63],  $Re\Sigma \sim \omega \ln(\omega)$ . Dessa forma, fica evidente que o peso  $Z$  da quasipartícula exerce um papel fundamental no processo de renormalização dos acoplamentos e, por conseqüência, em outros parâmetros físicos também. Somente esse fato já é suficiente para aguardarmos a manifestação de novas propriedades físicas, ao considerarmos correções da ordem de dois “loops”.

Ao realizarmos os cálculos de dois “loops” para  $d = 1$ , discutimos a renormalizabilidade do modelo e mostramos, também, que há o perfeito cancelamento dos diagramas de ordem  $\ln^2(\Omega/\omega)$  nos acoplamentos, ao introduzirmos grandezas “nuas” apropriadas. Fazendo-se as devidas prescrições para as funções irreduzíveis renormalizadas associadas aos acoplamentos e à auto-energia derivamos, em seguida, as devidas equações do GR para os acoplamentos renormalizados e para o peso  $Z$  da quasipartícula (que define a dimensão anômala  $\gamma$ ) que não apresentam mais nenhuma divergência logarítmica ao nos aproximarmos dos níveis de Fermi. Essas equações, por sua vez, constroem a dependência explícita dos acoplamentos e do peso  $Z$  da quasipartícula com a escala de energia  $\omega$ . Ao obtermos essas equações, mostramos que nossa teoria é, realmente, renormalizável (com o completo cancelamento dos diagramas de ordem  $\ln^2(\Omega/\omega)$ ). Assim, pode-se notar que nessas equações os acoplamentos independem explicitamente do “cutoff”  $\omega$ , condição básica para uma teoria renormalizável [64]. Dessa forma, todos

os nossos cálculos perturbativos, realizados posteriormente, foram feitos levando-se apenas em consideração aqueles diagramas cuja contribuição apresentam singularidades do tipo  $\ln(\Omega/\omega)$  na devida ordem de perturbação, já que as contribuições do tipo  $\ln^2(\Omega/\omega)$  são canceladas naturalmente.

Para compararmos nossos resultados com os resultados já conhecidos na literatura, calculamos os diversos parâmetros de ordem e suas respectivas suscetibilidades que estão diretamente associadas à diferentes instabilidades físicas do sistema. Para tanto, adicionamos ao nosso modelo de Lagrangiano inicial dois campos externos fictícios, um com simetria referente ao emparelhamento supercondutor e outro com simetria referente a uma onda de densidade que, basicamente, atuam na geração de pares de partícula-partícula e partícula-buraco, respectivamente. Como já sabíamos, esses pares de operadores geram, automaticamente, contribuições logaritmicamente divergentes. Por essa razão, adicionamos novos contratermos apropriados ao nosso modelo de Lagrangiano para que, dessa forma, pudéssemos regularizar todas as divergências produzidas por esses pares de operadores. Em seguida, calculamos perturbativamente os diagramas das funções resposta,  $\Gamma_{SC(OD)}^{B(2,1)}$ , até um “loop”, pois em dois “loops” há apenas contribuições do tipo  $\ln^2(\Omega/\omega)$  que se cancelam mutuamente.

Como vínhamos fazendo, analisamos, primeiramente, o caso em que  $d = 1$ . Assim, exploramos as simetrias de “spin” para definirmos as funções resposta simetrizadas (ou parâmetros de ordem) como onda de densidade de carga (*ODC*), como onda de densidade de “spin” (*ODS*), como supercondutividade do tipo singlete (*SCS*) e, finalmente, supercondutividade do tipo tripleto (*SCT*). Seguindo a sistemática do GR, fizemos as devidas prescrições para as funções resposta para , em seguida, derivamos as respectivas equações do GR. Usando a definição de suscetibilidade, vimos que, mesmo partindo das funções resposta simetrizadas renormalizadas, um comportamento de divergências logarítmicas ainda se faz presente. Para lidarmos com essa

nova situação não precisamos adicionar nenhum contratermo ao nosso modelo de Lagrangiano. A solução para isso foi encontrada derivando-se, de uma forma direta, uma equação do GR para as suscetibilidades simetrizadas renormalizadas. Assim, derivamos essas suscetibilidades logicamente divergentes em relação à escala de energia  $\omega$  obtendo, dessa forma, as suscetibilidades simetrizadas renormalizadas que representam o sistema físico. Isso foi feito tanto para o caso unidimensional quanto para o caso bidimensional.

Atribuindo-se diferentes valores para os acoplamentos e, ao mesmo tempo, tomando como valor inicial para todas as funções resposta o valor unitário e para todas as suscetibilidades o valor inicial nulo, construímos o diagrama de fase no espaço dos acoplamentos ao qual temos sempre duas instabilidades competindo entre si. Entretanto, sabemos, de antemão, que não há arranjos de *longo alcance* para o caso unidimensional mesmo para  $T = 0$ , pois as flutuações quânticas destroem qualquer ordenamento dessa natureza nessa dimensão. Então, argumentamos que os parâmetros de ordem divergem com uma lei de potências devido a existência de pontos fixos dos acoplamentos. Assim, a divergência nas suscetibilidade apenas significa que a devida simetria está sendo reforçada através de grandes oscilações coletivas como se pode ver na referência [47].

Encontramos, também, a conhecida linha de Luttinger para os pontos fixos para  $\bar{g}_{1R} > 0$  e  $\bar{g}_{2R} = cte$ , como valores iniciais. Para  $\bar{g}_{1R} < 0$  e  $\bar{g}_{2R} = cte$ , encontramos uma outra linha de pontos fixos. Em contraste com a linha de Luttinger, essa linha de pontos fixos, não se estabelece apenas assintoticamente, mas, sim, em poucas iterações das equações do GR para os acoplamentos. Esse diagrama de fase está de pleno acordo com os resultados obtidos por Solyom[47].

Passamos, então, para duas dimensões levando em conta que os acoplamentos dependem dos momentos ao longo da SF. Generalizando os resultados obtidos para o caso unidimensional,

obtivemos para o caso em que  $d = 2$  que, além de acopladas, as equações do GR passam a ser integro-diferenciais, tornando impossível sua resolução analítica. Através da discretização da SF, pudemos mostrar que os acoplamentos fluem para forte acoplamento no regime repulsivo, para  $\bar{g}_{1R} = \bar{g}_{2R} = 8$  como valores iniciais. Além disso, o completo anulamento do peso  $Z$  da quasipartícula faz com que os acoplamentos não continuem aumentando seu valor até divergirem, ao nos aproximarmos da SF. Nossos resultados indicam a existência de patamares de valores constantes indicando uma fase estacionária para as equações do fluxo dos acoplamentos. Entretanto, devido à sensibilidade desses patamares ao processo de discretização não podemos afirmar que estamos nos aproximando, mesmo que assintoticamente, dos pontos fixos da teoria.

Em seguida, passamos para o cálculo dos parâmetros de ordem e suas respectivas susceptibilidades para esse caso bidimensional. Devido a uma simetria intrínseca de nosso modelo, surgem algumas simetrias dos acoplamentos em relação a certas escolhas dos momentos ao longo da SF, isto é, podemos simetrizar as funções resposta renormalizadas em relação ao sinal da componente paralela ao longo da SF. Isso nos permite definir outras funções resposta simetrizadas com significado físico. Simetrias como onda de densidade de carga dos tipos s e d ( $ODC\pm$ ), onda de densidade de “spin” dos tipos s e d ( $ODS\pm$ ), supercondutividade singlete dos tipos s e d ( $SCS\pm$ ) e, finalmente, supercondutividade tripleto dos tipos s e d ( $SCT\pm$ ). As simetrias  $ODC+$  e  $ODS+$  são as tão conhecidas onda de densidade de carga e de “spin”, respectivamente, e são amplamente medidas experimentalmente em vários sistemas físicos[54]. As simetrias  $SCS+$  e  $SCT+$  estão associadas às fases supercondutoras do tipo singlete e tripleto, respectivamente, com simetria do tipo s. As simetrias  $ODC-$  e  $ODS-$  estão associadas com os chamados “flux-phases” ou correntes de carga e de “spin”. Finalmente, temos as supercondutividades dos tipos singlete e tripleto do tipo d  $SCS-$  e  $SCT-$ , respectivamente, que estão associadas diretamente com a supercondutividade com uma simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$ , como se

observa nos cupratos supercondutores.

Ao resolvermos as equações do GR para essas quantidades, no regime repulsivo, constatamos várias suscetibilidades indo para pontos fixos que não são sensíveis ao processo de discretização. Isso significa que, mesmo não tendo pontos fixos estáveis para os acoplamentos, os parâmetros de ordem são finitos e essas instabilidades não são reforçadas. A única suscetibilidade que, aparentemente, diverge é a do tipo  $ODS+$ . Essa instabilidade é reforçada pelo fato do vetor de transferência de momento ser igual ao vetor de “nesting” da SF ( $\mathbf{q} = \mathbf{Q}^* = (0, 2k_F)$ ), reforçando as flutuações antiferromagnéticas como se pode ver na figura 5.12 (a). Entretanto, diferentemente de uma dimensão, não podemos alegar a existência de pontos fixos nos acoplamentos para que essa divergência ocorra como uma lei de potências. Não obstante, um fato interessante ocorre ao compararmos a ordem de teoria de perturbação. Como se pode ver através da figura 5.13 (a) ao passarmos de um “loop” para dois “loops” a divergência acontece mais tardiamente com relação ao passo do GR ( $l$ ). Dessa forma, esperamos que, com o aumento da ordem na teoria de perturbação, essa divergência ocorra para valores de  $l$  cada vez maiores ou quando  $\omega \rightarrow 0$ .

Contudo, para estudarmos as implicações físicas desses resultados devemos, de alguma forma, associar a escala de energia  $\omega$  com a temperatura  $T$ . Vários estudos têm mostrado que podemos fazer essa analogia, haja visto que a variação na escala de energia  $\omega$  e a variação na temperatura  $T$  têm um efeito semelhante sobre as equações do GR para valores muito pequenos de temperatura.

Como a divergência da suscetibilidade  $ODS+$  ocorre para valores cada vez maiores de  $l$  significa que somente no limite  $T \rightarrow 0$ , poderá haver uma transição de fase para uma fase antiferromagnética, o que é perfeitamente aceitável. Dessa forma, fica evidente que o papel do “nesting” perfeito da SF é reforçar as flutuações antiferromagnéticas. Entretanto, seria

interessante, em nosso caso, saber se a instabilidade do tipo  $SCS-$  compete ou se associa com a instabilidade do tipo  $ODS+$ , pois, assim, poderíamos investigar se, sob determinadas condições, surge com mais força a supercondutividade do tipo  $d_{x^2-y^2}$ . Para tanto, é necessário reforçarmos as flutuações do tipo partícula-partícula tornando a instabilidade supercondutora do tipo  $SCS-$  cada vez mais pronunciada. Em se tratando de nosso modelo, devemos incluir os acoplamentos do tipo Cooper associados aos segmentos perpendiculares da SF. Esses efeitos são de difícil implementação devido à mistura dos segmentos da SF e serão tema de um trabalho futuro.

Uma outra possibilidade, seria explorarmos os efeitos da curvatura da SF sobre as equações do GR. Alguns trabalhos têm explorado esse aspecto[33, 40] demonstrando que a SF, ao adquirir uma curvatura por meio da dopagem, tem seu perfeito “nesting” destruído. À medida que a curvatura se torna mais pronunciada, as flutuações antiferromagnéticas são suprimidas e a instabilidade supercondutora é reforçada fazendo com que as simetrias  $ODS+$  e  $SCS-$  se tornem cada vez mais competitivas. Então, em uma certa SF com uma curvatura crítica, ocorre a transição para uma fase supercondutora. Infelizmente, esses trabalhos, que utilizam o método do GR funcional, desprezam os efeitos da auto-energia ao calcularem apenas diagramas até a ordem de um “loop”. Além disso, a curvatura da SF surge apenas por efeitos de dopagem e não pela renormalização da SF. O tratamento da renormalização da SF constitui-se em um verdadeiro desafio e um outro aspecto a ser explorado para darmos continuidade ao nosso trabalho. Uma extensa análise sobre a topologia da SF e os ingredientes necessários para o emparelhamento elétron-elétron com simetria do tipo  $d_{x^2-y^2}$  pode ser encontrada na referência[65]. Apesar de toda a dificuldade em se detectar a verdadeira SF dos cupratos supercondutores, em baixas dopagens (por experimentos de alta resolução como o ARPES), muito já se sabe sobre a forte ligação existente entre as fortes correlações eletrônicas e a supercondutividade que

influenciam fortemente a topologia da SF[66].

Discutimos, também, o fato de atribuirmos aos acoplamentos valores de acoplamento moderado. Poder-se-ia argumentar que as equações do GR obtidas apresentam um comportamento apenas característico destes valores, ou seja, o comportamento físico de tal sistema seria diferente daquele que se encontraria num regime de fraco acoplamento. Na verdade, o que ocorre é que estamos limitados pelo processo de discretização da SF e, por conseqüência, não podemos ir além de  $l = 2.8$ . Em decorrência disso, poderíamos, também, questionar o que acontece se acrescentarmos correções de ordens superiores no regime perturbativo. Para derrubarmos esse argumento, plotamos um gráfico mostrando<sup>1</sup> que, se partirmos de fraco acoplamento até um acoplamento moderado, o comportamento das suscetibilidades surge como uma tendência natural e não como algo unicamente provocado pela escolha inicial dos valores iniciais dos acoplamentos, em um regime moderado. Em outras palavras, estamos apenas adiantando o regime de forte acoplamento para que o passo do GR (1) não exceda o valor limite de  $l = 2.8$ . Finalmente, construímos o diagrama de fase atribuindo diversos valores iniciais para os acoplamentos e mantendo os mesmos valores iniciais para os parâmetros de ordem e para as respectivas suscetibilidades. Como resultado, apenas uma suscetibilidade aparece pronunciada em diversas regiões do espaço dos acoplamentos.

Para valores iniciais positivos dos acoplamentos entre  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} > 0$  e  $\bar{g}_{1R} = 2\bar{g}_{2R}$  a suscetibilidade do tipo *ODS+* aparece de forma pronunciada. Isso quer dizer que, nesse regime repulsivo, as flutuações antiferromagnéticas estão sendo reforçadas. Já a região compreendida entre  $\bar{g}_{1R} > 2\bar{g}_{2R}$  e  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} < 0$  apresenta um reforço nas flutuações supercondutoras do tipo tripleto com simetria s. Por outro lado, na região em que temos valores iniciais entre  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} < 0$  e  $\bar{g}_{1R} < 2\bar{g}_{2R}$  há um reforço nas flutuações supercondutoras do tipo singlete

---

<sup>1</sup>Veja figura 5.13 (b).

com simetria  $s$ . Finalmente, na região com valores iniciais para os acoplamentos compreendidos entre  $\bar{g}_{1R} > 2\bar{g}_{2R}$  e  $\bar{g}_{1R} = 0$  e  $\bar{g}_{2R} > 0$  a suscetibilidade reforçada é a do tipo  $ODC+$ .

Além das questões já levantadas que podemos explorar, podemos destacar os efeitos da adição dos acoplamentos  $g_3$  e  $g_4$  sobre as equações do GR. Esses acoplamentos aumentam enormemente o número de diagramas de dois “loops”, pois ambos podem aparecer misturados aos acoplamentos  $g_1$  e  $g_2$  e entre si. Por outro lado, também devemos ressaltar a dificuldade na implementação numérica, pois o acoplamento  $g_3$  é tal que a diferença entre os momentos iniciais e finais das partículas é igual ao vetor da rede recíproca. Assim, é necessário desenvolver um algoritmo que não passe duas vezes pelo mesmo valor ao percorrermos a SF.

# Apêndice A

## Modelo de Hamiltoniano interagente $SU(2)$ invariante

Para derivarmos nosso modelo, partimos de um modelo de Hamiltoniano interagente mais geral que o modelo de Hamiltoniano interagente de Hubbard:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\substack{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4}} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) a_{\mathbf{r}_4\sigma}^\dagger a_{\mathbf{r}_3\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{r}_2\sigma'} a_{\mathbf{r}_1\sigma} \quad (\text{A.1})$$

Entretanto, é necessário demonstrarmos que esse Hamiltoniano de interação, mais geral, também é  $SU(2)$  invariante. Na seção 2.1 definimos o operador projeção de “spin” (2.3) para reescrever a parte interagente do Hamiltoniano de Hubbard na sua forma  $SU(2)$  invariante. Entretanto, isso somente foi possível devido ao fato da parte interagente lidar apenas com a repulsão eletrônica num mesmo sítio. Aqui, podemos ver que o Hamiltoniano interagente, na forma mais geral, também é  $SU(2)$  invariante se causarmos uma rotação no eixo de quantização de “spin” tal como:

$$\tilde{a}_{\mathbf{r}'\sigma} = \sum_{\sigma'} \tau_{\sigma\sigma'} a_{\mathbf{r}'\sigma'} \quad e \quad \tilde{a}_{\mathbf{r}\sigma}^\dagger = \sum_{\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma'}^\dagger \tau_{\sigma'\sigma}^* \quad (\text{A.2})$$

onde a matriz  $\tau$  é uma matriz de rotação pertencente ao grupo  $SU(2)$ . Dessa forma, devemos realizar o seguinte cálculo:

$$\sum_{\sigma} \tilde{a}_{\mathbf{r}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\mathbf{r}'\sigma} = \sum_{\sigma\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma'}^\dagger \tau_{\sigma'\sigma}^* \tau_{\sigma\sigma'} a_{\mathbf{r}'\sigma'}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma'}^\dagger \left( \sum_{\sigma} \tau_{\sigma'\sigma}^* \tau_{\sigma\sigma'} \right) a_{\mathbf{r}\sigma'} \\
&= \sum_{\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{r}\sigma'}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde usamos o fato de que se a matriz  $\tau$  pertence ao grupo  $SU(2)$ , então devemos ter que  $\left( \sum_{\sigma} \tau_{\sigma'\sigma}^* \tau_{\sigma\sigma'} \right) = [\tau]_{\sigma'\sigma'}^2 = 1$ . Para uma melhor visualização, podemos verificar esta relação para as matrizes de Pauli geradoras das rotações no espaço dos “spins” (2.4). Assim, vemos claramente que a soma dos operadores  $\sum_{\sigma} a_{\mathbf{r}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{r}\sigma}$  é  $SU(2)$  invariante. Não é difícil ver que, usando as relações de anticomutação (2.5), podemos reescrever o Hamiltoniano (A.1) de forma a obtermos pares de somas de “spins” como os da demonstração acima e, dessa forma, vemos que nosso Hamiltoniano de interação é  $SU(2)$  invariante.

# Apêndice B

## Hamiltoniano de interação no espaço dos momentos

Para realizarmos os cálculos em teoria de perturbação, devemos escrever nosso Hamiltoniano no espaço dos momentos e no limite termodinâmico. Para isso, devemos fazer a transformada de Fourier, como fizemos nas relações (2.10). Assim, nosso Hamiltoniano de interação poderá ser reescrito da seguinte forma:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} \left( \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4)} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \right) \times \sum_{\sigma\sigma'} a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}_4) a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}_3) a_{\sigma'}(\mathbf{k}_2) a_{\sigma}(\mathbf{k}_1) \quad (\text{B.1})$$

a parte entre parêntesis pode ser reescrita resultando:

$$\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4)} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \int d\mathbf{r}_4 \left( \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) - \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) + \mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4))} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \right) e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{r}_4} \quad (\text{B.2})$$

Além disso, por razões de simplificação e para não nos distanciarmos muito do modelo de Hubbard, devemos ter que a energia de interação seja um invariante translacional. Assim, se deslocarmos a origem do sistema para a posição de  $\mathbf{r}_4$  devemos ter que  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, 0)$ . Logo, a integral entre parêntesis acima pode ser reescrita como:

$$\int d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 d\mathbf{r}'_3 e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}'_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}'_3)} U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3, 0) = g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (\text{B.3})$$

onde usamos o fato de que, para um dado  $\mathbf{r}_4$ , devemos integrar em todas as outras posições e, dessa forma, podemos fazer a transformação de coordenadas como foi feita acima e  $g$  é o acoplamento no espaço dos momentos. Assim, podemos pensar que a integral entre parêntesis independe da coordenada de  $\mathbf{r}_4$ , uma vez que estamos fixando a origem do sistema de coordenadas em cima da coordenada  $\mathbf{r}_4$  e a integral desta última coordenada fará apenas com que haja conservação dos momentos, ou seja:

$$\int d\mathbf{r}_4 e^{i(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{r}_4} = (2\pi)^d \delta(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (\text{B.4})$$

Dessa forma, usando a equação (2.14) poderemos escrever o Hamiltoniano da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \epsilon_{\mathbf{p}} a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) a_{\sigma}(\mathbf{p}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\sigma'}(\mathbf{q}) a_{\sigma}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Agora, para efetuarmos os cálculos em teoria de perturbação, devemos escrever o Hamiltoniano na representação de Heisenberg como se segue:

$$\begin{aligned} H(t) = & e^{iHt} H e^{-iHt} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \epsilon_{\mathbf{p}} a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) a_{\sigma}(\mathbf{p}, t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, t) a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) a_{\sigma'}(\mathbf{q}, t) a_{\sigma}(\mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

# Apêndice C

## Cálculo de alguns diagramas

Para ilustrarmos melhor como obtivemos os resultados dos cálculos dos diagramas, vamos calcular um diagrama da auto-energia, um do canal  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e, por fim, um do canal  $\Gamma_{2B}^{(4)}$  em uma e duas dimensões.

### C.1 Cálculo em uma dimensão

Em uma dimensão, vimos que os acoplamentos não dependem dos momentos e, portanto, podem ser colocados para fora de qualquer integração. Assim, vamos utilizar as “bolhas” que definimos no capítulo 2 através das equações (2.31) para escrevermos:

$$i\chi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P, P_0) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(k; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k - P; k_0 + P_0) = \frac{\theta(P + 2k_F + \lambda)\theta(-2k_F - P)}{4\pi v_F}$$

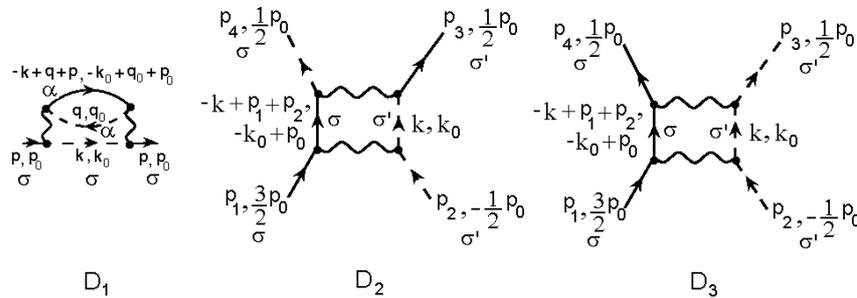


Figura C.1: Diagramas:  $D_1$  referente à auto-energia,  $D_2$  referente ao canal  $\Gamma_{1B}^{(4)}$  e  $D_3$  referente ao canal  $\Gamma_{2B}^{(4)}$ .

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \ln \left( \frac{\Omega + v_F(P + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{-v_F(P + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega + v_F(P + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{-v_F(P + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] + \\
& \left[ \ln \left( \frac{\Omega - v_F(P + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{v_F(P + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega - v_F(P + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{v_F(P + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] \\
& \times \frac{\theta(P + 2k_F + \lambda)\theta(-2k_F - P)}{4\pi v_F} \\
i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P, P_0) &= \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(k; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(-k + P; -k_0 + P_0) = \\
& - \frac{\theta(P)\theta(\lambda - P)}{4\pi v_F} \left[ \ln \left( \frac{\Omega - v_F P - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{v_F P - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega - v_F P + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{v_F P + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] \\
& - \frac{\theta(P + \lambda)\theta(-P)}{4\pi v_F} \left[ \ln \left( \frac{\Omega + v_F P - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{-v_F P - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega + v_F P + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{-v_F P + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] \quad (C.1)
\end{aligned}$$

Agora, usando as regras de Feynman definidas no capítulo 2 podemos escrever as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (-)(-ig_{1B})^2 \sum_{\alpha} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{dq_0}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k + q + p; -k_0 + q_0 + p_0) iG_{(-)\alpha}^{(0)}(k; k_0) \\
& \quad \times iG_{(-)\alpha}^{(0)}(q; q_0) \quad (C.2)
\end{aligned}$$

$$D_2 = (-ig_{1B})(-ig_2) \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k + p_1 + p_2; -k_0 + p_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k; k_0) \quad (C.3)$$

$$D_3 = (-ig_{2B})^2 \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k + p_1 + p_2; -k_0 + p_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k; k_0) \quad (C.4)$$

onde o sinal menos entre parêntesis em  $D_1$  representa o sinal devido ao “loop”. Conseqüentemente, se usarmos as definições (C.1), poderemos reescrevê-las da seguinte maneira:

$$D_1 = (-)(-ig_{1B})^2 \sum_{\alpha} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{dq_0}{2\pi} i\Pi_{\sigma\alpha}^{(0)}(q + p, q_0 + p_0) iG_{(-)\alpha}^{(0)}(q; q_0) \quad (C.5)$$

$$D_2 = (-ig_{1B})(-ig_2) i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(p_1 + p_2, p_0) \quad (C.6)$$

$$D_3 = (-ig_{2B})^2 i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(p_1 + p_2, p_0) \quad (C.7)$$

Aparentemente, as funções de Green estão trocadas com relação ao ponto de Fermi em  $D_1$ , quando reescrevemos em função de  $\Pi^{(0)}$ . Entretanto, se calcularmos essa integral veremos que teremos como resultado o mesmo valor que na expressão para  $\Pi^{(0)}$  na equação (C.1) resultando na equação acima.

Para chegarmos ao resultado desejado, devemos, a partir de agora, fixar os momentos externos nos pontos de Fermi para todos esses diagramas, ou seja,  $p = p_1 = k_F$  e  $p_2 = -k_F$ . Ao fazermos isso chegamos às seguintes expressões:

$$D_1 = \frac{ig_{1B}^2}{8\pi^2v_F^2} \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \Omega \right] \quad (\text{C.8})$$

$$D_2 = \frac{ig_{1B}g_{2B}}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$D_3 = \frac{ig_{2B}^2}{2\pi v_F} \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \quad (\text{C.10})$$

onde mantivemos apenas a parte real dos logarítmos.

## C.2 Cálculo em duas dimensões

O caso bidimensional apresenta uma particularidade que é a dependência dos acoplamentos em relação aos momentos. No capítulo 2, fizemos uma certa aproximação que representa muito bem essa dependência com os momentos. Ao introduzirmos um “cutoff”  $\lambda$ , restringimos uma região muito próxima da SF a qual os processos podem acontecer. Assim, se tomarmos  $\lambda$  pequeno o bastante, podemos considerar que os acoplamentos dependem somente dos momentos paralelos ao longo da SF. Além disso, devido à forma de nossa SF, linearizamos a relação de dispersão da energia que depende somente da componente perpendicular à SF. Conseqüente-

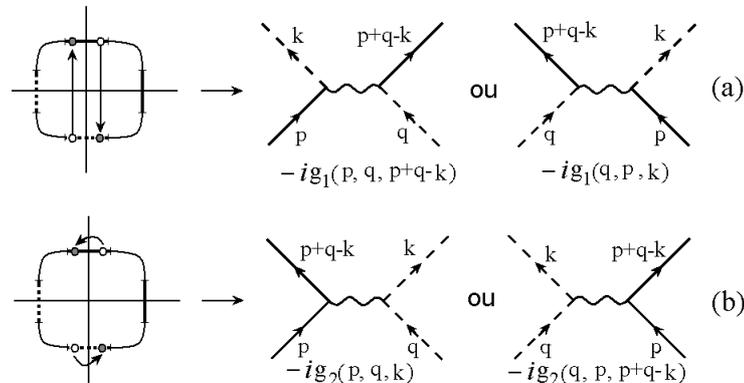


Figura C.2: Interações dependentes dos momentos no caso bidimensional.

mente, ganhamos muito com isso analiticamente, pois as integrações serão separáveis em parte paralela para os acoplamentos e parte perpendicular ao integrarmos as funções de Green de uma partícula livre. Dessa forma, vamos redefinir as equações (C.1) de modo a que:

$$\begin{aligned}
i\chi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P_{\perp}, P_0) &= \int \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(k_{\perp}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k_{\perp} - P_{\perp}; k_0 + P_0) = \\
&\frac{\theta(P_{\perp} + 2k_F + \lambda)\theta(-2k_F - P_{\perp})}{4\pi v_F} \left[ \ln \left( \frac{\Omega + v_F(P_{\perp} + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{-v_F(P_{\perp} + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \right. \\
&\ln \left( \frac{\Omega + v_F(P_{\perp} + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{-v_F(P_{\perp} + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \left. \right] + \left[ \ln \left( \frac{\Omega - v_F(P_{\perp} + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{v_F(P_{\perp} + 2k_F) - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \right. \\
&\ln \left. \left( \frac{\Omega - v_F(P_{\perp} + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{v_F(P_{\perp} + 2k_F) + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] \frac{\theta(P_{\perp} + 2k_F + \lambda)\theta(-2k_F - P_{\perp})}{4\pi v_F} \\
i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(P_{\perp}, P_0) &= \int \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(k_{\perp}; k_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(-k_{\perp} + P_{\perp}; -k_0 + P_0) = \\
&-\frac{\theta(P_{\perp})\theta(\lambda - P_{\perp})}{4\pi v_F} \left[ \ln \left( \frac{\Omega - v_F P_{\perp} - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{v_F P_{\perp} - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega - v_F P_{\perp} + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{v_F P_{\perp} + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right] \\
&-\frac{\theta(P_{\perp} + \lambda)\theta(-P_{\perp})}{4\pi v_F} \left[ \ln \left( \frac{\Omega + v_F P_{\perp} - P_0 + \epsilon_F - i\delta}{-v_F P_{\perp} - P_0 + \epsilon_F - i\delta} \right) + \ln \left( \frac{\Omega + v_F P_{\perp} + P_0 - \epsilon_F - i\delta}{-v_F P_{\perp} + P_0 - \epsilon_F - i\delta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.11}$$

e, segundo as regras de Feynman, os diagramas da figura C.1 serão dados por:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (-) \int_{\mathcal{D}} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{dq_{1\parallel}}{2\pi} (-ig_{1B}(-k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, k_{\parallel}, q_{1\parallel})) (-ig_{1B}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel})) \\
&\sum_{\alpha} \int \frac{dq_{1\perp}}{2\pi} \frac{dq_{01}}{2\pi} \int \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k_{\perp} + q_{\perp} + p_{\perp}; -k_0 + q_0 + p_{01}) iG_{(-)\alpha}^{(0)}(k_{\perp}; k_0) \\
&\times iG_{(-)\alpha}^{(0)}(q_{1\perp}; q_{01})
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \int_{\mathcal{D}_1} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} (-ig_{1B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel})) (-ig_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})) \\
&\int \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k_{\perp} + p_{1\perp} + p_{2\perp}; -k_0 + p_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k_{\perp}; k_0)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \int_{\mathcal{D}_1} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} (-ig_{2B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel})) (-ig_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel})) \\
&\int \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \frac{dk_0}{2\pi} iG_{(+)\sigma}^{(0)}(-k_{\perp} + p_{1\perp} + p_{2\perp}; -k_0 + p_0) iG_{(-)\sigma'}^{(0)}(k_{\perp}; k_0)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

onde os intervalos de integração  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  podem ser encontrados no Apêndice G. Analogamente ao caso unidimensional, vamos usar as definições (C.11) para reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$D_1 = (-) \int_{\mathcal{D}} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{dq_{1\parallel}}{2\pi} (-ig_{1B}(-k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, k_{\parallel}, q_{1\parallel})) (-ig_{1B}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}))$$

$$\sum_{\alpha} \int \frac{dq_{1\perp}}{2\pi} \frac{dq_{01}}{2\pi} i\Pi_{\sigma\alpha}^{(0)}(q_{1\perp} + p_{\perp}, q_{01} + p_0) iG_{(-)\alpha}^{(0)}(q_{1\perp}; q_{01}) \quad (\text{C.15})$$

$$D_2 = \int_{\mathcal{D}_1} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} (-ig_{1B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel})) (-ig_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}))$$

$$i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(p_{1\perp} + p_{2\perp}, p_0) \quad (\text{C.16})$$

$$D_3 = \int_{\mathcal{D}_1} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} (-ig_{2B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel})) (-ig_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}))$$

$$i\Pi_{\sigma\sigma'}^{(0)}(p_{1\perp} + p_{2\perp}, p_0) \quad (\text{C.17})$$

onde usamos a convenção de dependência com os momentos mostrada na figura C.2. Agora, se fixarmos a componente perpendicular dos momentos externos tal que  $p_{\perp} = p_{1\perp} = k_F$  e  $p_{2\perp} = -k_F$  para integrarmos a auto-energia[62] e obtermos o resultado dos demais diagramas teremos que:

$$D_1 = \frac{i}{32\pi^4 v_F^2} \int_{\mathcal{D}} dk_{\parallel} dq_{1\parallel} \left[ 2g_{1B}(-k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel}, k_{\parallel}, q_{1\parallel}) g_{1B}(p_{\parallel}, q_{1\parallel}, k_{\parallel}) \right]$$

$$\times \left[ (p_0 - \epsilon_F) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) + \Omega \right] \quad (\text{C.18})$$

$$D_2 = \frac{-i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_1} dk_{\parallel} g_{1B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel}) g_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \quad (\text{C.19})$$

$$D_3 = \frac{-i}{4\pi^2 v_F} \int_{\mathcal{D}_1} dk_{\parallel} g_{2B}(-k_{\parallel} + p_{1\parallel} + p_{2\parallel}, k_{\parallel}, p_{3\parallel}) g_{2B}(p_{1\parallel}, p_{2\parallel}, k_{\parallel}) \ln \left( \frac{\Omega}{p_0 - \epsilon_F} \right) \quad (\text{C.20})$$

onde, novamente, mantivemos apenas a parte real dos logaritmos.

## Apêndice D

# Relações entre as Funções de Green e as Funções Irredutíveis

Neste apêndice, devemos buscar a relação entre as funções de Green de uma e de duas partículas e suas respectivas funções irredutíveis. Vamos realizar todos os cálculos no espaço dos momentos para nos aproximarmos tanto quanto possível de nossos cálculos. Entretanto, ao fazermos isso, a conservação de momentos das pernas externas dos objetos que estamos definindo ( $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}, etc.$ ) não fica evidente, mas sim implícita, devendo sempre conservar os momentos das pernas externas desses objetos. Uma vez que tenhamos chamado a atenção para tal fato, podemos, agora, definir a seguinte transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} \Gamma[\psi_{(+)}^\dagger, \psi_{(+)}, \psi_{(-)}^\dagger, \psi_{(-)}] = & W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}] - \sum_{\delta} \left\{ \int_{\mathbf{k}, t} \langle \psi_{(+)\delta}^\dagger(\mathbf{k}, t) \rangle \eta_{\delta}(\mathbf{k}, t) \right. \\ & + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{\eta}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \langle \psi_{(+)\delta}(\mathbf{k}, t) \rangle + \int_{\mathbf{k}, t} \langle \psi_{(-)\delta}^\dagger(\mathbf{k}, t) \rangle j_{\delta}(\mathbf{k}, t) \\ & \left. + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{j}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \langle \psi_{(-)\delta}(\mathbf{k}, t) \rangle \right\} \end{aligned} \quad (D.1)$$

conseqüentemente, é fácil ver que:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}, t') \rangle} = \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t'), \quad (D.2)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t') \rangle} = -\eta_{\sigma}(\mathbf{p}, t'), \quad (D.3)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}, t') \rangle} = \bar{j}_{\sigma}(\mathbf{p}, t'), \quad (D.4)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi_{(-)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t')\rangle} = -j_\sigma(\mathbf{p}, t'). \quad (\text{D.5})$$

por outro lado, sabemos que:

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}, t')\rangle, \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\delta W}{\delta\eta_\sigma(\mathbf{p}, t')} = -\langle\psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t')\rangle, \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{j}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \langle\psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}, t')\rangle, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\delta W}{\delta j_\sigma(\mathbf{p}, t')} = -\langle\psi_{(-)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t')\rangle. \quad (\text{D.9})$$

Na verdade, queremos chegar a uma equação que relacione a função irreduzível com a respectiva função de Green. Assim, podemos escolher qualquer uma das equações (D.6), (D.7), (D.8) e (D.9) para isso. Entretanto, para simplificar vamos escolher apenas a equação (D.6) para nossa demonstração que derivamos<sup>1</sup> com relação a  $\langle\psi_{(+)\sigma}\rangle$  para obtermos a seguinte equação:

$$\frac{\delta}{\delta\langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}', t)\rangle} \frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta(t' - t) \quad (\text{D.10})$$

que se reduz a:

$$\sum_{\sigma'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt'' \frac{\delta\eta_{\sigma'}(\mathbf{q}, t'')}{\delta\langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}', t)\rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\sigma'}(\mathbf{q}, t'')\delta\bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta(t' - t) \quad (\text{D.11})$$

que devido à equação (D.3) podemos reescrevê-la como se segue:

$$\begin{aligned} -\sum_{\sigma'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt'' \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}', t)\rangle\delta\langle\psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{q}, t'')\rangle} & \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\sigma'}(\mathbf{q}, t'')\delta\bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} \\ & = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta(t' - t) \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Definindo, agora, a função irreduzível de uma partícula como sendo:

$$\Gamma_{(+)\sigma\sigma'}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) = -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}', t)\rangle\delta\langle\psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{q}, t'')\rangle} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{q}, t'')\rangle\delta\langle\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}', t)\rangle} \quad (\text{D.13})$$

---

<sup>1</sup>A princípio, de uma forma mais geral, poderíamos derivar qualquer uma das fontes, mas como o lado direito não pode ser nulo, devemos derivar somente em relação àquela fonte na qual o resultado final implique a identidade que desejarmos.

que juntamente com a equação (2.38) nos permite reescrever a equação (D.12) como se segue:

$$\sum_{\sigma'} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dt'' \left[ \Gamma_{(+)\sigma\sigma'}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \right] G_{(+)\sigma\sigma'}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, t' - t'') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(t' - t) \quad (\text{D.14})$$

e esta última equação nos permite identificar:

$$G_{(+)\sigma\sigma'}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) = \Gamma_{(+)\sigma\sigma'}^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}', t'' - t) \quad (\text{D.15})$$

Uma vez que relacionamos a função de Green de uma partícula com a respectiva função irreduzível vamos, agora, em busca da relação entre a função de Green de duas partículas e a sua respectiva função irreduzível. Como vimos antes, neste caso, temos duas funções irreduzíveis  $\Gamma_1^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$ . Entretanto, a demonstração para uma função irreduzível é análoga à demonstração para a outra e, por essa razão, vamos fazer a demonstração apenas para uma delas. Assim, vamos escolher demonstrar a relação entre  $G_2^{(4)}$  e  $\Gamma_2^{(4)}$  que se inicia através da derivação da equação (D.6) com relação a  $\langle \psi_{(+)} \rangle$  resultando em:

$$\frac{\delta}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \delta(t' - t_1) \quad (\text{D.16})$$

que usando as propriedades de derivação funcional se reduz a:

$$\sum_{\sigma'} \int \frac{d^d p_4}{(2\pi)^d} \int dt_4 \frac{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4)}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \delta(t' - t_1) \quad (\text{D.17})$$

que através da equação (D.3) podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$-\sum_{\sigma'} \int \frac{d^d p_4}{(2\pi)^d} \int dt_4 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \delta(t' - t_1) \quad (\text{D.18})$$

Agora, se derivamos a equação acima com relação a  $\langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle$  e lembrando que estamos lidando com variáveis de Grassmann, teremos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} \left[ \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \right. \\
& \times \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} + \sum_{\delta} \int_{\mathbf{q}, t''} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \\
& \left. \times \frac{\delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'') \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} \right] = 0 \quad (\text{D.19})
\end{aligned}$$

Para chegarmos à definição de  $\Gamma_2^{(4)}$  devemos derivar mais uma vez com relação a  $\langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle$  resultando:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} \left[ \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \right. \\
& \times \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} + \sum_{\gamma} \int_{\mathbf{k}, t''} \left[ \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \right. \\
& \times \frac{\delta j_\gamma(\mathbf{k}, t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta j_\gamma(\mathbf{k}, t'') \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} \\
& + \sum_{\delta} \int_{\mathbf{q}, t''} \frac{\delta}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle} \right) \\
& \frac{\delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'')}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} + \sum_{\delta \gamma} \int_{\mathbf{q}, t''} \int_{\mathbf{k}, t'''} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \\
& \left. \frac{\delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta j_\gamma(\mathbf{k}, t''') \delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'') \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} \right] = 0 \quad (\text{D.20})
\end{aligned}$$

as expressões que possuem derivadas do tipo  $\delta^3 W$  não contribuirão para os cálculos, pois sempre são nulos devido ao nosso modelo de Lagrangiano e, portanto, podem ser desprezadas. Agora, se consideramos as relações de  $\Gamma$  com as fontes representadas pelas equações (D.2), (D.3), (D.4) e (D.5) podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \\
& \times \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} = \sum_{\sigma' \delta \gamma} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} \int_{\mathbf{q}, t''} \int_{\mathbf{k}, t'''} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \\
& \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\delta}(\mathbf{q}, t'') \rangle \delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{k}, t''') \rangle}
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\delta^4 W}{\delta j_\gamma(\mathbf{k}, t''') \delta \bar{j}_\delta(\mathbf{q}, t'') \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}_4, t_4) \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t')} \quad (\text{D.21})$$

Definindo:

$$i\Gamma_{2\alpha\beta\sigma\sigma'}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}, \{t_i\}) = \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\beta}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\alpha}^\dagger(\mathbf{p}_3, t_3) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}(\mathbf{p}_1, t_1) \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}_4, t_4) \rangle} \quad (\text{D.22})$$

Agora, se usarmos as definições (2.38), (2.39) e (D.13), se fizermos a mudança de variável no lado direito da equação de  $(\mathbf{p}_4, t_4)$  para  $(\mathbf{p}', t)$ , se multiplicarmos ambos os lados da equação (D.21) por  $G_{(+)\rho\rho}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'', t_1 - \bar{t})$ ,  $G_{(-)\phi\phi}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}', t_2 - \bar{\bar{t}})$  e  $G_{(-)\theta\theta}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3, \bar{\bar{\bar{t}}} - t_3)$ , se integrarmos em relação a  $(\mathbf{p}_1, t_1)$ ,  $(\mathbf{p}_2, t_2)$  e  $(\mathbf{p}_3, t_3)$ , se somarmos sobre os “spins”  $\rho, \phi, \theta$  e, finalmente, se usarmos a equação (D.14), podemos chegar à seguinte equação:

$$\begin{aligned} iG_{2\rho\phi\theta\sigma}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'', \mathbf{k}', \mathbf{q}', t', \bar{t}, \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{\bar{t}}}) &= \int_{\mathbf{p}_1, t_1} \int_{\mathbf{p}_2, t_2} \int_{\mathbf{p}_3, t_3} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} iG_{(+)\rho\rho}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'', t_1 - \bar{t}) \\ &iG_{(-)\phi\phi}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}', t_2 - \bar{\bar{t}}) \left( i\Gamma_{2\rho\phi\theta\sigma}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}, \{t_i\}) \right) iG_{(-)\theta\theta}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3, \bar{\bar{\bar{t}}} - t_3) iG_{(+)\sigma\sigma}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}, t_4 - t') \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

onde colocamos os devidos fatores de  $i$  para adequar às regras de Feynman e o índice que aparece na função irreduzível é tal que  $i = 1, 2, 3, 4$ . Analogamente, é possível chegar a uma relação similar para  $\Gamma_1^{(4)}$  por intermédio da equação (D.8) resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned} iG_{1\rho\phi\theta\sigma}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'', \mathbf{k}', \mathbf{q}', t', \bar{t}, \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{\bar{t}}}) &= \int_{\mathbf{p}_1, t_1} \int_{\mathbf{p}_2, t_2} \int_{\mathbf{p}_3, t_3} \int_{\mathbf{p}_4, t_4} iG_{(+)\rho\rho}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'', t_1 - \bar{t}) \\ &iG_{(-)\phi\phi}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}', t_2 - \bar{\bar{t}}) \left( i\Gamma_{1\rho\phi\theta\sigma}^{(4)}(\{\mathbf{p}_i\}, \{t_i\}) \right) iG_{(+)\theta\theta}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_3, \bar{\bar{\bar{t}}} - t_3) iG_{(-)\sigma\sigma}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}, t_4 - t') \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

onde vemos, claramente, a relação entre as funções de Green de duas partículas e suas respectivas funções irreduzíveis.

# Apêndice E

## Demonstração da Equação de Schwinger-Dyson para Auto-energia

Para demonstrarmos as equações de Schwinger-Dyson de uma forma mais simples, faremos uso do funcional gerador no caso de um campo bosônico como se segue:

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi \exp i \{S[\phi] + j\phi\} \quad (\text{E.1})$$

Agora, podemos usar a seguinte propriedade das integrais funcionais:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \exp i \{S[\phi] + j\phi\} = i \int \mathcal{D}\phi \left( \frac{\delta S}{\delta\phi} [\phi] + j \right) \exp i \{S[\phi] + j\phi\} = 0 \quad (\text{E.2})$$

fazendo  $S[\phi] = S[\frac{-i\delta}{\delta j}]$  chegamos à equação de Schwinger-Dyson para bósons:

$$\left( \frac{\delta S}{\delta\phi} \left[ \frac{-i\delta}{\delta j} \right] + j \right) \mathcal{Z}[j] = 0 \quad (\text{E.3})$$

Entretanto, queremos particularizar para nosso caso em que temos campos fermiônicos. Neste caso, teremos um conjunto de equações de Schwinger-Dyson. Considerando o funcional gerador dado pela equação (2.34) obteremos quatro equações como se segue:

$$\left( \frac{\delta S}{\delta\psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{k}', t')} \left[ \frac{i\delta}{\delta\eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta\bar{j}_\sigma} \right] + \eta_\sigma(\mathbf{k}', t') \right) \mathcal{Z}[\eta_\sigma, \bar{\eta}_\sigma, j_\sigma, \bar{j}_\sigma] = 0 \quad (\text{E.4})$$

$$\left( \frac{\delta S}{\delta\psi_{(+)\sigma}(\mathbf{k}', t')} \left[ \frac{i\delta}{\delta\eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta\bar{j}_\sigma} \right] - \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{k}', t') \right) \mathcal{Z}[\eta_\sigma, \bar{\eta}_\sigma, j_\sigma, \bar{j}_\sigma] = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \psi_{(-)\sigma}^\dagger(\mathbf{k}', t')} \left[ \frac{i\delta}{\delta \eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}_\sigma} \right] + j_\sigma(\mathbf{k}', t') \right) \mathcal{Z}[\eta_\sigma, \bar{\eta}_\sigma, j_\sigma, \bar{j}_\sigma] = 0 \quad (\text{E.6})$$

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{k}', t')} \left[ \frac{i\delta}{\delta \eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}_\sigma} \right] - \bar{j}_\sigma(\mathbf{k}', t') \right) \mathcal{Z}[\eta_\sigma, \bar{\eta}_\sigma, j_\sigma, \bar{j}_\sigma] = 0 \quad (\text{E.7})$$

Em nosso caso, a ação é dada por:

$$\begin{aligned} S[\psi_{(+)}^\dagger, \psi_{(+)}, \psi_{(-)}^\dagger, \psi_{(-)}] &= \int dt L = \sum_{\sigma, a=\pm} \int dt \int_{\mathbf{p}} \psi_{(a)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}, t) [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{p}}] \psi_{(a)\sigma}(\mathbf{p}, t) \\ &- \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma} \int dt \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} \int_{\mathbf{k}} [g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \psi_{(+)\delta}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, t) \psi_{(-)\gamma}^\dagger(\mathbf{k}, t) \\ &\times \psi_{(-)\beta}(\mathbf{q}, t) \psi_{(+)\alpha}(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Para nossa demonstração vamos fazer uso da equação (E.5), mas, primeiramente, devemos derivar a ação com relação a  $\langle \psi_{(+)\rho}^\dagger(\mathbf{k}', t') \rangle$  resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \psi_{(+)\rho}^\dagger(\mathbf{k}', t')} &= [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}'}] \psi_{(+)\rho}(\mathbf{k}', t') \\ &- \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} [g_2 \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho}] \psi_{(-)\gamma}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}', t') \psi_{(-)\beta}(\mathbf{q}, t') \psi_{(+)\alpha}(\mathbf{p}, t'). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Devemos, agora, reescrever essa equação de forma que tenhamos o conjunto de operadores reescritos em termos de derivadas em relação às fontes, ou seja,  $[\psi_{(+)}^\dagger, \psi_{(+)}, \psi_{(-)}^\dagger, \psi_{(-)}] \rightarrow \left[ \frac{i\delta}{\delta \eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}_\sigma} \right]$  resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \psi_{(+)\rho}^\dagger(\mathbf{k}', t')} \left[ \frac{i\delta}{\delta \eta_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}_\sigma}, \frac{i\delta}{\delta j_\sigma}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{j}_\sigma} \right] &= [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}'}] \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}_\rho(\mathbf{k}', t')} \\ &- \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} [g_2 \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} - g_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho}] \frac{-i\delta^3}{\delta \bar{\eta}_\alpha(\mathbf{p}, t') \delta \bar{j}_\beta(\mathbf{q}, t') \delta j_\gamma(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}', t')}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Conseqüentemente, a equação de Schwinger-Dyson, neste caso, se reduz a:

$$\begin{aligned}
& [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}'}] \frac{-i\delta\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}_\rho(\mathbf{k}', t')} - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} [g_2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - g_1\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}] \\
& \times \frac{-i\delta^3\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{p}, t')\delta\bar{j}_\beta(\mathbf{q}, t')\delta j_\gamma(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}', t')} + \eta_\rho(\mathbf{k}', t')\mathcal{Z} = 0.
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Vamos, então, derivar esta equação mais uma vez em relação a  $\frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t)}$  para obtermos:

$$\begin{aligned}
& -i [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}'}] \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2\mathcal{Z}}{\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t)\delta\bar{\eta}_\rho(\mathbf{k}', t')} - i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} [g_2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - g_1\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}] \\
& \times \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^4\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{p}, t')\delta\bar{j}_\beta(\mathbf{q}, t')\delta j_\gamma(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}', t')\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t)} + \delta(t' - t) - \eta_\rho(\mathbf{k}', t') \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta\mathcal{Z}}{\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t)} = 0.
\end{aligned} \tag{E.12}$$

onde dividimos toda a equação por  $\mathcal{Z}$ . O último termo desta equação é proporcional à fonte e, portanto, pode ser desprezado, pois, no fim, faremos as fontes irem para zero. Assim, podemos reescrever a equação (E.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2\mathcal{Z}}{\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t)\delta\bar{\eta}_\rho(\mathbf{k}', t')} = i [i\partial_t - \epsilon_{\mathbf{k}'}]^{-1} \delta(t' - t) + \int dt'' i [i\partial_{t''} - \epsilon_{\mathbf{k}'}]^{-1} \delta(t'' - t) \\
& \times i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} [g_2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - g_1\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}] \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^4\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{p}, t')\delta\bar{j}_\beta(\mathbf{q}, t')\delta j_\gamma(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}', t')\delta\eta_\rho(\mathbf{k}', t'')}.
\end{aligned} \tag{E.13}$$

onde utilizamos a propriedade da função delta para reescrevermos o último termo. O termo do lado esquerdo define a função de Green conectada de uma partícula no sistema físico interagente como nas equações (2.38). Além disso, se utilizarmos a equação (2.27) e redefinirmos o último termo desta equação, poderemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$iG_{(+)\rho}(\mathbf{k}', t' - t) = iG_{(+)\rho}^{(0)}(\mathbf{k}', t' - t) + \int dt'' iG_{(+)\rho}^{(0)}(\mathbf{k}', t'' - t) (-i\Sigma_{(+)\rho}(\mathbf{k}', t'')) iG_{(+)\rho}(\mathbf{k}', t' - t'') \tag{E.14}$$

onde definimos a auto-energia  $\Sigma$ . Analogamente, podemos demonstrar uma equação semelhante para  $G_{(-)}$  tal que:

$$iG_{(-)\rho}(\mathbf{k}', t' - t) = iG_{(+)\rho}^{(0)}(\mathbf{k}', t' - t) + \int dt'' iG_{(-)\rho}^{(0)}(\mathbf{k}', t'' - t) (-i\Sigma_{(-)\rho}(\mathbf{k}', t'')) iG_{(-)\rho}(\mathbf{k}', t' - t'') \quad (\text{E.15})$$

as quais são as conhecidas equações de Dyson para a função de Green de uma partícula no sistema físico interagente.

# Apêndice F

## Relação entre as Funções Resposta Irredutíveis e suas Respectivas Funções de Green.

No capítulo 5, nós introduzimos as fontes geradoras das simetrias relevantes em nosso modelo por meio do Lagrangiano externo (4.1) que deve ser adicionado ao nosso modelo de Lagrangiano inicial. Assim, a equação (2.35) se torna:

$$S[\bar{\psi}_{(a)}, \psi_{(a)}; g_1, g_2] = \int dt (L[\bar{\psi}_{(a)}, \psi_{(a)}; g_1, g_2] + L_{ext}) \quad (F.1)$$

Os pares de operadores que aparecem no Lagrangiano externo são comumente chamados de operadores de convolução. Em nosso modelo, esse par de operadores deve ser levado em conta na definição de  $\Gamma$  na equação (D.1), ou seja:

$$\begin{aligned} \Gamma[\psi_{(+)}^\dagger, \psi_{(+)}, \psi_{(-)}^\dagger, \psi_{(-)}, \Phi, \Psi] = & W[\eta, \bar{\eta}, j, \bar{j}, h_{SC}, h_{OD}] - \sum_{\delta} \left\{ \int_{\mathbf{k}, t} \langle \psi_{(+)\delta}^\dagger(\mathbf{k}, t) \rangle \eta_{\delta}(\mathbf{k}, t) \right. \\ & + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{\eta}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \langle \psi_{(+)\delta}(\mathbf{k}, t) \rangle + \int_{\mathbf{k}, t} \langle \psi_{(-)\delta}^\dagger(\mathbf{k}, t) \rangle j_{\delta}(\mathbf{k}, t) + \int_{\mathbf{k}, t} \bar{j}_{\delta}(\mathbf{k}, t) \langle \psi_{(-)\delta}(\mathbf{k}, t) \rangle \left. \right\} \\ & - \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \int_{\mathbf{q}, t} h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \langle \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \rangle + \int_{\mathbf{q}, t} h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \rangle \right\} \end{aligned} \quad (F.2)$$

onde:

$$\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int dt' [\mathcal{T}_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t') + c.c.]$$

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int dt' [\mathcal{T}_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; t, t') \psi_{B(+)\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, t') \psi_{(-)\beta}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t') + c.c.] \quad (\text{F.3})$$

Esses operadores de convolução se referem a férmions e, portanto, obedecem à álgebra de Grassmann. Assim, podemos seguir com a demonstração da relação entre as funções irreduzíveis  $\Gamma_i^{(2,1)}$   $i = OD, SC$  e suas respectivas funções de Green. Para tanto, vamos utilizar a relação (D.6) para escrevermos<sup>1</sup>:

$$\frac{\delta}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} = 0 \quad (\text{F.4})$$

No Apêndice D, nós derivamos a relação (D.6) para obtermos a identidade (D.14). Ao derivarmos, argumentamos que a única fonte que poderíamos derivar em relação a  $\langle \psi_{(+)\sigma} \rangle$ , sem que o valor esperado do lado esquerdo se anulasse, seria a fonte  $\eta$ . Entretanto, temos aqui uma situação diferente na qual o lado direito se anula e, portanto, devemos considerar todo o tipo de derivação possível, ou seja:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}'', t''} \left[ \frac{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} + \frac{\delta \bar{\eta}_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} \right. \\ & + \frac{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} + \frac{\delta \bar{j}_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{j}_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} \\ & \left. + \sum_{\alpha\beta} \left[ \frac{\delta h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} + \frac{\delta h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta h_{SC}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} \right] \right] = 0 \quad (\text{F.5}) \end{aligned}$$

O que pretendemos agora é derivar esta última equação com relação à fonte de simetria do tipo  $h_{OD}^{\delta\gamma}$ . Entretanto, ao realizarmos esta operação veremos que surgirão muitos termos cujo valor esperado é identicamente nulo e, para evitarmos derivar termos sem necessidade, manteremos apenas aqueles cujo valor esperado não se anularão efetivamente, ou seja:

<sup>1</sup>Utilizando esta relação poderemos demonstrar as relações para a simetria do tipo OD. Entretanto, para a demonstração das relações para a simetria SC devemos derivar a relação D.6 em relação a  $\langle \psi_{(-)\sigma}^\dagger \rangle$  e a demonstração segue analogamente.

$$\sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}'', t''} \left[ \frac{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} + \frac{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'')}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} \right] = 0 \quad (\text{F.6})$$

que, por meio das relações (D.3) e (D.5), podemos reescrevê-la como se segue:

$$\sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}'', t''} \left[ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} \right] = 0 \quad (\text{F.7})$$

Agora, podemos derivar esta última equação em relação à fonte  $h_{OD}^{\delta\gamma}$  resultando em<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma'} \int_{\mathbf{p}'', t''} \left[ \sum_{\alpha\beta} \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} \frac{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle}{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} \right. \\ & - \frac{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta^2 \Gamma} \frac{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1) \delta \eta_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)}{\delta^3 W} \\ & + \sum_{\alpha\beta} \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} \frac{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle}{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} \\ & \left. - \frac{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma'}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta^2 \Gamma} \frac{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1) \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)}{\delta^3 W} \right] = 0 \quad (\text{F.8}) \end{aligned}$$

Nesta última equação, podemos ver que somente a primeira e a última expressões não se anularão se calcularmos o seu valor esperado. Além disso, se calcularmos o valor esperado das quantidades que contribuem aparecerão funções delta em relação aos “spins”  $\sigma$  e  $\sigma'$ . O mesmo acontece com os “spins”  $\alpha$  e  $\beta$ . Conseqüentemente, podemos manter os únicos termos que contribuem escolhendo convenientemente os índices de “spin” resultando em:

$$\int_{\mathbf{p}'', t''} \left[ \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} \frac{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle}{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \langle \Psi_{\delta\gamma}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_{\sigma}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)} \right. \\ \left. - \frac{\delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta^2 \Gamma} \frac{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1) \delta j_{\sigma}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma}(\mathbf{p}, t)}{\delta^3 W} \right] = 0 \quad (\text{F.9})$$

<sup>2</sup>Novamente, poderíamos derivar em relação a todos os valores esperados  $\langle \dots \rangle$ , mas para evitarmos muitos cálculos desnecessários manteremos apenas os termos que não se anulam efetivamente, podendo contribuir.

Agora, se identificarmos:

$$\frac{\delta \langle \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle}{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1)} = \frac{\delta^2 W}{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1) \delta h_{OD}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \bar{t})} = D_{\delta\gamma}^{OD}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) \quad (\text{F.10})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta \langle \Psi_{\delta\gamma}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta^2 W} = \Gamma_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') \\ & \frac{\delta \langle \Psi_{\delta\gamma}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta \eta_\sigma(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_\sigma(\mathbf{p}, t)} = -G_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'') \\ & \frac{\delta \langle \Psi_{\delta\gamma}(\mathbf{q}, \bar{t}) \rangle \delta \langle \psi_{(-)\sigma}(\mathbf{p}', t') \rangle \delta \langle \psi_{(+)\sigma}^\dagger(\mathbf{p}'', t'') \rangle}{\delta^2 \Gamma} = G_{(-)\sigma'}^{-1}(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'; t'' - t') \\ & \frac{\delta h_{OD}^{\delta\gamma}(\mathbf{q}_1, t_1) \delta j_{\sigma'}(\mathbf{p}'', t'') \delta \bar{\eta}_{\sigma'}(\mathbf{p}, t)}{\delta^3 W} = G_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'', \mathbf{q}_1; t, t'', t_1) \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Além disso, considerando que os termos dentro da integral em  $\mathbf{p}''$  e  $t''$  são independentes e com o auxílio da equação (D.13), poderemos escrever:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} D_{\delta\gamma}^{OD}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) \Gamma_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') G_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'') \\ & + \left( G_{(-)\sigma'}^{-1}(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'; t'' - t') \right) G_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'', \mathbf{q}_1; t, t'', t_1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Vamos, então, multiplicar ambos os lados desta última equação por  $iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1; t' - t_2)$  e integrar em  $\mathbf{p}'$  e  $t'$ . Assim, podemos usar a identidade (D.14) para escrever:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} \int_{\mathbf{p}', t'} D_{\delta\gamma}^{OD}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) \Gamma_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') G_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1; t' - t_2) \\ & \times G_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'') + \delta(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}_1) \delta(t'' - t_2) G_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'', \mathbf{q}_1; t, t'', t_1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Agora, se integrarmos ambos os lados em  $\mathbf{p}''$  e  $t''$  chegaremos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} G_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; t, t_1, t_2) & = \int_{\mathbf{q}, \bar{t}} \int_{\mathbf{p}', t'} \int_{\mathbf{p}'', t''} i D_{\delta\gamma}^{OD}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) i \Gamma_{OD\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') \\ & \times i G_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1; t' - t_2) i G_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'') \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

onde colocamos os devidos fatores de  $i$  para adequarmos às regras de Feynman. Esta equação mostra a relação entre a função irreduzível  $\Gamma_{OD}^{(2,1)}$  e sua respectiva função de Green  $G_{OD}^{(2,1)}$ . A

mesma relação pode ser obtida para a simetria do tipo supercondutora se procedermos analogamente à demonstração para a simetria do tipo onda de densidade resultando em:

$$\begin{aligned}
G_{SC\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; t, t_1, t_2) &= \int \int \int_{\mathbf{q}, \bar{t}, \mathbf{p}', t', \mathbf{p}'', t''} iD_{\delta\gamma}^{SC}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1; \bar{t} - t_1) i\Gamma_{SC\delta\gamma}^{(2,1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''; \bar{t}, t', t'') \\
&\times iG_{(-)\sigma'}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'; t_2 - t') iG_{(+)\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{p}''; t - t'')
\end{aligned} \tag{F.15}$$

# Apêndice G

## Intervalos de Integração no Caso $d=2$

Neste apêndice, colocamos os principais intervalos de integração para os cálculos no caso bidimensional:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{1\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{1\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

$$\mathcal{D}_1 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{1\parallel} + p_{2\parallel} - k_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

$$\mathcal{D}_3 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

$$\mathcal{D}_4 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq -k_{\parallel} + p_{\parallel} + q_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.5})$$

$$\mathcal{D}_5 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{1\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.6})$$

$$\mathcal{D}_6 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{2\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{2\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

$$\mathcal{D}_7 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{3\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{1\parallel} - p_{3\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.8})$$

$$\mathcal{D}_8 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + q_{\parallel} - p_{4\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq k_{\parallel} + p_{3\parallel} - p_{1\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

$$\mathcal{D}_9 = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -2\Delta \leq q_{\parallel} \leq 2\Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} - q_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

$$\mathcal{D}_{10} = \begin{cases} -\Delta \leq k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -2\Delta \leq q_{\parallel} \leq 2\Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} - k_{\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} - p_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.11})$$

$$\mathcal{D}_{11} = \begin{cases} -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -2\Delta \leq q_{\parallel} \leq 2\Delta, \\ -\Delta \leq p_{\parallel} - q_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

$$\mathcal{D}_{12} = \begin{cases} -\Delta \leq p_{\parallel} \leq \Delta, \\ -2\Delta \leq q_{\parallel} \leq 2\Delta, \\ -\Delta \leq q_{\parallel} - p_{\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.13})$$

Além disso, devemos ter que:

$$\begin{cases} -\Delta \leq p_{1\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{2\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{3\parallel} \leq \Delta, \\ -\Delta \leq p_{4\parallel} \leq \Delta. \end{cases} \quad (\text{G.14})$$

# Apêndice H

## Fluxograma do programa principal

Neste apêndice, mostramos o fluxograma de nosso programa principal para o caso bidimensional. Esse fluxograma pode ser visto na figura H.1. Primeiramente, entramos com os parâmetros  $\lambda, \Delta, v_F, N, l_0, l_c, g_{01}$  e  $g_{02}$ . Os primeiros três parâmetros são sempre fixados em 1, como já mencionamos antes, por motivos de praticidade.  $N$  é o número de iterações que determinará a precisão das equações integro-diferenciais utilizando Runge-Kutta de 4ª ordem dada por  $h = (l_c - l_0)/N$ , onde  $l_0$  é o passo do GR sempre fixado em 0 e  $l_c$  é o passo do GR que, segundo nosso processo de discretização, deve sempre ser fixado em 2.8.

Em seguida, iniciamos o processo auto-iterativo em que sempre imprimimos os valores dos parâmetros renormalizados ( $Z, \chi_i^{R\pm}, \mathcal{T}_i^{R\pm}, \bar{g}_{1R}, \bar{g}_{2R}, (i = ODC, ODS, SCS, SCT)$ ) para que, em seguida, por intermédio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, chamemos as funções que geram o valor seguinte desses parâmetros.

Como já mencionamos no capítulo de análise dos resultados, devemos armazenar todos os parâmetros gerados, pois o maior problema aqui é a integração dos momentos internos dos diagramas que, a princípio, correm todos os valores dos momentos ao longo da SF.

Esse processo é repetido para todos os parâmetros renormalizados fazendo pequenos avanços no fluxo das equações do GR. Por fim, ao causarmos uma pequena variação no fluxo dos acoplamentos  $g_{1R}$  e  $g_{2R}$ , perguntamos se algum deles divergiu. Caso tenha divergido o pro-

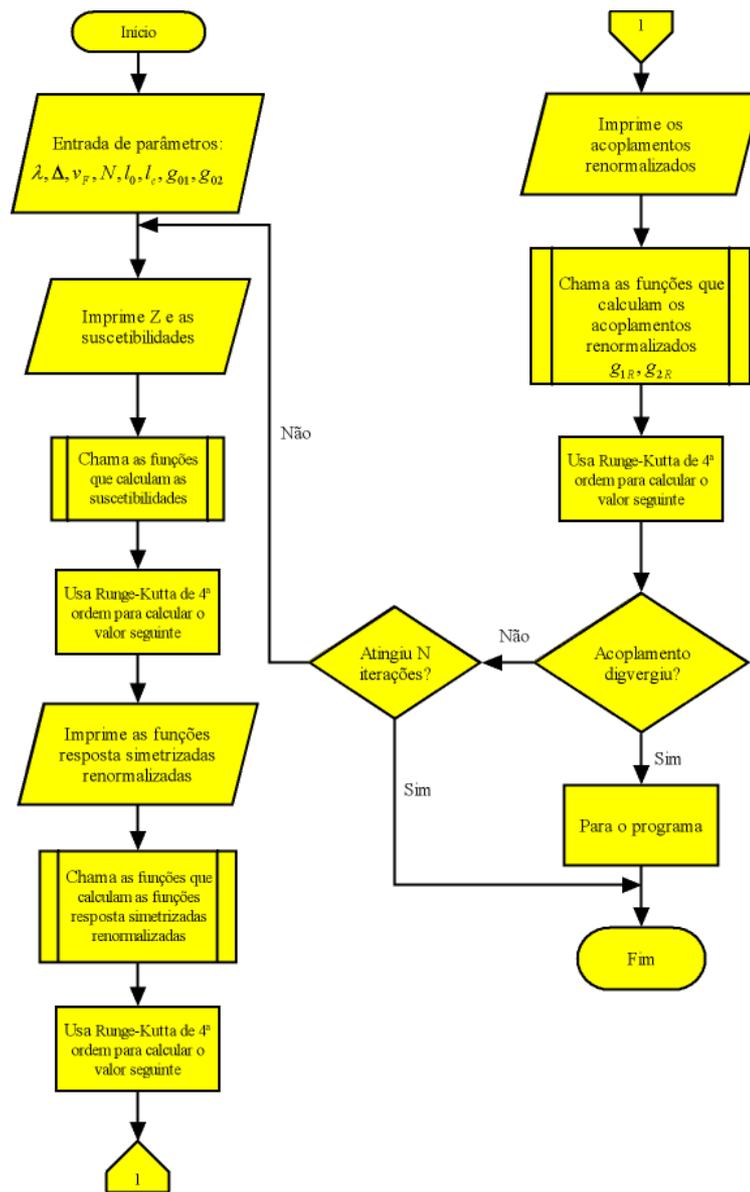


Figura H.1: Fluxograma do programa principal.

grama termina automaticamente e caso não diverja, o programa continua, recomeçando todo o processo até que corra todas as  $N$  iterações.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [2] C. Almasan e M.B. Maple, em: “Chemistry of High Temperature Superconductors”, C.N.R. Rao, ed. (World Scientific, Singapore 1991).
- [3] J.G. Bednorz, K.A. Müller, Z. Phys. B **64** 189 (1986).
- [4] L. D. Landau, Soviet Physics JETP **3**, 920 (1957).
- [5] R. E. Peierls , “Quantum Theory of Solids” (Oxford: Clarendon Press), p. 108 (1955).
- [6] M. J. Rice, S. Strässler, Solid St. Commun. **13**, 125 (1973).
- [7] M. J. Rice, S. Strässler, Ibid. **13**, 1389 (1973).
- [8] B. Horovitz, M. Weger e H. Gutfreund, Phys. Rev. B **9**, 1246 (1974).
- [9] B. Horovitz, H. Gutfreund e M. Weger, Phys. Rev. B **12**, 3174 (1975).
- [10] A. Bjeliš, K. Šaub e S. Barišic, Nuovo Cim. B **23**, 102 (1974).
- [11] Y. Suzumura e Y. Kurihara, Prog. Theor. Phys. Osaka **53**, 1233 (1975).
- [12] S. A. Brazovskiy e I. E. Dzyaloshinsky, Zh. éksp. teor. Fiz. **71**, 2338 (1976).
- [13] S. Barišic, J. Phys. Colloque C2 **39**, 262 (1978).
- [14] V. P. Lukin, Zh. éksp. teor. Fiz. **74**, 1093 (1978).

- [15] R. Claessen, R. O. Anderson, J. W. Allen, C. G. Olson, C. Janowitz, W. P. Ellis, S. Harm, M. Kalning, R. Manzke e M. Skibowski, Phys. Rev. Lett. **69**, 808 (1992).
- [16] D. S. Marshall, D. S. Dessau, A. G. Loeser, C-H. Park, A. Y. Matsuura, J. N. Eckstein, I. Bozovic, P. Fournier, A. Kapitulnik, W. E. Spicer e Z. X. Shen, Phys. Rev. Lett. **76**, 4841 (1996).
- [17] A. Damascelli, D. H. Lee, Z -X. Shen, J. Electron Spectr. Relat. Phenom. **117-118**, 165 (2001).
- [18] A. G. Loeser *et al.*, Science **273**, 325 (1996).
- [19] H. Ding *et al.*, Nature **382**, 51 (1996).
- [20] Para uma revisão sobre transições metal-isolante veja, por exemplo: N. F. Mott, Proc. R. Soc. London A **382**, 1 (1982).
- [21] Para uma revisão sobre a supercondutividade de onda d veja, por exemplo: D. J. Scalapino, Physics Reports **250**, 329 (1995).
- [22] T. Moriya, K. Ueda, Adv. Phys. **49**, 555 (2000).
- [23] A. V. Chubukov, D. Pines e J. Schmalian. “The Physics of Superconductors”(Ed. K.-H. Bennemann e J. B. Ketterson), Springer 2002.
- [24] A. V. Chubukov, D. Pines e J. Schmalian, ArXiv: cond-mat/0201140.
- [25] Y. Yanase, T. Jugo, T. Nomura, H. Ikeda, T. Hotta e K. Yamada, Phys. Reports **387**, 1 (2004).
- [26] Y. Yanase, T. Jugo, T. Nomura, H. Ikeda, T. Hotta e K. Yamada, ArXiv: cond-mat/0405038.

- [27] P.W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
- [28] J. Hubbard, Proc. R. Soc. A **276**, 238 (1963).
- [29] A. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [30] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58**, 977 (1995).
- [31] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20**, 1445 (1968).
- [32] J. Gonzalez, F. Guinea e M.A.H. Vozmediano, *ibid* **79**, 3514 (1997).
- [33] D. Zanchi e H.J. Schulz, Phys. Rev. B **61**, 13609 (2000).
- [34] N. Dupuis, Int. J. Mod. Phys. B **14**, 379 (2000).
- [35] J. Gonzalez, Phys. Rev. B **63**, 045114 (2001).
- [36] P. Kopietz e T. Busche, Phys. Rev. B **64**, 155101 (2001).
- [37] B. Binz *et al.*, Eur. Phys. J. B. **25**, 69 (2002).
- [38] A. A. Katanin e A. P. Kampf, Phys. Rev. B **68**, 195101 (2003).
- [39] T. Baier *et al.*, Phys. Lett. B **605**, 144 (2005).
- [40] C. J. Halboth e W. Metzner, Phys. Rev. B **61**, 7364 (2000).
- [41] C. Honerkamp, M. Salmhofer, N. Furukawa e T. M. Rice, Phys. Rev. B **63**, 035109 (2001).
- [42] A. T. Zheleznyak, V. M. Yakovenko e I. E. Dzyaloshinskii, Phys. Rev B **55**, 3200 (1997).
- [43] F. V. Abreu e B. Douçot, Europhys. Lett. **38**, 533 (1997).
- [44] A. Ferraz, Phys. Rev. B **68**, 075115 (2003).

- [45] H. Freire, E. Corrêa e A. Ferraz, *Physica C* **408-410**, 254 (2004).
- [46] H. Freire, E. Corrêa e A. Ferraz, *Phys. Rev. B* **71**, 165113 (2005).
- [47] J. Solyom, *Adv. Phys.* **28**, 202 (1979).
- [48] Hermann Freire, Eberth Corrêa e Álvaro Ferraz, *Phys. Rev. B* **73**, 073103 (2006).
- [49] Para maiores detalhes sobre instabilidades magnéticas em sistemas fermiônicos veja o livro de Eduardo Fradkin intitulado: “Field Theories Of Condensed Matter Systems” Ed. Addison Wesley (1991).
- [50] Veja também: “Interacting Electrons and Quantum Magnetism” segunda edição Ed. Springer (New York), Assa Auerbach (1998).
- [51] Para maiores detalhes sobre as regras de Feynman veja por exemplo o livro de A. L. Fetter e J. D. Walecka intitulado: “Quantum Theory of Many-Particle Systems” Ed. McGraw-Hill (1971).
- [52] Veja, por exemplo: “Field Theory: A Modern Primer”, Ed. Addison Wesley, Pierre Ramond (1990).
- [53] Veja, por exemplo: “An Introduction to Quantum Field Theory”, Ed. Perseus Books, M. E. Peskin e D. V. Schroeder (1995).
- [54] Veja por exemplo: A. M. Gabovich, A. I. Voitenko, J. F. Annet e M. Ausloos, *Supercond. Sci. Technol.* **14**, R1-R27 (2001).
- [55] I. Affleck e J. B. Marston, *Phys. Rev. B* **37**, 3774 (1988).
- [56] H. J. Schulz, *Phys. Rev. B* **39**, 2940 (1989).

- [57] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. Osaka **5**, 349 (1950).
- [58] I. E. Dzyaloshinskii, A. I. Larkin, Soviet Phys. JETP **38**, 202 (1974).
- [59] A. Luther e V. J. Emery, Phys. Rev. Lett **33**, 589 (1974).
- [60] N. D. Mermin e H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1996).
- [61] Eberth Corrêa, Hermann Freire e Álvaro Ferraz, ArXiv: cond-mat/0512626.
- [62] Para maiores detalhes sobre esta integração sugiro a leitura de minha dissertação de mestrado intitulada: “Elétrons Fortemente Correlacionados em uma Superfície de Fermi Segmentada em 2D”, Universidade de Brasília (2002).
- [63] C. M. Varma, P. B. Littlewood e S. Schmitt-Rink, Phys. Rev. Lett. **63**, 1996 (1989).
- [64] R. Shankar, Rev. Mod. Phys. **66**, 129 (1994).
- [65] J. Ruvalds, C. T. Rieck, S. Tewari, J. Thoma e A. Virosztek, Phys. Rev. B **51**, 3797 (1995).
- [66] C. Gros, B. Edegger, V. N. Muthukumar e P.W. Anderson, ArXiv: cond-mat/0606750.