Alan Renê Maciel Antezana

Lógicas bimodais quantificadas para a sistematização de um operador de atualidade

Brasília-DF

2019

Alan Renê Maciel Antezana

Lógicas bimodais quantificadas para a sistematização de um operador de atualidade

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília para a obtenção do título de Mestre em Filosofia

Universidade de Brasília – (UnB)

Faculdade de Filosofia

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Alexandre Costa-Leite

Brasília-DF

2019

Alan Renê Maciel Antezana

Lógicas bimodais quantificadas para a sistematização de um operador de atualidade/ Alan Renê Maciel Antezana. – Brasília-DF, 2019-

79 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Alexandre Costa-Leite

Dissertação de mestrado – Universidade de Brasília – (UnB)
Faculdade de Filosofia
Programa de Pós-Graduação, 2019.

1. Lógica Modal Quantificada. 2. Atualismo. I. Alexandre Costa-Leite. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade de Filosofia. IV. Lógicas Modais Quantificadas e Ontologia

Alan Renê Maciel Antezana

Lógicas bimodais quantificadas para a sistematização de um operador de atualidade

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília para a obtenção do título de Mestre em Filosofia

Trabalho aprovado. Brasília-DF, 22 de novembro de 2019:

Alexandre Costa-Leite
Orientador

Edgar Almeida
Convidado 1

Fabien Schang
Convidado 2

Brasília-DF
2019

A Samuel Garrido in memoriam

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, Maria de Castro Maciel, pelo apoio e pelo amor sem o qual eu não conseguiria ir tão longe.

Agradeço aos meus amigos, que me ajudaram com suas observações, colocações, orientações e companhia.

Agradeço ao meu orientador, Alexandre Costa-Leite, por me ajudar e me guiar nesse percurso.

Agradeço ao CNPq pelo fomento à pesquisa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo primário comparar teorias formais atualistas e possibilistas em dois níveis: (i) em aspectos de formalização e (ii) sua plausibilidade filosófica. Objetivos secundários do trabalho são: (a) descrição de lógicas modais quantificadas; (b) descrição de interpretações filosóficas dos sistemas formais; (c) considerações sobre a metodologia da metafísica; (d) considerações sobre sistemas axiomáticos como heurística; (e) considerações sobre a metodologia da metafísica axiomática. O primeiro capítulo consiste em uma descrição da linguagem que utilizaremos como teoria formal para a descrição de ambos posicionamentos filosóficos. O segundo capítulo consiste em uma descrição dos conceitos filosóficos formalizados pela linguagem previamente descrita. O terceiro capítulo consiste em um apanhado de estudos de caso, avaliando determinados sistemas formais correntes na discussão, utilizando critérios de avaliação correntes na literatura. Na conclusão, estabelecemos generalizações sobre ambas abordagens, buscando esclarecer uma parcela do debate.

Palavras-chave: atualismo. lógicas modais quantificadas. metafísica axiomática. metaontologia.

Abstract

This work has the primary task of comparing actualist and possibilist formal theories in two levels of analysis: (i) formalization aspects and (ii) philosophical plausibility. Secondary objectives of this work are (a) the description of quantified modal logics; (b) description of philosophical interpretation of formal systems; (c) considerations on the methodology of metaphysics; (d) considerations on axiomatic systems as an heuristics; (e) considerations on the methodology of axiomatic metaphysics. The first chapter consists in a description of the language in which two philosophical views are formalized. The second chapter consists in a description of the philosophical views. The third chapter consists in several case studies, in which some formal systems utilized for the formalization of the mentioned concepts are considered in terms of the criteria mentioned. In a conclusion, we establish generalizations over both approaches, seeking a deepened comprehension of the debate.

Keywords: actualism. quantified modal logics. axiomatic metaphysics. metaontology.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo primário construir sistemas que codifiquem a noção de atualidade partindo da comparação entre teorias formais atualistas e possibilistas em dois níveis: (i) em aspectos de formalização[1] e (ii) sua plausibilidade filosófica[2]. O possibilismo consiste na noção de que há objetos não atuais, i.e. há objetos que não pertencem ao domínio do mundo possível atual. O atualismo consiste na noção de que não há objetos não atuais, i.e. todos os objetos pertencem ao domínio do mundo possível atual [Wil03][Wil16a][Wil98][Fin85][LZ94b][Pla76] . Formulamos esta questão em linguagens formais sobre as quais haverão contínuas discussões e formulações de asserções que serão julgadas em termos de sua simplicidade, de sua plausibilidade, seus teoremas, entre outros aspectos. Buscamos, desse modo, compreender o debate entre atualistas e possibilistas através da análise destas linguagens formais por meio das quais formulamos ambos os posicionamentos. Trata-se, portanto, de uma metodologia próxima àquela utilizada por Williamson em *Modal Logic as Metaphysics*, estabelecendo uma metodologia abdutiva de teorias formais com base em critérios já mencionados.

Objetivos secundários do trabalho são: (a) descrição de algumas classes de lógicas modais quantificadas normais e suas propriedades; (b) descrição de interpretações filosóficas destes sistemas formais; (c) considerações sobre a metafísica axiomática enquanto heurística. Esta dissertação trabalha com um paradigma semelhante ao que Zalta [Zal83] denomina *metafísica axiomática*. Este paradigma tem como propriedade distintiva sua heurística, que tem como objetivo o desenvolvimento de teorias formais e suas aplicações à metafísica. Também tem como vantagem este paradigma garantir resultados relevantes aos metafísicos, lógicos e semanticistas, além de buscar estabelecer uma clara leitura das teorias formais enquanto aplicadas à metafísica. Adotamos teorias formais que se utilizam de símbolos que comumente expressam necessidade e universalidade, como adequado à metafísica. Trata-se, portanto, de uma avaliação sobre lógicas aplicadas, mais especificamente, de lógicas modais quantificadas normais aplicadas à metafísica por meio de interpretações fixadas.

[1] viz. em sistemas axiomáticos, simplicidade sintática. Em modelos, simplicidade ontológica

[2] A ideia de plausibilidade neste trabalho tem um caráter restrito. Revisamos argumentações dentro do contexto do debate atualismo/possibilismo e consideramos as motivações para a inflação ontológica. Uma teoria é dita plausível se há uma justificativa, de caráter formal ou não, para a introdução ou remoção de objetos na ontologia de uma teoria metafísica.

Contexto de Surgimento

A lógica modal sistematiza inferências válidas entre sentenças cuja validade depende do significado expressões modais como *necessariamente* e *possivelmente*[3]. As modalidades podem ser compreendidas de formas diversas, abordando operadores deônticos, que concernem as noções de obrigatoriedades e permissões; operadores epistêmicos, que concernem as noções de conhecimento e crença; operadores aléticos, que concernem as noções relativas à verdade de proposições em contextos modais. Estes operadores aléticos também podem ser dotados de interpretações diversas, podendo significar *analiticidade* ou *necessidade lógica*, como fora adotado por Rudolf Carnap em *Meaning and Necessity*[Car47].

Considerações sobre Lógicas Modais Quantificadas podem ser traçadas desde Aristóteles em sua teoria dos silogismos modais em *Da Interpretação* e *Analíticos primeiros* (cf. [Che80]). Desde então, constatou-se que há claras relações entre operadores modais. Estas oposições entre operadores modais podem ser ilustradas por um recurso didático desenvolvido por Lúcio Apuleio (125- 170EC) e posteriormente por Anício Boécio(480-524EC).

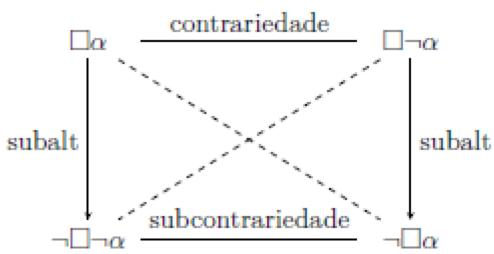

Figura 1 – Relações lógicas entre operadores modais de necessidade

As relações lógicas do operador de necessidade indicam uma clara analogia entre o operador e o quantificador universal. Assim como estabelecemos a dualidade entre os quantificadores universal e existencial, estabelecemos a dualidade entre operadores de necessidade e possibilidade. Disso se segue o seguinte diagrama.

[3] Não pretendemos entrar na discussão sobre a definição de lógica modal. Para tanto, v. [BRV02, p.x].

$$
\begin{tikzcd}
\Box\alpha \arrow[r, dash, "\text{contrariedade}"] \arrow[d, "\text{subalt}"'] \arrow[dr, dashed, dash] & \Box\neg\alpha \arrow[d, "\text{subalt}"] \arrow[dl, dashed, dash] \\
\Diamond\alpha \arrow[r, dash, "\text{subcontrariedade}"] & \Diamond\neg\alpha
\end{tikzcd}
$$

Figura 1 – Relações lógicas entre operadores modais de necessidade e possibilidade

De modo mesmo, pode-se estabelecer a partir do diagrama uma analogia entre quantificadores e operadores modais. Segerberg [Seg71a] divide as principais tradições de pesquisa em lógica modal na contemporaneidade em três grupos: a *tradição sintática*, a *tradição semântica* e a *tradição algébrica.* A tradição sintática é marcada pelas obras de C.I. Lewis em sua discussão sobre os denominados "paradoxos" da implicação material presentes no *Principia Mathematica* de Whitehead e Russell. Estes paradoxos concernem dois tipos de teoremas. O primeiro tipo de teorema consiste no fato de que uma sentença falsa implica materialmente qualquer sentença. O segundo tipo de teorema consiste no fato de uma sentença verdadeira ser implicada materialmente por qualquer sentença. Haveria, segundo Lewis, uma disparidade entre o significado da implicação material e o significado do verbo "implicar" em línguas naturais. O significado visado por Lewis consiste na noção de derivabilidade, i.e. a possibilidade de obtenção de uma fórmula por meio de regras de transformação de símbolos. Segundo Lewis, uma implicação deveria expressar a derivabilidade do consequente a partir do antecedente. Isso, no entanto, se torna posteriormente um alvo de críticas de Quine, que acusa Lewis de confundir a implicação material com a relação de consequência lógica. Os sistemas de Lewis, no entanto, geraram grande repercussão e originaram as primeiras lógicas modais.

O primeiro sistema de LMQ é atribuído a Ruth Barcan Marcus em seu artigo “*A functional calculus of first order based on strict implication*”, publicado no *Journal of Symbolic Logic*, em 1946. Neste artigo, Barcan se utiliza do sistema axiomático *S2* do livro *Symbolic Logic* de C.I. Lewis e C.H. Langford e expande a sua linguagem com a adição de variáveis individuais, variáveis de predicado e o quantificador existencial, acrescendo também ao sistema formal esquemas e as regras de inferência adequadas à teoria da quantificação. Sua exposição, que se limitava a uma descrição sintática do sistema axiomático e diversos teoremas, não incluiu uma semântica para essa lógica.

Carnap, no mesmo ano, desenvolve uma semântica para as Lógicas Modais Quantificadas em seu artigo de 1946 "*Modalidade e Quantificação*", também publicada no *Journal of Symbolic Logic* e explorado com mais afinco em seu livro "*Meaning and Necessity*". Carnap é responsável por uma semântica formal de inspiração leibniziana que pode ser considerada como a predecessora da semântica de mundos possíveis. É sabido que o sistema utilizado por Carnap, baseado no sistema S5 de Lewis, em "Meaning and Necessity" é incompleto. Constitui ele, todavia, um dos pioneiros do que Segerberg denominou como tradição semântica. Posteriormente, Saul Kripke desenvolve a semântica de mundos possíveis, que possibilita a atribuição de modelos a sistemas que provam menos do que o sistema utilizado por Carnap e, por sua vez, apresenta pela primeira vez sistemas completos de lógicas modais quantificadas utilizando o que são hoje chamadas estruturas e modelos de Kripke.

Modalidades *De dicto* e *de re*

Considerando a linguagem de lógicas modais quantificadas, podemos abordar alguns aspectos de sua expressibilidade. Por meio da interação de operadores modais e quantificadores de primeira ordem, podemos estabelecer distinções de grande valor filosófico entre sentenças. Há uma ambiguidade em sentenças como (i) "Tudo é necessariamente F". Considere as seguintes frases:

(ia) "É necessário que tudo é F"

(ib) "Tudo é necessariamente F"

Esta distinção consiste na ideia de que se pode predicar necessidade de uma sentença ou, dado um objeto, que este objeto necessariamente tem uma propriedade F. Em outras palavras, pode-se predicar a necessidade de uma sentença completa, como (ia); e pode-se afirmar que um objeto tem necessariamente uma propriedade, caso de (ib). Uma virtude de uma linguagem com quantificadores e operadores modais consiste na distinção entre as duas interpretações de (i). Por um lado, pode-se afirmar que é um fato necessário o de que tudo tenha a propriedade F. Por outro lado, pode-se afirmar que tudo é de tal maneira que tudo é necessariamente F. O primeiro caso é denominado uma necessidade *de dicto*, enquanto o último caso é denominado uma necessidade *de re*. Assim como (i), pode-se afirmar algo como

(ii) "Algo possivelmente é F"

De (ii) pode-se compreender que (iia) "É possível que algo seja F" ou (iib) "Existe algo que possivelmente é F". Desse modo, uma vantagem das LMQs consiste justamente em exprimir a divergência entre (ia) e (ib) e entre (iia) e (iib) [Fit, p.30]. O reconhecimento de ambiguidades em sentenças como (i) e (ii) nos permite contemplar com maior compreensão sentenças como a seguinte:

(iii) O número de planetas do sistema solar é necessariamente par

(iii) é verdadeiro em uma leitura *de re*, mas falso em uma leitura *de dicto*. Embora não seja necessário que o número de planetas seja par (visto que poderia haver um planeta a mais ou a menos no sistema solar); é necessário que o referente atual da descrição "O número de planetas do sistema solar", viz. 8, é par. Lendo-se $\Box$ como "necessariamente" e $\forall$ como "para todo", podemos reescrever de uma maneira mais formal as interpretações de (i) do seguinte modo:

1. $\Box \forall x Fx$
2. $\forall x \Box Fx$

Enquanto (iia) e (iib) poderiam ser reescritos formalmente lendo-se $\Diamond$ como "possivelmente" e $\exists$ como "algo":

1. $\Diamond \exists x Fx$
2. $\exists x \Diamond Fx$

Desse modo, exemplificamos como a lógica modal quantificada pode estabelecer distinções relevantes para a pesquisa em filosofia. Neste trabalho, são especialmente relevantes as relações entre modalidades *de dicto* e *de re*. Abordamos essa questão nos próximos parágrafos e mais detidamente no capítulo 2 desta dissertação.

Há quatro modos de se abordar a relação entre modalidades *de dicto* e *de re*: (i) tratando-a como uma relação de equivalência; (ii) afirmando que modalidades *de dicto* implicam modalidades *de re*; (iii) afirmando que modalidades *de re* implicam modalidades *de dicto*; (iv) afirmando que não há relações de implicação entre as modalidades *de dicto* e *de re*. As três primeiras formas de estabelecer esta relação podem ser formalizadas da seguinte maneira:

(i) $\Diamond \exists x Fx \equiv \exists x \Diamond Fx$

(ii) $\Diamond \exists x Fx \rightarrow \exists x \Diamond Fx$

(iii) $\exists x \Diamond Fx \rightarrow \Diamond \exists x Fx$

(i) estabelece uma relação de comutatividade entre o operador $\Diamond$ e o quantificador $\exists$. Por definição, (i) implica (ii) e (iii); enquanto (ii) e (iii) implicam (i).

O problema consiste no endosso de asserções que parecem implicar a existência de objetos possíveis, i.e. há objetos que não são atuais, mas meramente possíveis. A grosso modo, pode-se afirmar o atualismo como uma rejeição às relações acima mencionadas entre modalidades *de dicto* e *de re*. Segundo o atualista, não faria sentido afirmar que (ii') se é possível que algo exista e seja F, então este algo existe e possivelmente é F. De modo mesmo, aplicam-se considerações similares ao caso (iii).

A existência de objetos possíveis, por outro lado, não é um problema para o possibilista. A princípio, o possibilismo aceita o custo ontológico das fórmulas acima mencionadas. Isso, como veremos, é um posicionamento que parece natural de um ponto de vista formal, dada a simplicidade sintática de seus sistemas. Carnap, por sua vez, endossou (i) em seu sistema em [Car47][4]. Tanto este é o caso que as fórmulas (ii) e (iii) são teoremas do sistema de Barcan em [Mar46].

Nesta dissertação, buscamos clarificar a noção de atualidade, de modo a construir um sistema com um operador de atualidade correspondente aos posicionamentos em pauta. Não se trata de uma resposta última à questão do embate entre possibilismo e atualismo, mas de uma investigação metafísica sobre a sistematização da noção de atualidade e seu emprego na discussão.

[4] Williamson em [Wil03] indica uma origem mais remota do princípio expresso pela equivalência entre modalidades *de dicto* e *de re*, traçando sua origem em obras de Avecenna (980-1037).

1 Atualismo e Possibilismo

Apresentamos neste capítulo diferentes noções de atualismo, destacando os seguintes aspectos sobre a interpretação da tese atualista. Em primeiro lugar, destacamos que a tese atualista deve pressupor a quantificação irrestrita e uma noção de atualidade coerente com o atualismo [Ben09]; [Ada74]. Em segundo lugar, destacamos que a noção de atualismo sofre variações para (i) atualistas estritos e (ii) atualistas brandos. Em terceiro lugar, abordamos uma proposta de interpretação do debate entre o atualismo e o possibilismo. Partindo de [Ada74], elaboramos um arcabouço conceitual que, partindo de sua noção de mundos possíveis, definimos a noção de objetos possíveis. Desse modo, o objetivo do capítulo consiste em explanar estes posicionamentos filosóficos sobre ontologia.

1 Atualismo

Trata-se de uma crença comum a de que poderiam haver mais coisas do que existem. Podemos pressupor, por exemplo, que, em condições normais, embora João não tenha um filho, ele poderia ter um filho. Em outras palavras, podemos pressupor que é possível que João tenha um filho. Consideremos esta afirmação.

(i) É possível que João tenha um filho.

Nitidamente, afirmações como (i) estão de acordo com nossas intuições sobre a modalidade[1], e disso segue o questionamento sobre a forma como afirmações como (i) são verdadeiras, i.e. como afirmações da seguinte forma são verdadeiras:

(i') É possível que exista um F

Poderíamos nos ater ao exemplo e perguntar a que se deve a verdade de (i), isto é, a quais objetos (i) se refere. Uma resposta consiste em afirmar que há um objeto que possivelmente é filho de João. Outra resposta consiste em afirmar que não há um objeto que possivelmente é filho de João, embora (i) seja verdadeira. A primeira resposta admite uma ontologia de *objetos meramente possíveis*, enquanto a segunda resposta restringe a sua ontologia aos objetos possíveis que, via de regra, são atuais. Em um exemplo, o segundo tipo de objeto é o caso de João, enquanto o primeiro tipo de objeto é o caso do filho de João. Cada resposta sobre as condições de verdade de (i) consiste em um posicionamento específico sobre ontologia.

[1] Com intuições sobre modalidade refiro-me simplesmente às intuições que embasam nossas crenças comuns sobre possibilidade e necessidade[Bea02, p.132].

1.1 Atualismo e Possibilismo

Definimos do seguinte modo possibilismo e atualismo. Consiste o *possibilismo* no endosso de uma ontologia de objetos meramente possíveis, isto é, na tese de que há objetos que não existem ou não são atuais. Em contraposição ao possibilismo, o *atualismo* afirma que não há objetos que não são atuais. De forma equivalente, o atualismo afirma que todos os objetos são atuais.

Os posicionamentos podem ser explicitados em forma de slogans. O atualismo pode ser concebido na forma do slogan (A).

(A) Tudo é atual.

O quantificador é comumente compreendido de maneira irrestrita. (A) pode ser reescrito de uma maneira mais formal:

(A') x existe *sse* x é atual.

Se se pressupõe uma semântica de mundos possíveis, a noção de atualidade pode ser parafraseada em termos de domínios de mundos[2]. Partimos de (A') para estabelecer:

(A") x existe *sse* x pertence ao domínio do mundo atual.

Em contraposição ao atualismo, o possibilismo é comumente descrito de três formas, correspondendo às negações do slogan atualista:

(P) Não é o caso que tudo é atual.

(P') Não é o caso que x existe *sse* x é atual.

(P") Não é o caso que x existe *sse* x pertence ao domínio do mundo atual.

Não é uma dificuldade para o possibilista estabelecer condições de verdade para (i), tendo em vista o endosso de objetos meramente possíveis. Como destacado, o atualista deve, todavia, prover uma resposta à questão sobre as condições de verdade de sentenças como (i).

[2] Cf. o apêndice desta dissertação.

1.1.1 Mundos Possíveis

A referência aos mundos possíveis é de particular interesse ao atualista. Isso ocorre uma vez que outro aspecto de (i') consiste na interpretação da expressão "É possível que...". Se consideramos "É possível que..." como significando o mesmo que a possibilidade enquanto entendida em termos de uma semântica de mundos possíveis, afirmamos que "É possível que S" é verdadeiro se, e somente se, existe um mundo acessível em que S é verdadeiro. Isso, entretanto, parece estabelecer uma referência a um mundo possível não atual. A semântica de mundos possíveis parece, a primeira vista, um obstáculo para o atualista.

Consideremos uma primeira solução. Embora mundos possíveis não sejam um problema para o possibilista, a abordagem atualista deve considerar uma análise ulterior. O atualista deve responder a que se deve a verdade de "existe um mundo em que S é verdadeiro" sem fazer referência a objetos meramente possíveis. O atualista que faz uso da semântica de mundos possíveis deve explicitar a natureza dos mundos possíveis a partir de uma descrição coerente com o atualismo. Desse modo, o atualista pode se referir a mundos possíveis de maneira ontologicamente inócua, i.e. de maneira a evitar referência a objetos meramente possíveis [Sta12]; [Ada74]; [LZ94a].

Há ainda outra solução para o atualista. O atualista pode também estabelecer um caráter primitivo, i.e. indefinido, da modalidade, afirmando que "É possível que..." é uma expressão impassível de análise, sendo desnecessária a resposta sobre as condições de verdade de "existe um mundo em que S é verdadeiro". Pode-se, desse modo, evitar a análise da noção de possibilidade e necessidade em detrimento do uso da semântica de mundos possíveis e, consequentemente, da referência aos mundos possíveis.

Esta solução implica um atualismo formulado com o acréscimo da seguinte cláusula:

(Mod) O idioma modal (necessariamente, possivelmente) é primitivo[3].

(A) em conjunção com (Mod) pode ser descrito como atualismo modal [Fin06]; [Pri17]. Endossar o modalismo é nitidamente coerente com o atualismo, dado que um posicionamento que nega a existência de objetos possíveis naturalmente poderia ser generalizado a um posicionamento que nega a análise de operadores modais em termos de mundos possíveis enquanto objetos meramente possíveis. Em síntese, como mundos possíveis são comumente tomados como objetos meramente possíveis, o modalismo permite ao atualista evitar referência aos mundos possíveis.

Desse modo, percebemos duas soluções para o atualista: analisar ou não analisar o discurso modal, isto é, seus operadores [Ben09]. Trata-se de uma nuance entre atualistas

[3] Formulação de [Fin06, p.8]

o endosso da semântica de mundos possíveis. Observamos que uma explanação atualista sobre as condições de verdade de (i) deve justificar as referências em dois níveis: a nível de indivíduos, como o filho de João, e a nível de mundos.

1.1.2 Quantificação irrestrita

Consideremos o slogan atualista:

(A) Tudo é atual

As duas noções centrais em (A) são o quantificador "tudo"e atualidade. Abordamos em primeiro lugar o significado do quantificador em (A). Com relação aos quantificadores presentes em (A),(A') e (A"), deve-se compreender o domínio de quantificação como irrestrito. Se se compreende, por sua vez, a restrição dos quantificadores a um determinado mundo possível, trata-se, dado um mundo w de avaliação da proposição e o domínio $D(w)$ deste mundo, de uma asserção trivial. Isso ocorre uma vez que o quantificador restrito a um mundo só quantifica objetos atuais. Em síntese, é trivial afirmar que tudo é atual quando o domínio de quantificação é pressuposto como a classe dos objetos atuais.

Embora noções próximas à quantificação irrestrita tenham se mostrado contraditórias, como o paradoxo de Russell na teoria ingênua de conjuntos (TI), é nítida a possibilidade de uma abordagem consistente à quantificação irrestrita tomada em seus devidos cuidados [Wil13, p.8]. Uma alternativa comum à quantificação irrestrita é, por exemplo, que a quantificação não necessariamente se dá sobre um *conjunto* de todas as coisas aos modos de (TI). Diversos autores sugeriram uma quantificação sobre uma classe mais branda de objetos, como uma classe de objetos abstratos, ou uma classe de objetos concretos, uma classe de objetos matemáticos, etc [Wil13]; [LZ94a].

Considero, todavia, necessária a quantificação irrestrita para responder questões de caráter metafísico. O argumento para tanto é essencialmente semântico. Se consideramos teorias metafísicas como teorias suficientemente abrangentes para incluir tudo o que existe, a restrição branda sobre objetos concretos, abstratos etc, não seria suficiente para caracterizar-se como metafísica, embora seja ontológica em suas devidas restrições. Tratar-se-ia de uma teoria dos objetos concretos, ou uma teoria dos objetos abstratos em suas particularidades. A definição comumente utilizada de metafísica pressupõe, portanto, quantificação irrestrita. Se se acata este argumento, a impossibilidade da quantificação irrestrita em teorias formais implicaria a impossibilidade do projeto de uma teoria metafísica formal. Disso seguiria a necessidade de uma quantificação irrestrita.

Em síntese, abordamos as noções de possibilismo e atualismo e suas abordagens às condições de verdade de sentenças específicas. Estabelecemos que: (a) há um consenso sobre a verdade de proposições que, somente à primeira vista, parecem implicar a existência de objetos possíveis, como é o caso do filho de João em (i). Objetos possíveis, todavia, podem ser abordados de formas diversas. Definimos respostas opostas a esta questão: o possibilismo e o atualismo. (b) Além de objetos possíveis, deve-se justificar a referência aos mundos possíveis, se se defende o atualismo. Desse modo, o atualista deve justificar a atualidade de objetos meramente possíveis e mundos meramente possíveis. (c) Estas posturas, na medida em que tratam de questões do campo da metafísica, devem pressupor quantificação irrestrita. Seguimos para abordar a segunda noção central no slogan atualista.

1.2 Três noções de atualidade

Atualidade é comumente comparada à realidade (v.[Fin06]). Atualidade, todavia, é contraposta a outras categorias modais como a necessidade e a possibilidade. Para compreender de maneira adequada o slogan atualista, é adequado explanar algumas principais abordagens à noção de atualidade [Ada74].

A primeira abordagem pressupõe a contingência da atualidade como propriedade de sentenças. Em outras palavras, atualidade não compreende as mesmas proposições em todos os mundos possíveis. Se a proposição correspondente à sentença "Pólux é uma estrela" é atual, poderíamos afirmar que, em um mundo possível a negação de "Pólux é uma estrela" é verdadeira. A proposição correspondente à "Pólux não é uma estrela" é verdadeira e atual para aqueles que tomam como realidade os fatos deste mundo possível. Nisso consiste a abordagem indexical à noção de atualidade [Ada74, p.212].

A segunda abordagem pressupõe a necessidade da atualidade como propriedade de sentenças. Em outras palavras, a atualidade compreende as mesmas proposições em todos os mundos possíveis. Se consideramos a proposição correspondente à sentença "Pólux é uma estrela" é atual, afirmamos que em todos os mundos possíveis, a atualidade desta proposição permanece a mesma. Deste modo, a atualidade seria uma propriedade simples, i.e. irredutível, dos fatos do nosso mundo possível. Nisso consiste a abordagem como propriedade simples à noção de atualidade [Ada74, p. 214].

A terceira abordagem também pressupõe a necessidade da atualidade como propriedade de sentenças. Esta abordagem pressupõe uma definição de mundos possíveis como um conjunto maximal de proposições[4]. Frente a uma diversidade de conjuntos maximais de proposições, podemos afirmar que somente um conjunto maximal tem todas as suas proposições verdadeiras. A este conjunto maximal, que tem elementos somente proposições verdadeiras, denominamos como mundo possível atual. Uma sentença como "É possível que P" é equivalente a afirmar que "P" pertence a algum conjunto maximal de proposições. Dizer que P é atual é afirmar que P pertence ao conjunto maximal de proposições verdadeiras, e, como consequência, P é verdadeira. Nisso consiste a abordagem

[4] Para uma definição precisa de conjuntos maximais (v. a definição 5.2 no Capítulo 1).

de Adams à noção de atualidade [Ada74, p.225].

Abordamos, desse modo, três noções de atualidade. A primeira noção de atualidade é comumente inconsistente com o atualismo[5] [Lew86]. As noções abordadas em segundo e terceiro lugar são comumente adotadas por atualistas brandos [Sta12].

2 Teoremas de SQML

Um grande motivador para o debate entre atualismo e possibilismo são os teoremas do sistema mais simples de lógica modal quantificada (S5+FOL). Consideremos os seguintes teoremas.

2.1 As fórmulas de Barcan

(BF$\Box$) $\forall x \Box \phi x \rightarrow \Box \forall \phi x$

(BF$\Diamond$) $\Diamond \exists x \phi x \rightarrow \exists x \Diamond \phi x$

A fórmula de Barcan é uma consequência da lógica modal S5 de primeira ordem.

Teorema 2.1.1. *BF é teorema em S5 + FOL*

Por brevidade não nos deteremos na prova do teorema, cuja prova se encontra em sua integridade em [Hun96].

Teorema 2.1.2. $\vdash_{S5+FOL} \Diamond \exists x \phi x \rightarrow \exists x \Diamond \phi x$

Demonstração. Por contraposição e substituição uniforme em 2.1.1. □

Se consideramos um exemplo como "É possível que Wittgenstein tenha um filho então existe algo que possivelmente seja o filho de Wittgenstein", a fórmula de Barcan aparenta indicar a existência de objetos meramente possíveis.

[5] O atualismo indexicalista é comumente tomado de duas formas: (i) o estabelecimento da atualidade de um mundo a partir de um agente enunciador; ou (ii) o estabelecimento da atualidade de um mundo a partir das proposições de um mundo mesmo. A descrição (i) é insustentável fora do realismo modal, pois pressupõe agentes não atuais enunciadores de proposições não atuais que, por sua vez, lhe conferem atualidade a partir de um agente meramente possível. Há um comprometimento direto com objetos meramente possíveis. Se não houvessem agentes meramente possíveis, a atualidade indexical seria coextensiva com a verdade extensional. Daí a problemática em afirmar algo atual *para nós* fora do contexto do realismo modal.
A descrição (ii) é, por sua vez, a mais comum e a mais disseminada em conextos formais, i.e. tratam-se de funções que levam dois tipos de argumentos, viz. proposições e mundos, a um valor de verdade. O autor, todavia, tem relutância em reconhecer o posicionamento como uma alternativa indexicalista justamente pela falta de um agente enunciador para o estabelecimento das condições de verdade de uma proposição [Ada74, p.214]. Trata-se simplesmente de uma função de verdade intensional, sendo esta uma alternativa viável ao atualista que endossa mundos possíveis enquanto tipos de argumentos para funções de verdade.

(CBF$\Box$) $\Box\forall\phi x \to \forall x\Box\phi x$

(CBF$\Diamond$) $\exists x\Diamond\phi x \to \Diamond\exists x\phi x$

Teorema 2.1.3. ***CBF é teorema em K + Fol***

1.	$\forall x\phi \to \phi$	Axioma 4 de FOL
2.	$\Box(\forall x\phi \to \phi)$	Necessitação em 1
3.	$\Box\forall x\phi \to \Box\phi$	Regra derivada em (2)
4.	$\forall x(\Box\forall x\phi \to \Box\phi)$	Generalização em (3)
5.	$\Box\forall x\phi \to \forall x\Box\phi$	Instância do axioma 5 de Fol e MP

Teorema 2.1.4. $\vdash_{S5+FOL} \exists x\Diamond\phi x \to \Diamond\exists x\phi x$

Demonstração. Por contraposição e substituição uniforme em 2.1.2 $\Box$

Se consideramos uma instância de CBF como $\exists x\Diamond\neg\exists y(x = y) \to \Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$, a fórmula de Barcan aparenta indicar que não poderia ser o caso que algo possivelmente não existe. Como o consequente dessa instância é contraditória, então $\neg\exists x\Diamond\neg\exists y(x = y)$ é uma fórmula válida. Isso indicaria um status modal de necessidade da ontologia. A fórmula, por sua vez, é equivalente a $\forall x\Box\exists y(x = y)$, pela definição do quantificador universal e do operador $\Diamond$.

2.2 Necessariamente tudo existe (NE)

Teorema 2.2.1. $\vdash_{S5+FOL^=} \forall x\Box\exists y(x = y)$

1.	$x = x$	Ax.=
2.	$\exists y(y = x)$	Gen. $\exists$,(1)
3.	$\Box\exists y(y = x)$	Nec,(2)
4.	$\forall x\Box\exists y(y = x)$	Gen,(3)
5.	$\Box\forall x\Box\exists y(y = x)$	Nec,(4)

Este teorema claramente indica a impossibilidade de contingência da existência de objetos. Isso, por sua vez, é contraintuitivo para atualistas estritos, como se verá adiante.

3 Duas propostas de atualismo

Apresentamos as definições de *atualismo brando* e *atualismo estrito*. Atualistas discordam entre si em relação ao valor de verdade de proposições sobre objetos meramente possíveis. Atualistas brandos atribuem valores de verdade a tais proposições, enquanto atualistas estritos não atribuem a essas proposições valores de verdade.

3.1 Atualismo brando

O atualismo brando sugere uma interpretação alternativa dos objetos meramente possíveis [LZ94a]; [Wil13]. Em primeiro lugar, a interpretação alternativa tem como base a sugestão de uma estratificação ontológica, i.e. dividimos nossa ontologia em objetos concretos e abstratos. Objetos concretos podem ser comumente descritos como objetos que tem existência no espaço e no tempo (e.g. uma folha de papel), enquanto objetos abstratos são objetos que existem somente no tempo (e.g. uma ideia)[Wil13][6]. Desse modo subdividimos em categorias a ontologia.

Em segundo lugar, a estratificação ontológica é acompanhada por uma asserção sobre o *status* modal dessas propriedades. O atualista brando admite objetos contingentemente não-concretos. Estes objetos não se tornam objetos abstratos, mas objetos não-abstratos e não-concretos. Objetos meramente possíveis são interpretados como objetos contingentemente não-concretos.

> A distinção concreto/abstrato é equivocadamente vista como uma diferença absoluta na natureza dos objetos. Logo, objetos abstratos são pensados como essencialmente abstratos, e concretude é pensada como parte da natureza de objetos concretos, algo que eles não poderiam deixar de ter (sempre que eles existem). Nós questionamos essas ideias ao motivar e introduzir o que pode ser chamado de "objetos contingentemente não-concretos". Objetos contingentemente não-concretos existem e são atuais, e eles devem substituir os *possibilia*[7]. [LZ94a, p.2]

O argumento consiste na dispensa do pressuposto de essencialidade da propriedade de concretude aos objetos concretos. Desse modo, a natureza dos objetos não-concretos seria explanada de forma atualisticamente aceitável, isto é, enquanto objetos contingentemente não-concretos.

Isso, por sua vez, permite ao atualista brando explanar aspectos intuitivos de teoremas de S5 de primeira ordem, como a fórmula de Barcan.

BF $\Diamond \exists x \phi x \rightarrow \exists x \Diamond \phi x$

Se é possível que haja uma montanha de ouro, então há algo que possivelmente é uma montanha de ouro. Segundo [Wil98], é possível esclarecer mais facilmente a questão

[6] Há outras definições de objetos concretos e abstratos. Não adentraremos em maiores discussões sobre objetos concretos e abstratos por ir além do escopo da dissertação. Para tanto, v. [Zal83]

[7] The abstract/concrete distinction is mistakenly seen as an absolute difference in the nature of objects. Thus, abstract objects are thought to be essentially abstract, and concreteness is thought to be part of the nature of concrete objects, something they couldn't fail to have (whenever they exist). We question these ideas by motivating and introducing what might be called 'contingently nonconcrete objects'. Contingently nonconcrete objects exist and are actual, and they shall replace 'possibilia'.

estabelecendo uma leitura temporal análoga. Se houve no passado o rio Irahrhar[8], então existe algo que no passado foi o rio Irahrar. O fato é que ainda existe algo que pode ser predicado como "O rio extinto que passava pelo noroeste da Líbia".

> O nome se refere a algo. Certamente a resposta correta é que ele se refere. Refere-se ao rio passado. Logo o *Inn* ainda é algo que pode ser um referente, e, portanto, é algo. Presumivelmente não é mais um rio, uma vez que ele não deve constar na resposta à pergunta "Quantos rios há agora?"; mas ele deveria constar na resposta à pergunta "Quantos rios já existiram?". Que tipo de coisa o *Inn* se torna quando não é mais um rio? Dado que o caráter abstrato não é uma propriedade temporária, o rio não se tornou um objeto abstrato. A melhor resposta e a mais natural é somente que o *Inn* já foi um rio, é um rio passado. Insistir que é, de algum modo, algo mais do que um rio passado seria obscurantismo, tornando-o o fantasma de um rio (pessoas passadas não são fantasmas). Suas propriedades essenciais concernem o seu passado; se ele ainda mantém traços no presente é inessencial a sua natureza. Em particular, ele continuará a ser um rio passado mesmo quando não houver ninguém para se referir a ele. De maneira mais controversa, por que não deveria haver um rio futuro antes que ele tenha existido em qualquer lugar, e antes de qualquer pessoa se referir àquilo?[9] [Wil98, p.265]

Explanar objetos meramente possíveis como objetos contingentemente não-concretos preserva a naturalidade de asserções sobre objetos que existiam, mas não mais existem. Na medida em que ainda há fatos sobre rios extintos, cidades extintas ou qualquer outra coisa que não mais existe, é coerente afirmar que ainda existe algo sobre o qual determinadas predicações são verdadeiras. Tratam-se de objetos do passado, cujas propriedades concernem o passado.

Consideremos outro teorema de S5 de primeira ordem.

CBF $\exists x \Diamond \phi \rightarrow \Diamond \exists x \phi$

[8] O rio Irahhar ligava a África subsaariana ao mediterrâneo por onde há hoje em dia o deserto do Saara.

[9] The name refers to something. Surely the right answer is that it does; it refers to a past river. Thus the Inn is still something that can be referred to, and therefore something. Presumably it is no longer a river, for it should no longer be counted in answer to the question 'How many rivers are there now?'; but it should be counted in answer to the question 'Howmany rivers have there ever been?'. What kind of thing has the Inn become, if it is no longer a river? Given that abstractness is not a temporary property, it has not become an abstract object. The best and most natural answer is just that the Inn was once a river; it is a past river. To insist that it is somehow some- thing more than a past river would be obscurantist, by making it a ghost of a river (past persons are not ghosts). Its characteristic properties concern its past; whether it continues to leave traces in the present is inessential to its nature. In particular, it will continue to be a past river even when there is no one left to refer to it.16 More controversially, why should it not have been a future river even before it had ever run anywhere, and before there was anyone to refer to it?

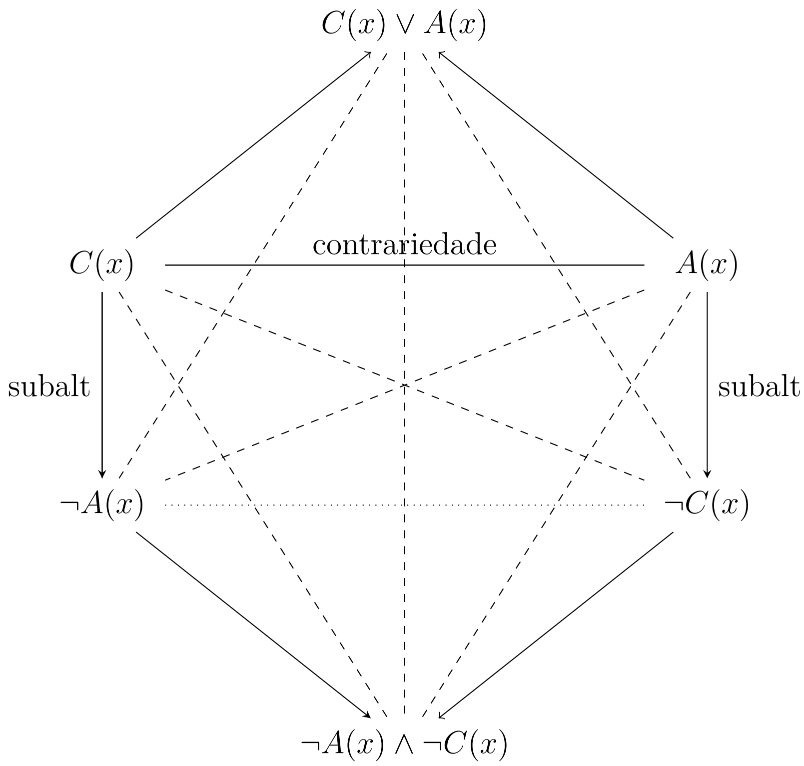

Figura 2 – Relações lógicas entre "ser concreto"(C) e "ser abstrato"(A), segundo um atualista brando

A instância comumente utilizada como um argumento contra a derivabilidade de CBF é "Se há algo que poderia não existir, então possivelmente há algo que não existe". Em termos mais claros, trata-se da seguinte instância.

CBF' $\exists x \Diamond \neg \exists y (x = y) \rightarrow \Diamond \exists x \exists y (x = y)$

Diversos autores tem afirmado como resposta a esta instância com uma postura diversa àquela do atualismo ou do possibilismo. Tendo em vista que o consequente é uma contradição, e que a fórmula acima é materialmente equivalente à negação do antecedente; afirmar esta instância seria simplesmente afirmar que não é o caso que algo não possa existir. Esta postura, por sua vez, é definida como uma postura necessitista para com a ontologia. Esta postura tem sua máxima sintetizada na fórmula anteriormente provada em S5+FOL (NE).

3.1.1 Oposições entre as propriedades de concretude e *ser abstrato*

Utilizaremos nesta seção do recurso de geometria das oposições para ilustrar relações lógicas entre propriedades ontologicamente relevantes. Desse modo, introduzimos acima primeiramente o hexágono das oposições que será posteriormente utilizado.

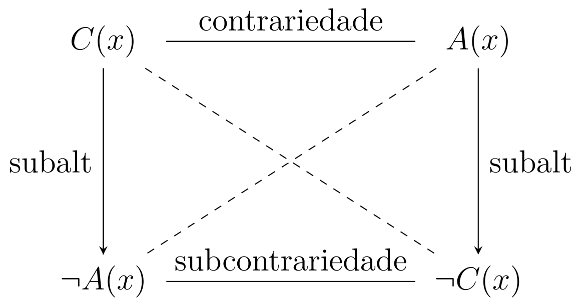

Figura 3 – Relações lógicas entre "ser concreto"(C) e "ser abstrato"(A), segundo um atualista estrito

Oposições entre objetos concretos e abstratos podem ser ilustradas pelo hexágono das oposições presente na próxima página. O hexágono das oposições acomoda em seu ponto **Y** a conjunção de propriedades que acomodaria uma ontologia de objetos meramente possíveis. O ponto **U** indica a disjunção de propriedades do que consideramos, a princípio, como objetos estritamente atuais. O cerne da solução do atualismo brando consiste simplesmente em admitir uma instância verdadeira da sentença em **Y**. Não se trata de um hexágono degenerado por estabelecer uma relação de subcontrariedade entre os pontos **I** e **O**. Isso é uma consequência da noção de que há um objeto concreto e abstrato. Desse modo, é possível compreender uma ontologia estratificada em duas categorias disjuntas, onde extensão de uma não é complemento da outra.

O quadrado das oposições não se trata de um quadrado degenerado por estabelecer uma relação de subcontrariedade entre os pontos **I** e **O**. Isso é uma consequência da noção de que não há um objeto concreto e abstrato. Desse modo, é possível compreender uma ontologia estratificada em duas categorias disjuntas, onde extensão de uma é complemento da outra.

3.1.2 Conclusão preliminar

O atualismo brando pode ser descrito como uma das mais eficientes explanações de objetos meramente possíveis. Trata-se de uma forma de atualismo *proxy*, uma vez que busca estabelecer substitutos (*surrogates*) para objetos meramente possíveis a partir de uma descrição atualisticamente aceitável dos objetos meramente possíveis. Há, todavia, divergências entre atualistas com relação à admissão de objetos contingentemente não-concretos pelos atualistas brandos.

Atualistas estritos destacam a coextensão entre a ontologia de um possibilista e a ontologia de um atualista brando. Segundo atualistas estritos, tratar-se-ia de um desacordo meramente verbal a noção de atualidade, uma vez que a ontologia de ambos os posicionamentos permanecem as mesmas. Muito embora isso ocorra com a ressalva de uma descrição atualisticamente coerente de substitutos, Bennett [Ben09] indica este tipo de solução como uma falsa alternativa ao atualista.

3.2 Atualismo estrito

O atualismo estrito se distingue do atualismo brando por não admitir proposições verdadeiras, ou *fatos*, sobre objetos meramente possíveis.

(SA) Não há fatos sobre objetos meramente possíveis.

3.2.1 Prior

Arthur Prior [Pri17, p.432] desenvolveu pela primeira vez uma lógica modal que sistematizaria as inferências sobre existentes contingentes. Suas principais estratégias foram: (i) o descarte da interdefinibilidade entre os operadores $\Box$ e $\Diamond$; e (ii) a restrição da regra de necessitação [Pri17].

O descarte da interdefinibilidade entre operadores visa abarcar casos de nomes próprios de indivíduos que não são atuais. Suponha que há uma predicado ϕ sobre um indivíduo contingentemente existente a. Se não há um mundo possível em que ocorre que $\phi(a)$, então não é possível que $\neg\phi(a)$. Disso, todavia, não se pode inferir que $\Box\phi(a)$. A impossibilidade de $\neg\phi(a)$, desse modo, não implica a necessidade de $\phi(a)$.

A restrição sobre a regra de necessitação consiste em condicionar sua aplicação aos indivíduos que existem necessariamente. Prior estabelece um operador S para expressar que uma proposição ϕ é necessariamente asserível (*necessarily statable)*. Uma proposição expressa por ϕ somente é necessariamente asserível se todos os nomes próprios em ϕ são de indivíduos que existem necessariamente. Adapta-se, desse modo, a interdefinibilidade entre operadores do seguinte modo:

$$\Box\phi \leftrightarrow (S\phi \wedge \neg\Diamond\neg\phi)$$

A noção subjacente à proposta de Prior de necessária asseribilidade restringe a regra de necessitação às sentenças que expressam proposições sobre indivíduos que existem necessariamente. A princípio, pode-se inferir de ϕ a impossibilidade de sua negação, embora não se possa afirmar sua necessidade. Adapta-se a regra de necessitação do seguinte modo:

Se ϕ é teorema, então $\neg\Diamond\neg\phi$ é teorema.

A regra de necessitação forte é condicionada à noção de asseribilidade necessária.

Se ϕ é teorema, então $(S\phi \rightarrow \Box\phi)$ é teorema.

3.2.2 Adams

A noção central do atualismo estrito de [Ada74] é a de mundos possíveis enquanto coleções maximais de descrições, também denominados como *world stories*. Para a definição precisa de maximalidade, vide a definição 1.2.5.2 do capítulo 1. Por ora é suficiente afirmar que, para todo mundo possível w e, para cada sentença p, o mundo possível w ou inclui p, ou inclui $\neg p$. O mundo possível deve conter cada sentença ou sua negação, de maneira que seja possível que todas as sentenças sejam verdadeiras, isto é, mundos possíveis são definidos por Adams como conjuntos consistentes. A partir da noção de mundos possíveis como conjuntos maximais consistentes, podemos abordar a sua noção de atualidade.

A distinção entre mundos meramente possíveis e o mundo possível atual consiste no valor de verdade das sentenças que os compõem. Um mundo atual não contém uma sentença falsa, enquanto um mundo meramente possível contém pelo menos uma sentença falsa. Desse modo, o mundo atual é o mundo possível que contém apenas sentenças verdadeiras, e mundos meramente possíveis são divergências extensionais do mundo atual.

4 Uma proposta de leitura de Adams sobre atualidade

A noção central da proposta consiste na identificação entre atualidade e verdade extensional[10]. Proporemos uma leitura específica sobre sentenças atuais enquanto sentenças extensionalmente verdadeiras. Esta proposta visa responder a dois questionamentos: (i) a inteligibilidade da noção de atualidade; e (ii) uma noção de atualismo brando cuja ontologia não é coextensiva com a ontologia possibilista.

[10] Doravante refiro-me à verdade extensional simplesmente como "verdade". Por ora, é suficiente reconhecer a noção de verdade extensional simplesmente como a verdade de sentenças comumente descritas como *categóricas*. Supõe-se uma relação entre entidades linguísticas e verdade como dada segundo o esquema deflacionista, isto é, "S"é verdadeiro se, e somente se, S. Desse modo, esboçamos uma teoria metafísica que se pretende epistemologicamente neutra ao modo como se reconhece a verdade de uma sentença.

A proposta consiste em uma construção atualista da noção de atualidade, com duas noções primitivas: sentenças e verdade. Estas pressuposições permitem uma construção não-circular da noção de atualidade[11]. A estratégia consiste primeiramente em partir dos conceitos básicos para o estabelecimento do conceito de uma sentença atual. Disso, por sua vez, elaboramos construções juízos modais com base nas noções de sentença, verdade e conjuntos consistentes maximais. Desse modo, tratamos a ontologia da metafísica modal como unidimensional, no sentido de elaborar juízos modais com base inteiramente em uma ontologia atualista.

Se alguém crê que há asserções verdadeiras sobre objetos meramente possíveis, este alguém deve crer que objetos meramente possíveis são atuais. Isso é uma contradição. Deve-se pressupor que não há sentenças verdadeiras sobre objetos meramente possíveis. Se se considera uma ontologia de objetos contingentemente não-concretos, deve-se alterar o entendimento sobre a noção de objetos meramente possíveis [12].

A proposta consiste em uma extensão da redução de mundos possíveis presente em [Ada74]. Trata-se de uma extensão da sua abordagem à indivíduos atuais. A noção de mundos possíveis presente em [Ada74] é endossada com poucas alterações.

A abordagem é uma forma de realismo modal, na medida em que se conserva a análise dos operadores modais em termos de mundos possíveis. A redução ocorre por meio de uma explanação atualisticamente aceitável de mundos possíveis.

A abordagem é uma forma de atualismo brando, na medida em que a ontologia faz uso das noções de mundos possíveis enquanto objetos abstratos.

4.1 Indivíduos

A intuição central da proposta é que um objeto é atual se, e somente se, é referente de um fato. Um fato é simplesmente uma sentença verdadeira. Desse modo, o aspecto intuitivo das definições propostas consistem na ideia de atualidade enquanto verdade de sentenças que não contém operadores modais[13]. Poderíamos, com base nesta intuição, estabelecer uma definição basal de sentença atualista do seguinte modo:

Definição 4.1. ***sentença atualista*** α***:*** *Se uma sentença* α *não contém operadores modais, então* α *é atualista.*

[11] Alguém poderia argumentar que a verdade de sentenças poderia pressupor uma ontologia de objetos meramente possíveis, havendo atribuição de verdade à sentenças como "Existe um objeto possível". Fato é que a abordagem pressupõe uma primazia da verdade extensional de sentenças em um mundo atual construído de antemão.

[12] Poder-se-ia argumentar a favor da trivialidade da identificação entre atualidade e verdade. Não se deve, todavia, compreender nesta identificação que o *slogan atualista* é verdadeiro. Ao identificar atualidade e verdade, não se pressupõe que ($\mathfrak{A}$)"(A) é uma sentença verdadeira", embora ($\mathfrak{A}$) seja uma consequência da definição dada.

[13] Estas sentenças serão abordadas posteriormente.

Desse modo, uma sentença como "É possível que Wittgenstein tenha um filho" não é uma sentença atualista. "Wittgenstein teve um filho", todavia, se trata de uma sentença atualista. Com base na definição de sentença atualista, podemos definir uma sentença atual.

Definição 4.2. ***sentença atual*** α**:** *Se uma sentença* α *é atualista e verdadeira, então* α *é atual.*

Desse modo, uma sentença como "Wittgenstein teve um filho", embora seja atualista, não é atual. "Wittgenstein não teve um filho", todavia, se trata de uma sentença atual. Sentenças atuais se referem a fatos.

Com base na definição de sentença atual, podemos definir um objeto atual.

Definição 4.3. ***objeto atual*** u**:** *Se* α *é uma sentença atual e* u *é referência de um termo em* α*, então* u *é atual.*

Desse modo, o nome "Netuno"se refere a um objeto atual por ser referência do nome "Netuno"na sentença atual "Netuno é um planeta gasoso". A partir das definições, pode-se definir uma teoria atual como um conjunto de sentenças atuais, e.g. uma lista de sentenças "Wittgenstein não teve um filho", "Netuno é um planeta gasoso", "Pólux é uma estrela"etc. Pode-se também definir o conjunto de objetos atuais tendo como referência uma teoria atual, e.g. uma lista de objetos nomeados por "Wittgenstein", "Netuno", etc.

Definição 4.4. ***Teoria atual*** Γ**:** *Se, para toda sentença* $\alpha_i \in \Gamma$*,* α_i *é atual, então* Γ *é atual.*

O conjunto unitário da proposição "Netuno é um planeta gasoso", por exemplo, é uma teoria atual.

Definição 4.5. ***Domínio de uma teoria atual:*** *Se* Γ *é uma teoria atual,* α *é uma sentença tal que* $\alpha \in \Gamma$*, e* u *é referência de um termo em* α*, então* u *pertence ao domínio de* Γ

O domínio do conjunto unitário da proposição "Pólux tem um planeta extrassolar", por exemplo, tem em seu domínio os objetos nomeados por "Pólux" e "um planeta extrassolar". Estabelecidas estas definições sobre atualidade, podemos abarcar as noções de mundos possíveis.

4.2 Mundos

A noção de atualidade pode ser descrita por um atualista como uma propriedade de sentenças: a propriedade de ser verdadeira. Desse modo, a solução para a inserção do discurso modal é uma espécie de atualismo *proxy*. Tomamos indivíduos como referentes de sentenças verdadeiras. Tomamos mundo atual como o conjunto maximal de sentenças verdadeiras. Atribuímos, desse modo, descrições de mundos possíveis de maneira atualisticamente aceitável.

Definição 4.6. ***Mundo possível:*** *Se* Γ *é um conjunto consistente maximal de sentenças, então* Γ *é um mundo possível*

Desse modo, um mundo possível compõe um conjunto de sentenças maximais, atuais ou não, e.g. um $\Gamma = \{$"Netuno não é um planeta gasoso", "Wittgenstein não teve um filho", "Pólux é uma estrela",...$\}$

Definição 4.7. ***Mundo meramente possível:*** *Se* Γ *é um conjunto maximal e* $\neg\alpha$ *é uma sentença atual e* $\alpha \in \Gamma$*, então* Γ *é um mundo meramente possível*

Se consideramos um $\Gamma = \{$"Netuno não é um planeta gasoso", "Wittgenstein não teve um filho", "Pólux é uma estrela",...$\}$, tratar-se-ia de um mundo meramente possível, dado que "Netuno não é um planeta gasoso", embora atualista, não seja atual.

Definição 4.8. ***Mundo atual:*** *Se* Γ *é um mundo possível e* Γ *não é um mundo meramente possível, então* Γ *é o mundo atual.*

Dado um mundo possível, e que este mundo possível não contém a negação de uma sentença atual, temos como resultado um conjunto maximal de sentenças atuais. Embora um $\Gamma^{\Diamond}= \{$"Netuno não é um planeta gasoso", "Wittgenstein não teve um filho", "Pólux é uma estrela",...$\}$ não seja atual, $\Gamma^{@}= \{$"Netuno é um planeta gasoso", "Wittgenstein não teve um filho", "Pólux é uma estrela",...$\}$, onde o restante das sentenças são atuais.

Proposição 4.1. ***Para cada mundo possível*** Γ***, há um conjunto domínio*** $D(\Gamma)$ ***correspondente.***

Demonstração. Considere uma teoria Γ_0, onde D é o domínio de Γ_0. Se consideramos $D(\Gamma_0)$ e $D(\gamma_1)$, então $D(\Gamma_0 \cup \{\gamma_1\})$ é $D(\Gamma_0) \cup D(\gamma_1)$. Consideremos um $D(\Gamma_n)$ e $D(\gamma_{n+1})$, então $D(\Gamma_n \cup \{\gamma_{n+1}\})$ é $D(\Gamma_n) \cup D(\gamma_{n+1})$. $\square$

Corolário 4.2.1. *De acordo com a proposição 3.1, há um domínio* $D(\Gamma)$ *de um mundo meramente possível* Γ*.*

Corolário 4.2.2. *De acordo com a proposição 3.1, há um domínio* $D(@)$ *de um mundo atual* $@$*.*

Definição 4.9. ***Estado de coisas*** *são triplas* $\langle O, R, \boldsymbol{ext}\rangle$*, onde* $\boldsymbol{O}$ *é um conjunto não-vazio,* $\boldsymbol{R} \subseteq O^n$ *e* $\boldsymbol{ext} : R \to O^n$*.*

Estabelecemos a noção de estados de coisas como uma tripla $< O, R, \mathbf{ext} >$ [Men91b, p.300]. Podemos afirmar, ao partir de um determinado conjunto maximal de sentenças atuais, um dado domínio **O** que contém os referentes de sentenças atuais tal como na definição 4.5. Mundos meramente possíveis são considerados como conjuntos maximais de sentenças que possuem pelo menos uma sentença falsa, de acordo com a definição 4.7. Partimos da negação de uma sentença verdadeira para a construção de um conjunto maximal. Ser possível é estar incluso em um conjunto maximal de sentenças.

Esta descrição da noção de mundos possíveis permite quantificação sobre mundos enquanto conjuntos maximais de sentenças. É possível parafrasear as condições de verdade de operadores modais substituindo "mundos possíveis" por "conjuntos maximais de sentenças" e "mundo atual" por "conjunto maximal de sentenças verdadeiras".

Uma consequência da proposta é que uma sentença meramente possível é simplesmente uma sentença falsa. Desse modo, a sentença meramente possível ainda pode ser considerada como possível, na medida em que pode ser consistente com um conjunto maximal de sentenças. Se consideramos, por exemplo, a sentença "A neve não é branca". Trata-se de uma sentença meramente possível, uma vez que se trata de uma negação de uma sentença atual. Dado o pressuposto de consistência de um conjunto maximal, "A neve não é branca" não é uma sentença pertencente ao mundo atual.

4.3 Teoremas de SQML

Considerando, desta perspectiva, as consequências da fórmula de Barcan, afirmar que exista algo que possivelmente é filho de Wittgenstein é simplesmente afirmar que há um referente de uma sentença verdadeira, tal que, em um conjunto maximal com pelo menos uma sentença falsa, este objeto é filho de Wittgenstein.

A abordagem não implica que exista um objeto que é filho de Wittgenstein, mas que, em um conjunto maximal de sentenças, um objeto atual a pode compor uma sentença falsa "(a) é filho de Wittgenstein". Qualquer objeto pode constituir uma sentença falsa ao ser denominado como um filho de Wittgenstein.

4.4 Modalidade

Consideremos, todavia, uma sentença como "existem objetos possíveis". Um possibilista afirmará que tal sentença é verdadeira, e deve compor o conjunto de proposições que constituem um mundo atual. Um atualista afirmará que tal sentença é falsa, e que não deve compor o conjunto de proposições que constituem o mundo atual.

Um atualista pode argumentar que, se atualidade de um objeto é ser referente de uma sentença verdadeira, então admitir sentenças verdadeiras sobre objetos meramente possíveis é algo contraditório. Por definição, objetos meramente possíveis não são dotados de atualidade, e, portanto, não poderiam ser atuais. Neste sentido, afirmar que há atualmente objetos meramente possíveis implica que não há objetos meramente possíveis.

5 Conclusões preliminares

Este capítulo teve como propósito descrever as diferentes conceitualizações da noção de atualidade e a querela entre possibilistas e atualistas para uma exploração sistemática no capítulo subsequente. Utilizamo-nos das linguagens apresentadas no primeiro capítulo para expressar em linguagens formais os pontos levantados por ambos os posicionamentos. Em maior detalhe, destacamos a necessidade da quantificação irrestrita a partir de uma definição comum de metafísica. Apontamos a distinção entre atualistas brandos e atualistas estritos. Destacamos uma abordagem inspirada em Adams para a interpretação de atualidade em termos de verdade extensional.

2 Sistemas axiomáticos e Atualidade

Este capítulo visa explorar e analisar opções, dentre as já existentes, de axiomatizações de lógicas que possam sistematizar a noção de atualidade. A abordagem tem como objetivo avaliar opções autorais, e não tem intenção de dar uma resposta última à questão, tendo este capítulo caráter exploratório.

Em primeiro lugar, estipulamos um sistema axiomático $T^{@}$ para regimentar inferências que concernem atualidade. Em segundo lugar, definimos uma classe de lógicas bimodais com base em combinações entre lógicas modais normais e o sistema axiomático $T^{@}$. Em terceiro lugar, destacamos metateoremas sobre combinações entre lógicas, especificamente a classe definida pela combinação entre $T^{@}$ e as lógicas modais normais.

1 $T^{@}$

1.1 Axiomatização

Nesta seção, axiomatizaremos um sistema cujo propósito único é o de sistematizar a noção de atualidade para fusões com outros sistemas modais normais. Começamos com a parte sintática para o estabelecimento dos sistemas formais. Posteriormente exploramos semânticas que viabilizem uma noção coerente com a proposta de atualidade apresentada ao final do capítulo anterior.

Definição 1.1. *Símbolos de $T^{@}$: variáveis proposicionais $p_1, p_2, p_3, ...$, conectivos da lógica proposicional $\neg, \vee$ e o operador @.*

"$@\alpha$"é lido como "atualmente α".

Definição 1.2. ***Fórmulas:***

Toda fórmula atualista é uma fórmula;

Se α é uma fórmula atualista, então $\Box\alpha$ é uma fórmula.

Definição 1.3. ***Fórmulas atualistas:***

Variáveis proposicionais são fórmulas atualistas;

Se α é uma formula atualista, então $\neg\alpha$ é atualista;

Se αe β são fórmulas atualistas, então $\alpha \vee \beta$ é atualista;

Se α é uma fórmula atualista, então $@\alpha$ é uma fórmula atualista.

Operadores verofuncionais derivados são definidos da maneira usual. São exemplos de fórmulas atualistas "$p \to q$", "$p \vee q$", "$@p$". São exemplos de fórmulas: "$\Box(p \to @q)$", "$p \vee q$".

AXIOMAS

Todas as tautologias do cálculo proposicional;

$K^@ : @(\alpha \to \beta) \to (@\alpha \to @\beta)$;

$T^@ : @\alpha \to \alpha$.

Regras de Inferência

Todas as regras de inferência do sistema **T**;

R1 $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash @\alpha$, se α é atualista;

R2 $\vdash \neg @\alpha \Rightarrow \vdash \neg\alpha$.

Teorema 1.1.1. $\neg @\neg\alpha \to @\alpha$

Demonstração. Suponha $\neg @\neg\alpha$. Por uma instância da recíproca de $T^@$, temos que $\neg @\neg\alpha \to \neg @@\neg\alpha$. Por MP, R2 e eliminação de dupla negação, temos α. Como α é atualista, então $@\alpha$ por **R1**. □

Teorema 1.1.2. $@\alpha \to \neg @\neg\alpha$

Demonstração. Suponha $@\alpha$. Por uma instância da recíproca de $T^@$, temos que $\neg @\neg\alpha \to \neg @@\neg\alpha$. Por regras do cálculo proposicional, temos que $\neg @@\neg\alpha$. Pela regra $\neg @\neg\alpha$. □

Corolário 1.1.1. $@\alpha \iff \neg @\neg\alpha$

O corolário é bastante intuitivo. O primeiro teorema indica que, se não é atual que algo não seja o caso, então é atual que este seja o caso. Em um exemplo: se não é atual que Netuno não é um planeta gasoso, então é atual que Netuno é um planeta gasoso. O segundo teorema indica que, se algo é atual, então não é atual que este algo não seja o caso. Em um exemplo: se é atual que Netuno é um planeta gasoso, então não é atual que Netuno não é um planeta gasoso. A equivalência corresponde às intuições subjacentes à noção de atualidade[1].

[1] Como explicitadas no Capítulo 2 desta dissertação.

Outro aspecto do corolário é estabelecer uma distinção entre o operador de necessidade $\Box$ e o operador de atualidade @. Não se pode afirmar que o dual de uma necessidade é equivalente à necessidade, enquanto este parece ser o caso para o operador de atualidade assim definido. Enquanto o dual de necessidade é a possibilidade, o dual da atualidade é a própria atualidade.

Diferentemente dos operadores $\Box$ e $\Diamond$, o operador de atualidade, em analogia à teoria clássica da quantificação, se aproximaria mais de um operador iota, dado que a noção de atualidade requer unicidade de um mundo, isto é, exatamente um mundo. É compreensível, desse modo, comparar a necessidade ao quantificador universal; a possibilidade ao existencial; e a atualidade a uma descrição definida.

Se consideramos o operador de atualidade enquanto uma descrição definida, é intuitivamente clara a equivalência entre duas frases como "A montanha mais alta do mundo é o Everest" e "Não é o caso que a montanha mais alta do mundo não é o Everest".

Teorema 1.1.3. $@@\alpha \to @\alpha$

Demonstração. Consequência imediata de $T^@$ $\Box$

Teorema 1.1.4. *Se α é atualista, então $@\alpha \to @@\alpha$ é teorema.*

Demonstração. Suponha α atualista, aplique R1. Dado que $@\alpha$ é também uma fórmula atualista pela definição 1.2, então $@@\alpha$ é uma consequência imediata por R1. $\Box$

Corolário 1.1.2. $@\alpha \leftrightarrow @@\alpha$

O teorema 1.1.4 prova como teorema o correspondente do axioma 4 em termos de atualidade.

(4)	$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
(4)	$@\alpha \to @@\alpha$

2 Fusões entre $T^@$ e Lógicas Modais

O método de fusão de lógicas foi escolhido por haver resultados em termos de preservação de propriedades relevantes ao debate. Em [Gab03, p.112], há menção de provas de preservação das propriedades de correção e decidibilidade de lógicas submetidas à fusão. Em outras palavras, se ocorre a fusão duas lógicas corretas, o resultado da fusão é correto[Gab03, p.197]. O mesmo ocorre para a propriedade de decidibilidade e completude[Gab03, p.208].

Definição 2.1. *$L_1 \otimes L_2$ é uma fusão entre as lógicas L_1 e L_2 sse L_1 e L_2 contém a linguagem da lógica proposicional, L_1 e L_2 contém operadores modais distintos e $L_1 \otimes L_2$ denota $L_1 \cup L_2$.*

Um exemplo de uma fusão de lógicas é a fusão trivial entre $K \otimes T$, dado o compartilhamento entre essas lógicas da linguagem comum da lógica proposicional e contém operadores modais com diferentes condições. Trata-se da união das fórmulas de K e T. Como K é uma sublógica de T, então esta fusão é simplesmente T.

Teorema 2.0.1. *Se Ax_1 axiomatiza L_1 e Ax_2 axiomatiza L_2, então $Ax_1 \cup Ax_2$ axiomatiza $L_1 \otimes L_2$*

Por ora não nos deteremos na prova do teorema acima, estando a prova disponível em [Gab03]. Dado um sistema formal Ax_K de K e outro sistema formal Ax_T de T, temos como uma fusão trivial $Ax_K \otimes Ax_T$, que é simplesmente Ax_T. $Ax_K \otimes Ax_T$, por sua vez, axiomatizam $K \otimes T$.

Teorema 2.0.2. *Suponha as classes C_m e C_n de m-estruturas $\langle W, R_1, ..., R_m\rangle$ e n-estruturas $\langle W, S_1, ..., S_n\rangle$. $C_m \otimes C_n$ consiste em combinações arbitrárias de n+m-estruturas $\langle W, R_1, ..., R_m, S_1, ..., S_n\rangle$.*

Por ora não nos deteremos na prova do teorema acima, estando a prova disponível em [Gab03].

Definição 2.2. *Definimos uma classe de lógicas multimodais $L^{\Box @}$. Esta classe é composta por $T^{@} \otimes L_{\Box}$, onde $L_{\Box}$ é uma lógica modal normal.*

São exemplos de sistemas inclusos na classe $L^{\Box @}$: $T^{@} \otimes T$, $T^{@} \otimes B$, $T^{@} \otimes S4$ e $T^{@} \otimes S5$, entre outros sistemas intermediários. Isso permite o acréscimo intuitivo do operador de atualidade em outras lógicas modais normais comumente utilizadas para sistematizar noções em metafísica. $T^{@} \otimes T$, por exemplo, tem como teorema a seguinte fórmula.

Definição 2.3. *Definimos uma classe de estruturas multimodais $C^{\Box @}$. Esta classe é composta por $C^{@} \otimes C^{\Box}$, onde $C^{\Box}$ é uma classe de estruturas de uma lógica modal normal.*

Consideremos o caso particular de $T^{@} \otimes T$. Os símbolos são as variáveis proposicionais e os operadores $\Box$ e @. Pressupomos a dualidade do operador $\Box$ e o teorema da dedução, que já fora abordada no primeiro capítulo desta dissertação.

Teorema 2.0.3. $T^{@} \otimes T \vdash @\alpha \to \Diamond\alpha$

1.	$@\alpha$	Hip
2.	$@\alpha \to \alpha$	$T^{@}$
3.	α	1,2 MP
4.	$\alpha \to \Diamond\alpha$	T
5.	$\Diamond\alpha$	3,4 MP
6.	$@\alpha \to \Diamond\alpha$	1,5 TD

Teorema 2.0.4. $T^@ \otimes T \vdash \Box(@\alpha \to \Diamond\alpha)$

Demonstração. Aplicamos a regra de necessitação ao teorema anterior. $\Box$

Intuitivamente, em todos os mundos possíveis, a atualidade implica possibilidade. De um ponto de vista semântico, o mundo atual é acessado por todos os mundos do modelo.

Teorema 2.0.5. $T^@ \otimes T \vdash \Box\alpha \to @\alpha$

1.	$\neg\Diamond\alpha \to \neg@\alpha$	Teorema 2.0.2
2.	$\neg\Diamond\neg\alpha \to \neg@\neg\alpha$	1, SU
3.	$\Box\alpha \to \neg@\neg\alpha$	2, Def. $\Box$
4.	$\Box\alpha \to @\alpha$	3, Corolário 1.0.2. e Eq

Teorema 2.0.6. $T^@ \otimes T \vdash \Box(\Box\alpha \to @\alpha)$

Demonstração. Aplicamos a regra de necessitação ao teorema anterior. $\Box$

Consideremos o caso particular de $T^@ \otimes S5$.

Teorema 2.0.7. $T^@ \otimes 5 \vdash @\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

1.	$@\alpha \to \Diamond\alpha$	Teorema 2.0.2
2.	$\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$	5
3.	$@\alpha \to \Box\Diamond\alpha$	PC

2.1 Semântica

Partindo do arcabouço conceitual elaborado na última seção do capítulo anterior, utilizamo-nos da semântica de mundos possíveis com a ressalva de uma descrição atualisticamente aceitável destes mundos, explanado no capítulo anterior e definido no primeiro capítulo.

Definimos uma semântica que corresponde às noções estabelecidas no último capítulo sobre atualidade. Estabelecemos estruturas estendidas resultantes das fusões descritas na seção anterior.

Definição 2.4. ***v****: trata-se de uma função injetora que atribui elementos de W a números naturais, i.e. v:$W \to \mathbb{N}$*

A definição de uma lista de mundos se torna necessária para o estabelecimento de uma referência na metalinguagem a um elemento específico de W. Optamos por essa abordagem em detrimento da abordagem onde constam "elementos discernidos" na estrutura.

Definição 2.5. ***@-Estrutura***$\langle W, R^@\rangle$ *é uma estrutura onde* W *é um conjunto não-vazio, e* $R^@ \subset W \times W$ *tal que* $\forall w, w', w'' \in W, wR^@w'$ *sse para todo* $w'' \in W$ $v(w') \leq v(w'')$.

Nesta definição, fora estipulada uma condição específica para $R^@$ onde é estabelecido um *centro* para a relação de acessibilidade. Este centro consiste precisamente no mundo atual. Denomino, em analogia ao conceito topológico de conjuntos estrelados, a condição de uma relação de acessibilidade estrelada, onde há um ponto central na estrutura que é acessada por todos os outros mundos. Podemos definir desta maneira uma relação de acessibilidade estrelada relativa a w_i da seguinte maneira.

$$\exists w_i \in W; \forall w_j \in W, w_j R w_i$$

Obviamente S5 satisfaz a cláusula, dado que cada mundo seria o centro do conjunto estrelado. A divergência entre a relação de acessibilidade proposta e S5 consiste na unicidade do mundo central do modelo. Em outras palavras, a relação de acessibilidade deve satisfazer a cláusula acima e qualquer mundo no modelo que satisfaça a mesma condição é igual a w_i.

Definição 2.6. *R é uma relação de acessibilidade estrelada em uma estrutura se, e somente se:*

(i) $R \subseteq W \times W$;

(ii) $\forall w, w' \in W; \langle w, w'\rangle \in R$ *sse* $v(w') \leq v(w)$;

(iii) $\exists w \in W, \forall w', w'' \in W,$ *se* $v(w) \leq v(w'')$ *e* $v(w') \leq v(w'')$, *então* $w = w'$.

Por meio de fusões de estruturas de acordo com a definição 3.3, podemos construir a seguinte estrutura, sendo arbitrária a escolha sobre as restrições de acessibilidade sobre R.

Definição 2.7. ***@K-Estrutura*** $\langle W, R, R^@\rangle$ *é uma estrutura onde* W *é um conjunto não-vazio,* $R^@ \subseteq R$ *e* $R \subseteq W \times W$.

Supõe-se que $R^@$ seja definido como em 4.2. O nome @K-estrutura indica uma fusão de estruturas sem restrições especiais de acessibilidade[2]. Para abreviar a representação dos mundos em um modelo, estabelecemos a seguinte leitura de w_i. Consideramos w_i como o mundo tal que $v^{-1}(i) = w$[3]

[2] Esta forma de modelagem de conceitos por meio de fusões é plenamente inspirada nas abordagens de Alexandre Costa-Leite (cf.[CL10]; [CL16]).

[3] Utilizamos a convenção de denominar f^{-1} como a função inversa de f.

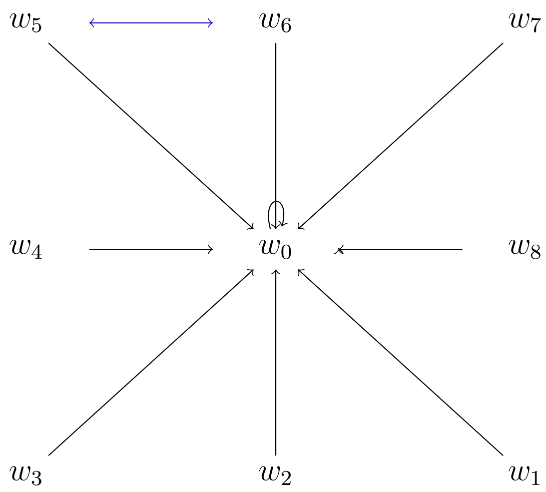

Figura 4 – Exemplo de K@-estrutura

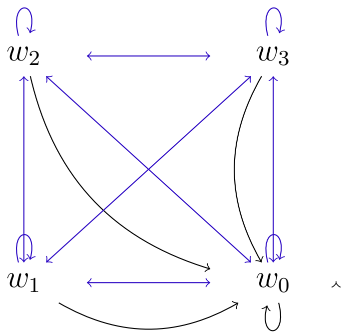

Figura 5 – Exemplo de 5@-estrutura

Um exemplo de uma K@-estrutura consta na figura 6, onde $W = \{w_1, ..., w_8\}$, $R^@$ é dado pela definição e $R = \{\langle w_5, w_6\rangle, \langle w_6, w_5\rangle\}$. Nesta figura, as relações de acessibilidade de $R^@$ são denotadas pelas setas pretas, enquanto as relações de acessibilidade de R são denotadas pelas setas azuis.

As definições devem valer para todas as lógicas pertencentes à classe de lógicas modais normais. Desse modo, é possível também estabelecer uma 5@-estrutura, como é evidente no próximo exemplo na figura 7.

Definição 2.8. ***Modelo*** *$\langle W, R, R^@, V\rangle$ é um modelo onde $\langle W, R, R^@\rangle$ é uma estrutura e V é uma valoração tal que, para cada variável proposicional,*

(i) *Para cada sentença p e $w \in W$, $V(w, p) = 1$ ou $V(w, p) = 0$*

(ii) *Para cada sentença p e* $w \in W$*, se* $V(w, \neg\alpha) = 1$ *então* $V(w, \alpha) = 0$*. Se* $V(w, \alpha) = 1$*, então* $V(w, \neg\alpha) = 0$

(iii) *Para cada sentença* α *e* $w \in W$*, se* $V(w, \alpha\vee\beta) = 1$ *então* $V(w, \alpha) = 1$ *ou* $V(w, \beta) = 1$.

(iv) *Para cada sentença* α *e* $w \in W$*, se* $V(w, \Box\alpha) = 1$ *então, para cada* $w' \in W$ *tal que* wRw'*,* $V(w, \alpha) = 1$.

(v) *Para cada sentença* α *e* $w \in W$*, se* $V(w, @\alpha) = 1$ *então, existe* $w' \in W$ *tal que* $wR^{@}w'$*,* $V(w', \alpha) = 1$.

De modo análogo, estabelecemos as condições de verdade para os conectivos derivados.

Definição 2.9. *Uma sentença* α *é dita válida em um* $K@-Modelo$ $\mathfrak{M}$ *sse* α *é verdadeiro em todos os mundos possíveis em* $\mathfrak{M}$

Teorema 2.1.1. $T^{@} \otimes T \models \Box(@\alpha \to \Diamond\alpha)$

Demonstração. Suponha que, dado um mundo $w \in W$ e um modelo $\mathfrak{M}$, α é uma fórmula atualista e $\mathfrak{M}, w \models \alpha$. Suponha que w seja o *centro* do modelo $\mathfrak{M}$. Neste caso, existe um w tal que $wR^{@}w$ e, segue-se da definição 3.5 que $\mathfrak{M}, w \models @\alpha$. Dada a propriedade de reflexividade das relações de acessibilidade em T, temos que $\mathfrak{M}, w \models \Diamond\alpha$. Pela definição 3.5, é válida a fórmula $\mathfrak{M}, w \models @\alpha \to \Diamond\alpha$ Como w é um mundo arbitrário no modelo, $\mathfrak{M}, w \models \Box(@\alpha \to \Diamond\alpha)$. □

3 $QT^{@}$

3.1 Axiomatização

Podemos estender a abordagem aos sistemas de lógicas modais quantificadas resultantes das fusões com $QT@$:

Definição 3.1. *Símbolos de* $T^{@}$*: variáveis de predicados* $P_1, P_2, P_3, ...$*, variáveis para indivíduos* $x_1, x_2, x_3, ...$ *conectivos da lógica proposicional* $\neg\vee$*, o quantificador* $\forall$ *e o operador* @

Definição 3.2. ***Fórmulas atualistas:***

Fórmulas da forma Px*, onde* P *é uma variável de predicado e* x *é uma variável individual, são fórmulas atômicas*

Toda fórmula atômica é atualista

Se α é uma formula atualista, então $\neg\alpha$ é atualista

Se αe β é uma formula atualista, então $\alpha \vee \beta$ é atualista

Se α é uma fórmula atualista, então $\forall\alpha$ é uma fórmula atualista

Se α é uma fórmula atualista, então $@\alpha$ é uma fórmula atualista

Definição 3.3. ***Fórmulas:***

Toda fórmula atualista é uma fórmula

Se α é uma fórmula atualista, então $\Box\alpha$ é uma fórmula

AXIOMAS

Axiomas de $T^@$

Axiomas da teoria clássica de quantificação

Regras de Inferência

Regras de Inferência de $T^@$

Regras de Inferência da teoria clássica de quantificação

Definição 3.4. ***"Predicado"de atualidade A x*** . *Consideramos um predicado de atualidade qualquer fórmula da forma $@\top x$, onde $\top$ é uma tautologia.*

A definição de um predicado de atualidade permite estabelecer a atualidade tanto de proposições quanto para indivíduos. Isso, por sua vez, é uma ambiguidade da noção de atualidade que pode ser expressa nesse sistema formal. Proposições atuais são extensionalmente verdadeiras, enquanto objetos atuais são *truth-bearers*, i.e. objetos que constituem a verdade de uma proposição.

Teorema 3.1.1. $\forall x @\alpha x \to @\forall x\alpha$

Demonstração. Suponha que αx seja uma fórmula atualista. Por R1 e generalização, $\forall x @\alpha x$. Como $\forall x\alpha x$ é também uma fórmula atualista, então por R1 $@\forall x\alpha x$. □

Teorema 3.1.2. $@\forall x\alpha x \to \forall x @\alpha$

Demonstração. Prova análoga à anterior.

□

Corolário 3.1.1. $@\forall x\alpha x \leftrightarrow \forall x @\alpha$

Por meio de procedimento análogo ao caso de $T@$ proposicional, podemos definir uma classe de estruturas com fusões entre $QT^{@}$ e as lógicas modais quantificadas normais como QK,QT,QD, entre outros.

Definição 3.5. *Definimos uma classe de lógicas multimodais $QL^{\Box @}$. Esta classe é composta por $QT^{@} \otimes QL_{\Box}$, onde $QL_{\Box}$ é uma lógica modal quantificada normal.*

São exemplos de sistemas inclusos na classe $L^{\Box @}$: $T^{@} \otimes T$,$T^{@} \otimes B$, $T^{@} \otimes S4$ e $T^{@} \otimes S5$, entre outros sistemas intermediários. Isso permite a inclusão do operador de atualidade em outras lógicas modais normais comumente utilizadas para sistematizar noções em metafísica. $T^{@} \otimes T$, por exemplo, tem como teorema a seguinte fórmula.

3.2 Semântica

Definição 3.6. *Definimos uma $QT^{@}$-estrutura como um par $\langle\langle W, R, R^{@}\rangle, D\rangle$, onde $\langle W, R, R^{@}\rangle$ é uma estrutura da classe $C^{\Box @}$,como estabelecido na definição 2.5, e D é um conjunto não-vazio.*

Definição 3.7. *Definimos um $QT^{@}$-modelo como um par $\langle\langle W, R, R^{@}, D\rangle, V\rangle$, onde $\langle W, R, R^{@}, D\rangle$ é uma $QT^{@}$-estrutura e V tal que:*

(i) *Para cada atômica $P(x_1, ..., x_n)$ e $w \in W$, $V(w, P(x_1, ..., x_n)) = 1$ sse $\langle v(x_1), ..., v(x_n)\rangle \in V(P, w)$;*

(ii) *Para cada sentença α e $w \in W$, se $V(w, \neg\alpha) = 1$ então $V(w, \alpha) = 0$. Se $V(w, \alpha) = 1$, então $V(w, \neg\alpha) = 0$*

(iii) *Para cada sentença α, β e $w \in W$, se $V(w, \alpha \vee \beta) = 1$ então $V(w, \alpha) = 1$ ou $V(w, \beta) = 1$.*

(iv) *Para cada sentença α e $w \in W$, se $V(w, \Box\alpha) = 1$ então, para cada $w' \in W$ tal que wRw', $V(w, \alpha) = 1$.*

(v) *Para cada sentença α e $w \in W$, se $V(w, @\alpha) = 1$ então existe um $w' \in W$ tal que $wR^{@}w'$, $V(w, \alpha) = 1$.*

Uma fórmula é dita *válida* em um modelo $\mathfrak{M}$ sse a fórmula é verdadeira em todos os mundos do modelo.

4 Conclusões preliminares

Neste capítulo, buscamos axiomatizar sistemas de lógicas bimodais quantificadas para um operador de atualidade. A abordagem diverge de outras classes de sistemas por utilizar concomitantemente o método de fusão entre lógicas e a introdução de uma relação especial de acessibilidade própria para o operador de atualidade.

Trata-se de uma proposta esquemática que aparentemente captura sem prejuízos a noção de atualidade. Por meio de fusões de lógicas e o trabalho em lógicas bimodais quantificadas, pode-se de antemão indicar um ganho significativo em termos de expressibilidade de conceitos filosóficos com pouco ganho em complexidade. Desse modo, insisto na simplicidade da solução de modelagem de conceitos por meio de fusões por sua simplicidade e conservação de propriedades computacionais relevantes.

Conclusão

A dissertação buscou construir lógicas que sistematizam a noção de atualidade. Como resultado, (i) obtivemos uma classe de lógicas correspondentes às lógicas modais normais com o acréscimo de um operador de atualidade por meio de fusões que correspondem às noções intuitivas do conceito central do trabalho e (ii) consideramos uma relação especial de acessibilidade com relação a construção de um modelo com um operador de atualidade. Dentre outros fatos, (iii) pode-se constatar uma divergência fundamental entre os operadores aléticos de necessidade e possibilidade e o operador de atualidade. É insuficiente destacar a noção de atualidade como quantificadores sobre mundos, dado que um operador intuitivo de atualidade deve (a) garantir sua unicidade entre os mundos do modelo; (b) discernir-se inequivocamente do restante dos mundos possíveis, se se adota uma postura não-indexicalista da noção de atualidade (v. o Capítulo 2 desta dissertação).

Entre os resultados secundários, pode-se destacar o desenvolvimento de um aparato conceitual plenamente inspirado em [Ada74]. Este aparato permite uma interpretação filosófica dos sistemas desenvolvidos no capítulo posterior. Pode-se também denominar como resultado secundário o provimento de hexágonos e quadrado das oposições como recurso didático para a ilustração de oposições lógicas dentro das perspectivas do atualismo estrito e atualismo brando.

Bibliografia

[Ada74] Robert Adams. "Theories of Actuality". Em: *Nous* 8.3 (1974), pp. 211–231.

[BD66] Robert Blanché e Georges Davy. *Structures Intellectuelles*. Vol. 21. 4. Presses Universitaires de France, 1966, pp. 541–542.

[BDV01] Patrick Blackburn, Maarten De Rijke e Yde Venema. *Modal Logic*. 2001, p. 554. ISBN: 0-521-80200-8; 0-521-52714-7. DOI: 10.1017/CBO9781107050884.

[Bea02] George Bealer. "Modal Epistemology and the Rationalist Renaissance". Em: 114.3 (2002), pp. 71–125.

[Ben09] Karen Bennett. "Two Axes of Actualism". Em: *Philosophical Review* 114.3 (2009), pp. 297–326.

[BRV02] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke e Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.

[Car46] Rudolf Carnap. "Modalities and Quantification". Em: *Journal of Symbolic Logic* 11.2 (1946), pp. 33–64. DOI: 10.2307/2268610.

[Car47] Rudolf Carnap. *Meaning and Necessity*. University of Chicago Press, 1947.

[CF11] Nino B. Cocchiarella e Max A. Freund. *[coc] Modal Logic: An Introduction to its Syntax and Semantics*. 2011, pp. 1–288. ISBN: 9780199851898. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195366587.001.0001.

[CH96] M. J. Cresswell e G. E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

[Che80] Brian F. Chellas. *Modal Logic: an Introduction*. Vol. 61. 2/3. 1980, p. 295. ISBN: 0521295157. DOI: 9780521295154(pbk.). URL: http://www.jstor.org/stable/20013303.

[CL10] Alexandre Costa-Leite. "Logical Properties of Imagination". Em: *Abstracta* 6.1 (2010), pp. 103–116. DOI: 10.1111/j.1520-8583.2003.00017.x.

[CL16] Alexandre Costa-Leite. "Interplays of knowledge and non-contingency". Em: *Logic and Logial Philosophy* 25.4 (2016), pp. 521–534. DOI: 10.12775/LLP.2016.015.

[Coc69] Nino Cocchiarella. "A completeness theorem in second order modal logic". Em: *Theoria* 35.2 (1969), pp. 81–103. ISSN: 17552567. DOI: 10.1111/j.1755-2567.1969.tb00361.x.

[Cre91] Max Cresswell. "In Defence of the Barcan Formula". Em: *Logique Et Analyse* 135.136 (1991), pp. 271–282.

[End01] Herbert B Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Vol. 40. 2. 2001, p. 317. ISBN: 0122384520. DOI: 10.2307/2272104. arXiv: arXiv:1011.1669v3. URL: http://books.google.com/books?id=JO4{_}NVZ{_}NqkC{\&}pgis=1.

[End72] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. New York: Academic Press, 1972.

[Fin06] Kit Fine. "Prior on the Construction of Possible Worlds and Instants". Em: *Modality and Tense* (2006), pp. 133–170. DOI: 10.1093/0199278709.003.0005.

[Fin16] Kit Fine. "Williamson on Fine on Prior on the Reduction of Possibilist Discourse". Em: *Canadian Journal of Philosophy* 46.4-5 (2016), pp. 548–570. DOI: 10.1080/00455091.2016.1153407.

[Fin85] Kit Fine. "Reasoning with arbitrary objects". Em: *Journal of Philosophical Logic* (1985), pp. 57–107. DOI: 10.2307/2274449.

[Fit] Melvin Fitting. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. ISBN: 9789048183814.

[FM07] Melvin Fitting e Richard Mendelsohn. *First-order modal logic*. Vol. 3. 2007, pp. 549–620. ISBN: 9780444516909. DOI: 10.1016/S1570-2464(07)80012-7. arXiv: arXiv:1011.1669v3.

[FP76] Kit Fine e Alvin Plantinga. *The Nature of Necessity*. Vol. 85. 4. Oxford University Press, 1976, p. 562. DOI: 10.2307/2184280.

[Gab03] Dov M. Gabbay. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*. Elsevier North Holland, 2003.

[GFM02] Roderic A. Girle, Melvin Fitting e Richard L. Mendelsohn. *First-Order Modal Logic*. Vol. 8. 3. Jstor, 2002, p. 429. DOI: 10.2307/3062210.

[GG17] D. Gabbay e F Guenthner. *Extensions of Classical Logic*. Vol. 91. 2017, pp. 399–404. ISBN: 9789400962613.

[HC96] G. E. Hughes e M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Vol. 107. 3. 1996, p. 421. ISBN: 0415125995. DOI: 10.4324/9780203991787. URL: http://www.amazon.com/dp/0415126002.

[Hil70] David Hilbert. "Axiomatic Thinking". Em: *Philosophia Mathematica* 1-2 (1970), pp. 1–12. DOI: 10.1093/philmat/s1-7.1-2.1.

[Hun96] Geoffrey Hunter. *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. 1996, p. 0. ISBN: 0520023560. URL: citeulike-article-id{\%}5Cn5236912{\%}5Cnhttp{\%}5Cn//www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike09-20{\&}path=ASIN/0520023560.

[Kri63] Saul A. Kripke. “Semantical Considerations on Modal Logic”. Em: *Acta Philosophica Fennica* 16.1963 (1963), pp. 83–94.

[Kri80] Saul Kripke. *Naming and Necessity*. Ed. por Darragh Byrne e Max Kölbel. Routledge, 1980, pp. 431–433.

[Lew32] Clarence Irving Lewis. *Symbolic Logic*. Dover Publications, 1932.

[Lew86] David Lewis. *On the plurality of worlds*. 1986, p. 288. ISBN: 9789400962613.

[LZ94a] Bernard Linsky e Edward Zalta. “In Defense of the Simplest, Strongest Modal Logic”. Em: *Philosophical Perspectives* 8: Logic a.1994 (1994), pp. 431–458.

[LZ94b] Bernard Linsky e Edward N. Zalta. “In Defense of the Simplest Quantified Modal Logic”. Em: *Philosophical Perspectives* 8.Logic and Language (1994), pp. 431–458. DOI: 10.2307/2214181.

[Mar46] Ruth Barcan[from old catalog] Marcus. *A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication*. [N. P., 1946.

[Mar61] Ruth Barcan Marcus. *Modalities: Philosophical Essays*. Oxford University Press, 1961.

[Men18] Christopher Menzel. “Actualism”. Em: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por Edward N. Zalta. Summer 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[Men91a] Christopher Menzel. “The True Modal Logic”. Em: *Journal of Philosophical Logic* 20.4 (1991), pp. 331–374. DOI: 10.1007/BF00249434.

[Men91b] Cristopher Menzel. “The True Modal Logic”. Em: 13 (1991).

[Pla76] Alvin Plantinga. “Actualism and Possible Worlds”. Em: *Theoria* 42.1-3 (1976), pp. 139–160. DOI: 10.1111/j.1755-2567.1976.tb00681.x.

[Pri03] Arthur N. Prior. *Papers on Time and Tense*. Oxford University Press UK, 2003.

[Pri17] Arthur Prior. *Extensions of Classical Logic*. Vol. 91. 2017, pp. 399–404. ISBN: 9789400962613.

[Qui55] W. V. O. Quine. “Three Grades of Modal Involvement”. Em: *Journal of Symbolic Logic* 20.2 (1955), pp. 168–169. DOI: 10.2307/2266909.

[Qui68] Willard V. Quine. “Ontological Relativity”. Em: 65.7 (1968), pp. 185–212.

[Seg71a] Krister Segerberg. *An Essay in Classical Modal Logic*. Uppsala, Filosofiska Föreningen Och Filosofiska Institutionen Vid Uppsala Universitet, 1971.

[Seg71b] Krister Segerberg. *An Essay in Classical Modal Logic - Volume 3*. 13. 1971.

[Sho67] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1967.

[Smu] Raymond M Smullyan. *First-Order Logic*. ISBN: 9783642867200.

[Smu16] Arthur Smullyan. “Modality and Description”. Em: 13.1 (2016), pp. 31–37.

[Soa10] Scott Soames. *Philosophy of Language*. 2010, 201 LA –en. ISBN: 9780691138664. DOI: 10.4324/9780203519615. URL: http://books.google.com/books?id=0VZVR3F1QTQC.

[ST68] Robert C. Stalnaker e Richmond Thomason. “Abstraction in First-Order Modal Logic”. Em: *Theoria* 34.3 (1968), pp. 203–207. ISSN: 17552567. DOI: 10.1111/j.1755-2567.1968.tb00351.x.

[Sta12] Robert C Stalnaker. *Mere Possibilities*. 2012, p. 167. ISBN: 0691147124.

[Tub16] Adam Tamas Tuboly. *A Critical Introduction to the Metaphysics of Modality*. Vol. 16. 3. 2016, pp. 463–465.

[Wil] Timothy Williamson. “Timothy Williamson - "Necessitism, Contingentism and Plural Quantification".pdf”. Em: (), pp. 1–136.

[Wil03] Timothy Williamson. “Everything”. Em: *Philosophical Perspectives* 17.1 (2003), pp. 415–465. DOI: 10.1111/j.1520-8583.2003.00017.x.

[Wil13] Timothy Williamson. *Modal Logic as Metaphysics*. 2013. ISBN: 9780199552078.

[Wil16a] Timothy Williamson. “Modal science”. Em: *Canadian Journal of Philosophy* 46.4-5 (2016), pp. 453–492. ISSN: 19110820. DOI: 10.1080/00455091.2016.1205851. URL: http://dx.doi.org/10.1080/00455091.2016.1205851.

[Wil16b] Timothy Williamson. “Reply to Fine”. Em: *Canadian Journal of Philosophy* 46.4-5 (2016), pp. 571–583. DOI: 10.1080/00455091.2016.1205853.

[Wil98] Timothy Williamson. “Bare possibilia”. Em: *Erkenntnis* 48.2-3 (1998), pp. 257–273. ISSN: 0165-0106. DOI: 10.1023/A:1005331819843. URL: http://www.springerlink.com/content/u1475663q011h456/.

[WMC09] Ryan Wasserman, David Manley e David Chalmers. *Metametaphysics: New Essays on the Foundations of Ontology*. Oxford University Press, 2009.

[YM16] Juhani Yli-Vakkuri e Mark McCullagh. *Williamson on Modality*. Vol. 46. 4-5. 2016, pp. 453–851.

[Zal83] Edward N. Zalta. *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*. D. Reidel, 1983.

APÊNDICE A – Lógicas Modais de Primeira Ordem

Este apêndice visa abordar sistemas axiomáticos de lógicas modais quantificadas e não apresenta nenhum conteúdo autoral. O propósito do apêndice consiste em um estudo preliminar da lógica necessária para a discussão filosófica nos capítulos da dissertação. Em uma introdução, apresentamos a nossa metalinguagem e descrevemos a noção de sistema axiomático. Na primeira seção, descrevemos uma axiomatização da lógica de primeira ordem, juntamente com algumas propriedades relevantes. Na segunda seção, descrevemos algumas axiomatizações de lógicas modais quantificadas, além de destacar propriedades destes sistemas. Na terceira seção, apresentamos propriedades metalógicas dos sistemas formais descritos na segunda seção.

Na primeira seção, utilizamos como principal referência o livro de Mendelsohn *Introduction to Mathematical Logic* **Mendelsohn** na parte relativa às teorias de primeira ordem, com exceção da seção sobre sistemas axiomáticos, que é baseado em *Mathematical Logic* de Joseph Shoenfield [Sho67]. Na segunda e terceira seções, uti0lizamo-nos principalmente dos livros *First-order Modal Logic* de Melvin Fitting e *A New Introduction to Modal Logic* de Hughes e Cresswell.

1 Introdução

É conveniente estabelecer algumas convenções relativas à notação. Usaremos as letras minúsculas do início do alfabeto grego (α, β, γ, δ...) como metavariáveis para fórmulas, i.e. variáveis na metalinguagem sobre fórmulas. Usaremos algumas letras minúsculas do final do alfabeto grego ($\psi, \phi, ...$) como metavariáveis sobre predicados e relações. Usaremos algumas letras minúsculas do final do alfabeto latino ($u, v, ...$) como nomes de indivíduos. Eventuais sobrescritos serão utilizados em predicados para a indicação de sua aridade. Subescritos são utilizados com o intuito de enumeração de predicados, variáveis, etc. Abreviamos *se, e somente se* como *sse*.

Restringimos a introdução do formalismo àqueles elementos utilizados em provas formais ao longo do capítulo. Noções intuitivas, portanto, são pressupostas em contextos onde a formalização não é uma demanda.

Sistemas Axiomáticos

Desde David Hilbert [Hil70], a noção de sistema axiomático tem sido uma noção central para a lógica. A lógica se distingue de outras áreas de pesquisa, dentre outros motivos, pelo caráter das suas afirmações. Ao invés de observações, por exemplo, parte-se de axiomas com regras de transformação que são utilizadas como provas para a constatação de teoremas. Nem todas as afirmações, todavia, podem apresentar uma justificativa. Se pudessem, as afirmações que comporiam as justificativas deveriam ser justificadas, gerando um regresso ao infinito. Faz-se necessário, portanto, estabelecer afirmações primeiras ou autoevidentes.

Neste contexto, consideremos, no lugar de afirmações primeiras, as sentenças correspondentes às afirmações. Partindo do que foi dito, é necessário estabelecer algumas sentenças que não são passíveis de justificativa ou prova. Chamamos estas sentenças de axiomas. Sentenças provadas a partir dos axiomas são denominadas teoremas. Desse modo, são axiomas as sentenças impassíveis de prova, e são teoremas as sentenças provadas a partir dos axiomas.

Consideramos uma lógica como uma coleção de sentenças Λ. Compõe uma parte desta coleção os *axiomas*. *Teoremas*, por sua vez, constituem as sentenças que compõem Λ. Deste modo é possível reduzir um número considerável de afirmações a alguns poucos axiomas. Estes axiomas comumente tendem a ser tomados como verdadeiros pela sua evidência imediata, dada a natureza dos conceitos correspondentes que parecem reafirmá-los **shoenfield**. Assim, afirmamos determinados *conceitos básicos* que parecem implicar a verdade dos nossos axiomas. Outros conceitos, denominados *conceitos derivados*, são definidos em função dos *conceitos básicos*. Por um lado, temos *axiomas* e seus conceitos básicos correspondentes. Por outro, temos teoremas e seus conceitos derivados correspondentes.

Podemos descrever os conceitos básicos com a finalidade de concluir a verdade evidente dos axiomas, e, posteriormente, provar por meio dos axiomas fatos sobre conceitos básicos e derivados. Consiste em um *sistema axiomático* o conjunto dos conceitos axiomas e teoremas.

A pesquisa restrita aos axiomas e aos teoremas são denominadas pesquisas sobre a sintaxe de um dado sistema formal. A pesquisa restrita aos conceitos básicos e derivados, i.e. o significado das sentenças do sistema axiomático, é denominada uma pesquisa semântica de um dado sistema formal. A sintaxe de um sistema axiomático pode ser descrita como um *sistema formal*. Desse modo, podemos definir um sistema axiomático como um par constituído pelo sistema formal e os modelos atribuídos a este sistema formal.

Um *sistema formal* é constituído em parte por um conjunto de símbolos. Cada sequência destes símbolos é denominada uma *expressão* desse sistema formal. O primeiro componente do sistema formal é (i) uma linguagem, que deve ser definida para esse sistema formal de forma que a estrutura das sentenças correspondam à estrutura do seu significado. Denominamos a linguagem de um sistema F como *L(F)*. São, portanto, componentes do sistema formal seu alfabeto e sua regra de formação de fórmulas.

São parte do sistema formal (ii) seus *axiomas*, que devem ser articulados partindo da linguagem definida. Outra parte do sistema formal são (iii) suas *regras de inferência*, que permitem partir dos axiomas para chegar em teoremas. Estas regras permitem inferir uma sentença, a *conclusão*, a partir de outras sentenças, as *hipóteses*, a partir de determinadas condições das hipóteses.

Teoremas são definidos da seguinte maneira. Todo axioma é um teorema. Se todas as hipóteses de uma regra de inferência de um dado sistema formal são teoremas, então sua conclusão é também um teorema. Podemos, dessa maneira, descrever o conjunto de axiomas de um dado sistema formal como S_0. S_1 pode ser descrito como o conjunto das conclusões cujas hipóteses pertencem a S_0. S_2 pode ser compreendido da mesma maneira, como conclusões cujas hipóteses pertencem a S_0 ou S_1. Podemos definir dessa maneira S_3, S_4, e assim por diante. Podemos definir um conjunto S_ω como o conjunto de teoremas que pertencem a algum S_i onde $i = 0$, $i = 1$, e assim por diante, sendo i um número natural. Então consiste em S_ω o conjunto de teoremas de um dado sistema formal.

Estabelecemos algumas definições que serão utilizadas ao longo do capítulo.

Definição 1.1. *Uma lógica* Λ_1 *é extensão de uma lógica* Λ_0 *sse* $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_1$

Definição 1.2. *: Uma linguagem é constituída de (i) um conjunto de símbolos S; (ii) um conjunto T de expressões com símbolos de S; (iii) um conjunto de fórmulas, cujos elementos pertencem a T.*

Nas próximas seções, descreveremos uma série de sistemas axiomáticos com base nos termos que estabelecemos na primeira seção.

2 Teorias de Primeira Ordem

A lógica de primeira ordem permite sistematizar a validade de inferências entre sentenças que incluem quantificadores como "para todo" ou "algum". "$\forall$" é o símbolo do quantificador universal, e pode ser lido como *para todo, tudo, etc*, afirmando que tudo em um universo do discurso satisfaz uma dada condição. "$\exists$" é o símbolo do quantificador existencial, e pode ser lido como *algum*, afirmando que algo no universo do discurso satisfaz uma dada condição. Definimos um fragmento da linguagem usual de uma teoria de primeira ordem S.

Construiremos *L(S)* excluindo constantes, símbolos funcionais e a identidade. Esta será introduzida posteriormente[1].

Iniciamos ao definir o sistema formal correspondente, destacando-lhes a linguagem e as fórmulas.

2.1 Sintaxe

Uma linguagem *L(S)* arbitrária é descrita na definição 1.1.2. A definição pode ser parafraseada em uma tripla $\langle S, T, F \rangle$, onde S consiste em um conjunto de símbolos, T consiste em um conjunto de sequências de elementos de S e F é um subconjunto de T com sequências de símbolos restritas às regras de formação de fórmulas. Neste contexto, são símbolos de *L(S)*:

Definição 1.3.1.1: Símbolos de *L(S)*

(i) Para cada número natural n, um conjunto enumerável de cada predicado *n-ário*;

$P_1, P_2, ..., P_n$,...

...

$P_1^n, P_2^n ... P_n^n$,...

(ii) Um conjunto enumerável de variáveis individuais;

$x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, ...$

(iii) Os símbolos $\neg$, $\vee$, $\forall$, (,).

A cláusula (i) define os símbolos não-lógicos da linguagem, i.e. símbolos cujo significado pode variar em sistemas formais. As cláusulas (ii-iii) definem símbolos lógicos, i.e. símbolos que não tem interpretação fixada. Em (iii), "$\neg$" e "$\vee$" são símbolos de operadores verofuncionais; "$\forall$", por sua vez é o símbolo do quantificador universal e "(",")" são símbolos auxiliares para a desambiguação de fórmulas.

Símbolos derivados são tomados como abreviações metalinguísticas dos símbolos de *L(S)* e, portanto, não fazem propriamente parte de *L(S)*. São definidos da maneira usual outros conectivos do cálculo proposicional como e o quantificador existencial.

Definição 2.1. *Símbolos derivados em L(S)*

$\alpha \wedge \beta =_{df} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

[1] Fazemos isso com o intuito definir uma lógica de primeira ordem para extensão à lógica modal quantificada visada, que, por sua vez, não tem constantes ou símbolos funcionais.

$\alpha \to \beta =_{df} \neg\alpha \vee \beta$

$\alpha \equiv \beta =_{df} \alpha \to \beta \wedge \beta \to \alpha$

$\exists x\alpha =_{df} \neg\forall x\neg\alpha$

Sequências significativas de símbolos, isto é, sequências passíveis de interpretação, são denominadas fórmulas. Definimos as fórmulas por indução:

Definição 2.2. *Fórmulas em $L(S)$*

Atômica: Se P^n é um predicado n-ário e $x_1, ..., x_n$ são variáveis individuais em L(S), então $P^n(x_1, ..., x_n)$ é uma fórmula;

$\neg$*: Se α é uma fórmula, então $\neg\alpha$ é uma fórmula;*

$\vee$*: Se α e β são fórmulas, então $\alpha \vee \beta$ é fórmula.*

$\forall\alpha$*: Se α é uma fórmula e x é uma variável individual, então $\forall x\alpha$ é uma fórmula.*

Denominamos o *comprimento* de uma fórmula como o número dos seus símbolos primitivos. Se tomamos como exemplo $Px \to Qx$, o comprimento da fórmula é 6, tendo em vista a notação primitiva $\neg(Px) \vee Qx$. Denominamos a *complexidade* de uma fórmula o número de ocorrências de operadores na fórmula. A complexidade de uma fórmula atômica é zero. A complexidade de uma fórmula como $\neg\alpha$, se α é atômica, é um.

Em uma fórmula como "$\forall x\alpha$", a subfórmula α é denominada como o escopo do quantificador $\forall x$. Uma variável em α pode ser dita ligada ou aberta. Se uma variável x ocorre na subfórmula α em $\forall x\alpha$, a variável é ligada. Se isso não ocorre, a variável é livre. São denominadas *sentenças* as fórmulas sem variáveis livres. Isso pode ser definido de uma maneira mais clara por indução. Ocorrências de variáveis livres são:

Definição 2.3. *Variáveis livres*

(i) Se α é uma fórmula atômica, então todas as variáveis que ocorrem em α são livres;

(ii) Se $\neg\alpha$ é uma fórmula, então as variáveis livres de $\neg\alpha$ são as variáveis livres de α;

(iii) Se $\alpha \vee \beta$ é uma fórmula, então as variáveis livres de $\alpha \vee \beta$ são as variáveis livres de α ou β;

(iv) Se $\forall x\alpha$ é uma fórmula, então as variáveis livres de $\forall x\alpha$ são as variáveis livres de α exceto x.

2.2 Semântica

Atribuímos significado às fórmulas na linguagem *L(S)* fazendo uso da noção de modelo para uma fórmula.

Definição 2.4. *Um modelo $\mathfrak{M}$ de L(S) é um par ordenado $\langle D, V\rangle$ tal que:*

i D *é um conjunto não vazio;*
ii V *é uma função da forma* $V : \phi^n \to D^n$*, onde:*
(a) ϕ^n *é um predicado n-ário de* $L(S)$*; e*
(b) D^n *é o n-produto cartesiano de* D

Um modelo serve para dar condições de verdade às fórmulas de $L(S)$. Dado um predicado *n-ário* $\phi^n \in L(S)$ e indivíduos $(u_1, ..., u_n) \in D^n$, ϕ^n se aplica a $(u_1, ..., u_n)$ se, e somente se, $\langle u_1, ..., u_n\rangle \in V(\phi^n)$. Como não fazemos uso de nomes próprios para indivíduos em nossa linguagem, $\phi^n(u_1, ..., u_n)$ não é uma fórmula de $L(S)$, uma vez que $\phi^n(u_1, ..., u_n)$ consta no nível do modelo, mas não na linguagem objeto. Determinamos os valores de variáveis individuais no domínio para estabelecer as condições de verdade das fórmulas atômicas. Para isso fazemos uso de uma função cujo domínio é o conjunto de variáveis individuais da linguagem e cuja imagem é o domínio D do modelo $\mathfrak{M}$. Estas funções são denominadas atribuições e são definidas da seguinte maneira:

Definição 2.5. $\mu(x)$ *é uma atribuição de* x *em um S-modelo* $\mathfrak{M}$ *sse* $\mu^{\mathfrak{M}}(x) \in D^{\mathfrak{M}}$.

Em [HC96, p.343], optou-se por separar a atribuição de valores de variáveis individuais das variáveis de predicado do modelo. Desse modo, dizemos que um predicado ψ^n se aplica a uma sequência de n indivíduos do domínio quando, dada uma atribuição $\mu^{\mathfrak{M}}$, $\langle\mu^{\mathfrak{M}}(x_1), ..., \mu^{\mathfrak{M}}(x_n)\rangle \in V^{\mathfrak{M}}(\psi^n)$.

Precisamos de mais uma definição para estabelecer as condições de verdade de todas as fórmulas de $L(S)$.

Definição 2.6. ***[x-alternativa]****: Se* ρ *e* μ *são atribuições,* ρ *é uma x-alternativa de* μ *sse para toda variável* y *diferente de* x *em L(S),* $\mu(y) = \rho(y)$.

A noção de atribuição x-alternativa é necessária para estabelecer condições de verdade em fórmulas que envolvem quantificadores. O cuidado em estabelecer atribuições similares como as x-alternativas é justificado nos contextos de fórmulas da forma $\forall x\alpha$ onde em α ocorrem variáveis livres diferentes de x. Destacaremos uma consequência evidente da definição. Toda atribuição μ é uma x-alternativa de si mesma.

Definição 2.7. *Condições de verdade em M*

(i) $V_\mu(\ \alpha)$ *é verdadeiro sse* $V_\mu(\neg\alpha)$ *é falso;*

(ii) *$V_\mu(\alpha \vee \beta)$ é verdadeiro sse $V_\mu(\alpha)$ é verdadeiro ou $V_\mu(\beta)$ é verdadeiro;*

(iii) *$V_\mu(\forall x\alpha)$ é verdadeiro sse, para toda x-alternativa ρ de μ, $V_\rho(\alpha)$ é verdadeiro.*

A última cláusula da definição das condições de verdade estabelece que, dada uma atribuição em um modelo, queremos que a fórmula seja verdadeira independentemente de qual valor seja atribuído a x por qualquer função de atribuição. Deste modo, estabelecemos as condições de verdade para as fórmulas em símbolos primitivos. Analogamente, as condições de verdade de fórmulas existenciais são estabelecidas fazendo referência a uma única x-alternativa que atribui verdade à fórmula.

(iv) $V_\mu(\exists x\alpha)$ é verdadeiro sse, para alguma x-alternativa ρ de μ, $V_\rho(\alpha)$ é verdadeiro.

As condições de verdade de outros conectivos derivados são definidos de maneira usual.

Definição 2.8. *Uma fórmula é dita válida em um modelo $\mathfrak{M}$ se ela é verdadeira para qualquer atribuição $\mu^{\mathfrak{M}}$ às variáveis individuais na linguagem de $\mathfrak{M}$.*

2.3 Axiomatização

Nesta subseção, definimos esquemas de fórmulas para a axiomatização da lógica de primeira ordem. Um *axioma* é uma fórmula específica da linguagem $L(S)$. Esquemas são princípios na metalinguagem que indicam como axiomas conjuntos infinitos de fórmulas com forma mesma. Quando tomamos um esquema como princípio, portanto, afirmamos que toda fórmula com a mesma forma do esquema é um axioma. Não há requerimento da regra de substituição uniforme, tendo em vista que qualquer fórmula que tenha a mesma forma de um esquema será um axioma.

São axiomas de S:

1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

3 $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$

4 $\forall x\alpha x \rightarrow \alpha[y/x]$, onde y é um termo livre para a substituição

5 $(\forall x(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$, onde não há ocorrências livres de x em α

Os axiomas de (1-3) compõem a axiomatização do cálculo proposicional. As regras (4-5) são axiomas lógicos da teoria da quantificação. São regras de inferência de S:

MP $\vdash_S \alpha \rightarrow \beta, \vdash_S \alpha \Rightarrow \vdash_S \beta$

Gen $\vdash_S \alpha \Rightarrow \vdash_S \forall x \alpha x$

É sabido que as regras de inferência acima preservam validade [End72]; [BRV02]; [HC96]. Disso se segue que, dada a validade dos axiomas (1-5), todos os teoremas de S são válidos. Usamos o símbolo $\Rightarrow$, em contextos como $\alpha \Rightarrow \beta$, como uma abreviação de "Se α , então β". São regras derivadas de LPC:

UG $\vdash_S \alpha \Rightarrow \vdash \forall x \alpha$

UG$\rightarrow$ $\vdash_S (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \vdash_S (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$

UG$\equiv$ $\vdash_S (\alpha \equiv \beta) \Rightarrow \vdash_s (\forall x \alpha \equiv \forall x \beta)$

UG é consequência imediata da regra de generalização. UG$\equiv$ é consequência de UG$\rightarrow$. O seguinte teorema será utilizado posteriormente para a abreviação de provas outras.

Teorema 2.3.1. ***UG***$^{\rightarrow}$
$\vdash_S (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \vdash_S (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$

(i)	$(\alpha \rightarrow \beta)$	Hip
(ii)	$\forall x \alpha x$	Hip
(iii)	α	(ii), Ax 4
(iv)	β	(i),(iii) MP
(v)	$\forall x \beta x$	(iv) Gen
(vi)	$\forall x \beta x \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$	Ax 1
(vii)	$\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta$	(v),(vi) MP

Um teorema de S como $\forall x(\phi x \rightarrow \phi y)$ afirma que, se todo elemento do domínio é ϕ, então ϕ se aplica ao valor de uma variável individual y no domínio. Nos termos das definições anteriores, se ϕx é verdadeiro para qualquer atribuição $\rho x = u$, onde $u \in D$, então ϕy é verdadeiro para alguma atribuição $\mu(y) = u_j$, onde $u_j \in D$. Uma forma generalizada do princípio expresso pelo teorema citado é o esquema **2**, que é denominado por [HC96, p. 396] como o princípio da relocação. Este princípio nos permite generalizar $[\forall x(\phi x \rightarrow \phi y)]$ para fórmulas complexas. Há duas condições de uso para (PR). Em primeiro lugar, só se deve substituir variáveis livres em α. Em segundo lugar, não se deve substituir x por y quando o resultado desta substituição é uma variável ligada.

Princípio da Relocação: Se ρ é x,y-alternativa de μ e $\rho x = \mu(y)$, então $V_\mu(\alpha) = V_\mu(\alpha[y/x])$.

Definição 2.9. *Variante Alfabética. Uma fórmula α é variante alfabética de uma fórmula β sse:*

(i) *Onde há ocorrências de $\forall x\gamma$ em α, há ocorrências de $\forall x\gamma$ em δ*

(ii) *Onde há em γ variáveis individuais x livres, há variáveis individuais y livres em δ*

O próximo teorema será utilizado em provas ulteriores.

Teorema 2.3.2. *Teorema da dedução. Se Γ é um conjunto de fórmulas e α é uma fórmula tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.*

Por brevidade, não exporemos a prova do teorema, que se encontra em sua integralidade em [End72]

Considere a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Se uma fórmula α de L(S) é uma tautologia do cálculo proposicional, então α pode ser provado em S.*

Demonstração. Como o cálculo proposicional é completo, uma tautologia arbitrária tem prova no cálculo proposicional. Sendo α uma instância de uma tautologia arbitrária, substitua ao longo da prova as mesmas variáveis proposicionais pelas fórmulas correspondentes de *L(S)*. Substitua ao longo da prova as variáveis proposicionais que não estão presentes na tautologia arbitrária por quaisquer fórmulas de *L(S)*. O resultado da substituição resulta em uma sequência de fórmulas que constitui uma prova para α. $\square$

3 Lógica Modal Proposicional

Esta seção tem como objetivo definir precisamente a classe de lógicas modais normais. No capítulo, trata-se de um passo intermediário para a definição de lógicas modais de primeira ordem. A linguagem das lógicas modais proposicionais consiste em uma extensão da linguagem do cálculo proposicional por meio da inclusão de um operador modal, fato visível na definição seguinte.

3.1 Sintaxe

Definição 3.1. ***Linguagem***

Variáveis proposicionais $p_1, p_2, p_3, ...$;

Conectivos do cálculo proposicional $\neg \vee$;

O operador unário $\Box$;

Os símbolos auxiliares "(" e ")".

Definição 3.2. ***Fórmulas***

Variáveis proposicionais são fórmulas atômicas

Se α *é uma formula, então* $\neg\alpha$ *é uma fórmula*

Se α *e* β *são formulas, então* $\alpha \vee \beta$ *é uma fórmula*

Se α *é uma fórmula, então* $\Box\alpha$ *é uma fórmula*

Os conectivos derivados do cálculo proposicional são definidos da maneira usual. De acordo com a definição, são exemplos de fórmulas de lógicas modais proposicionais "$\Box\phi \wedge \phi$", "$\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$". Usaremos como símbolo derivado $\Diamond$, que será definido da seguinte forma:

Definição 3.3. $\Diamond\alpha =_{df} \neg\Box\neg\alpha$

Deste modo, $\Box$ e $\Diamond$ são definidos como operadores duais. Outro exemplo de fórmula de uma lógica modal proposicional é "$\Box\phi \to \Diamond\phi$". O operador modal permite, por sua vez, exprimir noções acerca da modalidade. Entre elas, pode-se destacar a noção de contingência e a noção de uma implicação estrita. Estas noções podem ser definidas por operadores que são, por sua vez, definíveis por $\Box$, como:

Definição 3.4. *Operador de Contingência:*
$\nabla\alpha =_{df} \neg\Box\neg\alpha \wedge \neg\Box\alpha$

Desse modo, $\nabla\alpha$ pode ser lido como "É contingente que α", por meio da leitura intuitiva de que, dado um fato, não é necessária a sua afirmação, ocorrendo o mesmo para a sua negação. Mais precisamente, não é necessário que não ocorre que α e também não é necessário que ocorra α.

Definição 3.5. *Implicação estrita:*
$\alpha \prec \beta =_{df} \Box(\alpha \to \beta)$

$$\begin{tikzcd} w \arrow[rr, bend right] & & w' \end{tikzcd}$$

Figura 6 – Exemplo de Estrutura de Kripke

Desse modo, $\alpha \prec \beta$ pode ser lido como "α implica estritamente β". O conectivo derivado teve como principal motivação o estabelecimento de uma implicação cuja verdade exprimisse uma noção mais próxima à derivabilidade ou consequência lógica. Estabelecida a linguagem da lógica modal proposicional, abordamos o significado preciso do operador na seguinte seção.

3.2 Semântica

A intuição subjacente ao operador de atualidade consiste em uma quantificação sobre mundos possíveis. Um fato é necessário se, e somente se, este fato é verdadeiro em todos os mundos possíveis. De forma análoga, uma sentença é possível se, e somente se, este fato é verdadeiro em algum mundo possível.

Desde o desenvolvimento de estruturas relativas, pode-se avaliar, dado um mundo possível, os mundos possíveis acessados por este mundo possível. Em outras palavras, e a grosso modo, dado um mundo, quais são os mundos *possíveis* para este mundo. Disso se segue o que se denomina como uma relação de acessibilidade. Uma estrutura de Kripke consiste justamente nestes dois componentes: um conjunto de mundos possíveis e uma relação de acessibilidade entre estes mundos. Isso é evidente na definição que segue.

Definição 3.6 (**Estrutura de Kripke**). *Uma estrutura para uma lógica modal consiste em um par $\langle W, R \rangle$, onde W é um conjunto não vazio e R é um subconjunto do produto cartesiano $W \times W$*

Em uma estrutura de Kripke como a descrita acima, W é comumente denominado como o conjunto de mundos possíveis, enquanto R é uma relação de acessibilidade entre os mundos de W. Estas estruturas são suficientes para lógicas modais. Um exemplo de estrutura de Kripke pode ser destacado na figura 3, onde $W = \{w, w'\}$ e $R = \{\langle w, w' \rangle\}$.

Definição 3.7 (**Modelo de Kripke**). *Um modelo para uma lógica modal consiste em um par $\langle \langle W, R \rangle, V \rangle$, onde $\langle W, R \rangle$ é uma estrutura de Kripke e V é uma função tal que $V : W, Var \rightarrow \{1, 0\}$, onde Var é o conjunto de variáveis proposicionais.*

3.3 Axiomatização

Nesta dissertação abordaremos somente a classe de lógicas modais normais, e as utilizaremos como base para a extensão de lógicas de primeira ordem. Uma lógica modal é dita normal se, e somente se, contém os seguintes componentes:

Axiomas

(a) As tautologias do cálculo proposicional;

(b) O axioma K: $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$;

Regras

(c) *Modus ponens*: Se α e $\alpha \to \beta$ são teoremas, então β é teorema;

(d) Substituição Uniforme: Se α é teorema e β é uma instância de substituição de α, então β é teorema;

(e) Necessitação: Se α é teorema, então $\Box\alpha$ é teorema.

São axiomas que compõem outros sistemas de lógicas modais normais: K, D, T, B, 4, 5. Diferentes sistemas axiomáticos restringem a classe de estruturas em que seus axiomas são válidos. A princípio, cada axioma mencionado estabelece uma restrição sobre a relação de acessibilidade entre os mundos da estrutura.

Os axiomas citados não são independentes. Todas as lógicas modais normais compostas pelos axiomas mencionados tem K como sublógica. Desse modo, todo teorema de K é teorema dos outros sistemas formais que o incluem. As regras derivadas de inferência de K também são regras derivadas de lógicas que incluem K. São regras de inferência derivadas de K:

Teorema 3.3.1. ***Regra Derivada 1***
$\vdash \Box(\alpha \to \beta) \Rightarrow \vdash (\Box\alpha \to \Box\beta)$

Definidas as noções de lógica modal proposicional normal e sua axiomatização mínima, seguimos para a definição de lógicas modais de primeira ordem.

4 Lógica Modal de Primeira Ordem

Com a finalidade de preservar a linearidade da exposição, apresentaremos uma classe específica de lógicas modais quantificadas sobre a qual provaremos o teorema de completude. Abordaremos especificamente classes de lógicas modais quantificadas cujo domínio é o mesmo para todos os mundos possíveis. Tratam-se de estruturas de domínio constante. Além disso, não trataremos de constantes, sejam elas rígidas, denotando o mesmo valor em todos os mundos, sejam elas flexíveis, havendo a possibilidade de variação de denotação da constante em diferentes mundos possíveis.

4.1 Sintaxe

A linguagem de lógicas modais quantificadas consiste em uma extensão da linguagem da lógica de primeira ordem com o acréscimo do símbolo $\Box$, e neste capítulo será lido como "box". O procedimento indutivo de definição de fórmulas da linguagem é o mesmo da lógica de primeira ordem, acrescido da cláusula:

[$\Box\alpha$] se α é uma fórmula, então $\Box\alpha$ é uma fórmula.

De maneira semelhante, a definição de variáveis livres é a mesma, com exceção do acréscimo da seguinte regra:

[$\Box\alpha$]Se $\Box\alpha$ é uma fórmula, então as variáveis livres de $\Box\alpha$ são as variáveis livres de α.

4.2 Semântica

Em lógicas modais quantificadas, desde a semântica é necessário estabelecer uma escolha sobre o caráter do domínio de indivíduos. Consideramos dois tipos de quantificadores $\Box$, que quantifica sobre mundos e $\forall$, que quantifica sobre indivíduos. A interação entre operadores modais e quantificadores não é óbvia, e demanda uma escolha na construção de seus modelos. Consideremos a seguinte fórmula:

$$\forall x\phi x \to \phi x$$

Se tomamos ϕx como $\Diamond\psi x$, afirmamos que todos os objetos, em algum mundo possível, tem a propriedade de ser ψ, e isso implica que em algum mundo possível ψx. Se consideramos que todos os objetos são os mesmos em todos os mundos possíveis, não há complicações ulteriores. Podemos, no entanto, considerar que o domínio de indivíduos em cada mundo possível é disjunto do domínio de indivíduos em mundos possíveis diferentes. Neste contexto, não é imediatamente claro o significado desta fórmula.

Por um lado, podemos afirmar que os quantificadores de primeira ordem quantificam sobre os mesmos objetos em todos os mundos possíveis. Isso garante um modelo mais simples de semântica para lógicas modais quantificadas. Por outro lado, podemos afirmar que os quantificadores de primeira ordem quantificam sobre subconjuntos de um domínio do modelo. Dessa forma, podemos estabelecer uma semântica mais flexível.

4.2.1 Domínio Constante

Atribuímos significado às fórmulas definidas nas subseções anteriores por meio das definições de estrutura e modelo de lógicas modais quantificadas. Modelos de domínio constante tem o mesmo domínio de objetos em todos os mundos possíveis. Por esse motivo, o tipo de modelo é também denominado um modelo de *quantificação possibilista*. No contexto de lógicas modais quantificadas, será necessário acrescentar um domínio às estruturas de Kripke para atribuir referência aos termos no modelo de LMQs.

Definição 4.1. ***Estrutura Estendida***: *Uma estrutura $\langle W, R, D\rangle$ é uma estrutura estendida de domínio constante se $\langle W, R\rangle$ é uma estrutura de Kripke e D é um conjunto não vazio.*

Definição 4.2. ***Interpretação***: *V é uma interpretação em uma estrutura de domínio constante se V atribui a cada símbolo P de relação n-ária e a cada mundo possível $w \in W$, alguma relação n-ária no domínio D do modelo. Logo, $V(P, w)$ é uma relação n-ária em D.*

Definição 4.3. ***LMQ-modelo $\mathfrak{M}$***: *Um modelo para LPC modal consiste em um par $\langle\langle W, R, D\rangle, V\rangle$, onde $\langle W, R, D\rangle$ é uma estrutura estendida e a interpretação V é definida como em 2.3.5*

Será, no entanto, necessário acrescentar um domínio ao modelo para atribuir referência aos termos no modelo de LMQs. O domínio do modelo em um modelo constante é definido como um conjunto não vazio.

Para definir as condições de verdade de uma linguagem com quantificadores e sem constantes, faz-se necessário introduzir uma noção que nos permite afirmar que $\forall x \alpha x$ é verdadeiro se, e somente se, αx é verdadeiro para qualquer valor da variável x em α. Para tanto, introduzimos a noção de atribuição.

Definição 4.4. ***Atribuição***: *Seja $M = \langle W, R, D, V\rangle$ um modelo de domínio constante de primeira ordem. Uma atribuição no modelo M é um mapeamento μ que atribui a cada variável x algum elemento $\mu(x)$ do domínio D do modelo.*

Uma atribuição é *x-variante* de outra atribuição no mesmo sentido que foi estabelecido na primeira subseção para lógicas de primeira ordem.

Definição 4.5. ***Verdade em um Modelo***: *Seja $M = \langle W, R, D, V\rangle$ um modelo de domínio constante de primeira ordem. Para cada $w \in W$ e para cada atribuição μ em M:*

1. *Se P é ume relação n-ária, $\mathfrak{M}, w \models_\mu P(x_1, ..., x_n)$ dado que $\langle\mu(x_1), ..., \mu(x_n)\rangle \in V(P, w)$.*

2. *$\mathfrak{M}, w \models_\mu \neg\alpha \iff$ não ocorre que$\mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$*

3. *$\mathfrak{M}, w \models_\mu (\alpha \wedge \beta) \iff \mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$ e $\mathfrak{M}, w \models_\mu \beta$.*

4. *$\mathfrak{M}, w \models_\mu \Box\alpha \iff$ para todo $w' \in W$, se wRw' então $\mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$*

5. $\mathfrak{M}, w \models_\mu (\forall x)\phi \iff$ *para todo x-variante* ρ *de* μ *em* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, w \models_\rho \phi$

Definição 4.6. ***Validade***. *uma fórmula* α *é válida em um modelo* $\mathfrak{M}$ *de domínio constante se, e somente se,* α *é válida em todos os mundos* $w \in W^{\mathfrak{M}}$ *e em todas as atribuições* $\mu^{\mathfrak{M}}$.

4.2.2 Domínio Variante

Modelos de domínio variante atribuem a cada mundo possível um conjunto não vazio de objetos. Em síntese, substituímos o domínio de um modelo constante por uma função que atribui a cada mundo do modelo um conjunto não vazio de objetos.

A definição de estrutura de Kripke é a mesma.

Definição 4.7. ***Domínio do modelo*** *O domínio de um modelo de domínio variante* $D(\mathfrak{M})$ *consiste na união dos domínios de cada mundo possível* $D(w_i)$ *tal que* $w_i \in W^{\mathfrak{M}}$.

Desse modo, o domínio do modelo é o conjunto de objetos que pertencem ao domínio de pelo menos um mundo possível no modelo.

Definição 4.8. ***LMQ-modelo*** $\mathfrak{M}$**:***Um modelo para LPC modal consiste em uma quádrupla* $\langle W, R, D, V\rangle$, *onde* $\langle W, R\rangle$ *é uma estrutura, D é uma função que atribui a cada mundo possível um conjunto não vazio e V é uma interpretação.*

A noção de atribuição permanece essencialmente a mesma.

Definição 4.9. ***Atribuição***: *Uma valoração no modelo M é um mapeamento* μ *que atribui a cada variável x algum elemento* $\mu(x)$ *do domínio do modelo* $D(\mathfrak{M})$.

A noção de x-variante é restrita ao domínio do mundo em questão.

Definição 4.10. ***x-variante***. *Uma atribuição* ρ *é x-variante de* μ *em um mundo w se, e somente se, para toda variável* $y \neq x$, $\rho(y) = \mu(y)$ *e* $\rho(x) \in D(w)$

As condições de verdade permanecem as mesmas com exceção das cláusulas referentes aos quantificadores de primeira ordem.

Definição 4.11. ***Verdade em um Modelo***: *Seja* $M = \langle W, R, D, V\rangle$ *um modelo de domínio constante de primeira ordem. Para cada* $w \in W$ *e para cada atribuição* μ *em* M:

1. *Se P é ume relação n-ária,* $\mathfrak{M}, w \models_\mu P(x_1, ..., x_n)$ *dado que* $\langle \mu(x_1), ..., \mu(x_n)\rangle \in V(P, w)$.

2. $\mathfrak{M}, w \models_\mu \neg\alpha \iff$ *não ocorre que* $\mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$

3. $\mathfrak{M}, w \models_\mu (\alpha \wedge \beta) \iff \mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$ *e* $\mathfrak{M}, w \models_\mu \beta$.

4. $\mathfrak{M}, w \models_\mu \Box\alpha \iff$ *para todo* $w' \in W$, *se* wRw' *então* $\mathfrak{M}, w \models_\mu \alpha$

5. $\mathfrak{M}, w \models_\mu (\forall x)\phi \iff$ *para todo* x*-variante* ρ *de* μ *em* w, $\mathfrak{M}$, $w \models_\rho \phi$

4.3 Axiomatização

Trataremos de uma classe de uma lógicas modais de primeira ordem. Para a definição da classe, iniciaremos definindo a menor lógica modal quantificada normal K+BF, a que atribuímos uma semântica de domínio constante.

Definição 4.12. ***Axiomas e regras de inferência de K+BF***
Axiomas

(I) *As tautologias do cálculo proposicional*

(II) *O axioma K:* $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

(III) $\forall x \alpha x \to \alpha[y/x]$, *onde* y *é um termo livre para a substituição*

(IV) $(\forall x(\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \forall x \beta)$, *onde não há ocorrências livres de* x *em* α

(V) *A fórmula de Barcan:* $\forall x \Box \phi x \to \Box \forall x \phi x$

Regras

(i) *Generalização: Se* α *é teorema, então* $\forall x \alpha$ *é teorema.*

(ii) *Modus ponens: Se* α *e* $\alpha \to \beta$ *são teoremas, então* β *é teorema.*

(iii) *Substituição Uniforme: Se* α *é teorema e* β *é uma instância de substituição de* α*, então* β *é teorema.*

(iv) *Necessitação: Se* α *é teorema, então* $\Box\alpha$ *é teorema.*

Nessa axiomatização, os axiomas (I) e (II) e as regras de inferência (ii),(iii) e (iv) são requisitos de uma lógica modal normal. Os axiomas (III) e (IV) e a regra de inferência (i) são componentes dos sistemas formais da teoria da quantificação. Adicionamos à axiomatização (V), a fórmula de Barcan, que será necessária para a prova de completude. A *recíproca da fórmula de Barcan* é um teorema de S+K, e, *a fortiori* é teorema de todas as lógicas modais quantificadas normais.

Teorema 4.3.1. $\vdash \Box \forall x \alpha x \to \forall x \Box \alpha x$

(i)	$(\forall x \alpha x \to \alpha)$	Ax4
(ii)	$\Box(\forall x \alpha \to \alpha)$	(i),Nec
(iii)	$\Box(\forall x \alpha \to \alpha) \to (\Box \forall x \alpha \to \Box \alpha)$	K
(iv)	$\Box \forall x \alpha \to \Box \alpha$	(ii),(iii) MP
(v)	$\Box \forall x \alpha \to \forall x \Box \alpha$	(iv)

Teorema 4.3.2. $\vdash \Box \forall x \alpha x \equiv \forall x \Box \alpha x$

(i)	$\Box \forall \alpha \to \forall \Box \alpha$	Teorema
(ii)	$\forall x \Box \phi x \to \Box \forall x \phi x$	(i),Nec
(iii)	$\Box \forall x \alpha x \equiv \forall x \Box \alpha x$	(i),(ii),PC e def.$\equiv$

Definição 4.13. ***LMQ+BF*** *Denominamos como LMQ+BF a classe de lógicas modais normais que contém K+BF como sublógica.*

5 Propriedades de uma classe de Lógicas Modais Quantificadas

5.1 Correção

Nesta seção consideramos apenas sistemas com domínio constante e que validam a fórmula de Barcan. O primeiro teorema consiste em uma prova geral de correção com respeito a um sistema de lógica modal quantificada. Partindo do primeiro teorema afirmamos que, dada a correção de uma lógica modal proposicional, pode-se estender este sistema para uma lógica modal quantificada de forma a preservar a sua correção. O segundo teorema desta subseção delimita a classe de estruturas das lógicas modais quantificadas que abordamos. Dada uma classe de uma lógica modal proposicional, esta classe será a mesma para a sua extensão em lógica modal quantificada com o acréscimo da fórmula de Barcan.

Uma fórmula P de LMQ+BF é válida em um modelo $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $\forall w \in W^{\mathfrak{M}}, V(P, w) = V$.

Teorema 5.1.1. *Todas as LMP-estruturas são LMQ+BF-estruturas*

Demonstração. Provamos o teorema descrevendo como todos os axiomas de LMQ são válidos em LMP estruturas e as regras de inferência preservam validade nos modelos embasados nessa estrutura, então todas as fórmulas válidas em LMP estruturas são válidas em LMQ+BF estruturas.

(i) Dado um teorema α de LMP, podemos substituir as ocorrências de variáveis proposicionais p_i por fórmulas de LMQ γ_i em α resultando em uma fórmula β de LMQ. Suponhamos que um β obtido dessa forma não é válido em um modelo $\langle$F,D,V$\rangle$, de forma que, dada uma atribuição e um mundo possível, $V_\mu(\beta, w) = 0$. Suponhamos um LMP-modelo $\langle$F,V*$\rangle$ tal que, para todo $w \in W^{\mathfrak{F}}$,p_i e γ_i, ocorre que $V^*(p_i, w) = V_\mu(\gamma_i, w)$. Desse modo, podemos apresentar por indução que, dado um teorema arbitrário de LMP, $V^*(\alpha, w) = 0$, e, portanto, α não é válido no LMP-modelo $\langle \mathrm{F}, V^* \rangle$. Logo, se β não é válido em um LMQ-modelo embasado em $\mathfrak{F}$, então α não é válido em um LMP-modelo embasado em $\mathfrak{F}$.

(ii) $[\forall x \alpha x \to \alpha[y/x]]$ Suponha que $\forall x \alpha x$ é válido em um mundo em um LMQ+BF-modelo dada uma atribuição μ. Pelas condições de verdade de $\forall$, há um x-variante ρ de μ, onde $\rho(y) = \mu(x)$ tal que αx é verdadeiro dada a atribuição ρ. Pelo princípio da realocação, temos que $\alpha[y/x]$ é verdadeiro segundo uma atribuição μ em um LMQ+BF-modelo.

(iii) $[\forall x \Box \phi x \to \Box \forall x \phi x]$ é resultado das condições de verdade de $\Box$ e $\forall$ em um LMQ+BF-modelo

(iv) MP e Necessitação conservam a validade por consequência de suas condições de verdade.

(v) $[(\forall x(\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \forall x \beta)]$ Suponha que $\alpha \to \forall x \beta$ seja falso em um LMQ+BF-modelo. Há, portanto, alguma atribuição μ tal que $V_\mu(\alpha, w) = 1$ e $V_\mu(\forall x \beta x, w) = 0$. Há uma x-alternativa ρ de μ tal que $V_\rho(\alpha, w) = 0$, mas como x não é uma variável livre em α e pelo princípio da concordância, $V_\rho(\alpha, w) = 1$. Isso, por sua vez, implica que $\alpha \to \beta$ é falso no modelo.

$\square$

Teorema 5.1.2. *Toda LMQ+BF-estrutura é uma LMP-estrutura*

Demonstração. Suponha uma estrutura $\mathfrak{F}$ que não seja uma LMP estrutura. Há, portanto, um teorema α de LMP tal que, dado um $w \in W^{\mathfrak{F}}$, $V(\alpha, w) = 0$. Se consideramos um β resultante de substituições de variáveis proposicionais por fórmulas atômicas de LMQ em α, temos β como teorema por se tratar de uma instância de um teorema de LMP. $\square$

Corolário 5.1.1. *LMQ+BF-estruturas são LMP-estruturas*

5.2 Completude

Provamos a completude de uma classe de Lógicas Modais Quantificadas de domínio constante que incluem a fórmula de Barcan, como fora apresentado por (HUGHES & CRESSWELL,1996). Mostraremos como a completude segue de que, se dado um conjunto maximal S+BF consistente, o conjunto é S+BF-satistatível por algum conjunto maximal no modelo canônico.

Mostraremos como é possível estender um conjunto de fórmulas consistente a um conjunto maximal consistente, para posteriormente utilizá-lo na prova de completude.

Definição 5.1. ***S-consistência***
*Seja $\perp$ uma abreviação para $(P \wedge \neg P)$. Um conjunto finito $X_1, X_2, ..., X_n$ de fórmulas é S-consistente se $(X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n) \rightarrow \perp$ não é provado pela utilização do sistema axiomático S. Um conjunto infinito é S-consistente se todo o subconjunto finito desse conjunto é **S**-consistente.*

Definição 5.2. ***Conjunto Maximal Consistente*** *Um conjunto S é maximal consistente se S é L-consistente, e nenhuma extensão própria de S é L-consistente.*

O seguinte lema mostra que o conjunto maximal consistente correspondente a uma lógica é fechado por *Modus ponens.*

Lema 5.2.1. *Seja Γ um conjunto maximal consistente correspondente a uma dada lógica S*

(a) Se α é teorema de S, então $\alpha \in \Gamma$

(b) Se $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ e $\alpha \in \Gamma$, então $\beta \in \Gamma$

Demonstração. (a) Como α é teorema de S, então $\neg\alpha$ é S-inconsistente. Dada a maximalidade de Γ, $\alpha \in \Gamma$. (b) Suponha que não ocorra que $\beta \in \Gamma$. Dada a maximalidade, $\neg\beta \in \Gamma$. Há um subconjunto $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \subseteq \Gamma$, mas este conjunto é inconsistente, contrariando a hipótese. Por redução ao absurdo, $\beta \in \Gamma$. □

Lema 5.2.2. ***Lema de Lindenbaum***
Se Δ é um conjunto S-consistente, então existe um conjunto Γ maximal consistente tal que $\Delta \subseteq \Gamma$

Demonstração. Suponha uma enumeração $\alpha_0, \alpha_1, ...$ de fórmulas de *L(S)*. Construimos um conjunto Γ a partir de Δ.

(a) $\Gamma_0 = \Delta$

(b) $\Gamma_{n+1} =$

$\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\}$ se $\Gamma_n \cup \alpha_{n+1}$ é consistente;

$\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_{n+1}\}$ caso contrário.

Γ_0 é consistente por hipótese. Γ_{n+1} é consistente se Γ_n é consistente. Suponha que não. Γ_n é S-inconsitente com α_{n+1} e $\neg\alpha_{n+1}$. Há, portanto, um subconjunto Γ_i de Γ_n tal que $\alpha_{n+1}, \neg\alpha_{n+1} \in \Gamma_i$, mas isso tornaria Γ_n inconsistente. Δ é maximal, uma vez que, para qualquer fórmula α_i, existe um Γ_i correspondente tal que $\Gamma_i \in \Delta$. □

Para a prova de completude de lógicas modais proposicionais, seria suficiente construir um modelo canônico com conjuntos maximais consistentes. Para a prova de completude de lógicas modais quantificadas, no entanto, é necessário que haja outra propriedade destes conjuntos maximais consistentes. Considere um conjunto como o seguinte.

$$\Omega = \{\neg\forall x\phi x, \phi(y_1), \phi(y_2), \phi(y_3), ...\}$$

Onde y_i são todas as variáveis da linguagem do sistema em questão. Ω é consistente, mas se faz necessário uma testemunha para que ϕx seja falso para alguma variável nova. Essa propriedade é denominada como *propriedade de testemunha*, e, para garantir que um conjunto maximal consistente tenha essa propriedade, precisamos estender a linguagem com variáveis novas, além de incluir no conjunto, para cada variável nova, uma fórmula da forma

$$\alpha[y/x] \rightarrow \forall x\alpha$$

Desse modo, sempre haverá uma testemunha para a falsidade de fórmulas como $\neg\forall x\phi x$ em um dado conjunto maximal consistente. Objetivamos construir um novo conjunto com essa propriedade a partir de um conjunto maximal consistente no próximo teorema.

Teorema 5.2.1. *Se um conjunto maximal Γ de fórmulas numa dada linguagem, é possível construir um Δ numa linguagem estendida com variáveis novas e com a propriedade de testemunha.*

Demonstração. Consideramos uma enumeração de variáveis novas e de fórmulas da forma $\forall x\alpha x$. Construiremos, a partir de um conjunto Γ, outro conjunto maximal consistente com mais variáveis e a propriedade de testemunha.

Procederemos por redução ao absurdo. Consideremos $\Gamma = \Gamma_0$. Γ_1, por sua vez, será $\Gamma_0 \cup \{\alpha[y/x] \rightarrow \forall\alpha\}$, onde y é a primeira variável que não ocorre em Γ e $\forall x\alpha x$ é a primeira fórmula desta forma em nossa enumeração. Γ_{n+1}, de modo mesmo, será

$\cup\{\neg\alpha\} \subseteq \{\alpha[y/x] \to \forall\alpha\}$. Γ_0 é consistente por hipótese. Se Γ_n é consistente então Γ_{n+1} é consistente. Suponha que isso não seja o caso. Como Γ_{n+1} é inconsistente, há um conjunto finito de fórmulas $\beta_1, ..., \beta_m \in \Gamma_0$ tais que $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to \alpha[y/x]$ e $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to \neg\forall x\alpha x$. A variável y não ocorre em Γ_n, então $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to \forall y\alpha y$. Mas $\forall y\alpha y$ é uma variante alfabética de $\forall x\alpha x$, e com isso temos que $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to \forall x\alpha x$. Mas $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to \neg\forall x\alpha x$, então $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m)$ implica uma fórmula e a sua negação, tornando $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ inconsistente e contrariando a hipótese. □

Teorema 5.2.2. *Se há um conjunto maximal Γ numa dada linguagem L^+ com a propriedade de testemunha onde $\neg\Box\alpha \in \Gamma$, então há um conjnto maximal Δ na linguagem L^+, com propriedade de testemunha tal que $L_\Box(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$*

Demonstração. Suponha uma sequência de fórmulas $\gamma_0, \gamma_1, ...,$ onde $\gamma_0 = \neg\alpha$. γ_{n+1} é definido em função de γ_n da seguinte forma:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \wedge (\alpha[y/x] \to \forall x\alpha x,$$

se $\gamma_n \wedge (\alpha[y/x] \to \forall x\alpha x$ é consistente com $L_\Box(\Gamma)$. γ_0 é consistente com $L_\Box(\Gamma)$[2]. Se γ_n é consistente com $L_\Box(\Gamma)$, podemos construir um γ_{n+1} consistente com γ_n e $L_\Box(\Gamma)$.

Procedemos por redução ao absurdo. Se $gamma_n$ é consistente, mas γ_{n+1} é inconsistente, então deve haver um subconjunto finito de fórmulas $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ em $L_\Box(\Gamma)$ tais que:

$$(a)(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_m) \to (\gamma_0 \to \neg(\alpha[y/x] \to \forall x\alpha x$$

Por NEC, K, MP e a distribuição de $\Box$

$$(b)(\Box\beta_1 \wedge ... \wedge \Box\beta_m) \to \Box(\gamma_0 \to \neg(\alpha[y/x] \to \forall x\alpha x$$

Γ é maximal consistente, então $\Box(\gamma_0 \to \neg(\alpha[y/x] \to \forall x\alpha x$ é elemento de Γ. Isso, por sua vez, vale para uma variável y arbitrária. Suponha uma variável z arbitrária.

$$(c)\Box(\gamma_n \to (\neg(\gamma[y/x] \to \forall x\alpha x) \to \forall x\Box(\gamma_n \to \neg(\neg(\gamma[z/x] \to \forall x\alpha x$$

(c) $\in \Gamma$ e o antecedente de (c) também está em Γ para toda variável y. Pelo fechamento de Γ por *Modus ponens*, temos que

$$(d)\forall\Box(\gamma_n \to \neg(\alpha[z/x] \to \forall x\alpha)$$

Por uma instância da fórmula de Barcan e aplicação de MP:

[2] Lema cuja prova está em [HC96, p.117]

$$(e)\Box\forall(\gamma_n \to \neg(\alpha[z/x] \to \forall x\alpha)$$

Pela teoria da quantificação:

$$(f)\Box(\gamma_n \to \neg(\alpha[z/x] \to \forall x\alpha)$$

Por um teorema da teoria da quantificação:

$$(g)\exists(z)(\alpha[z/x] \to \forall x\alpha)$$

$\Box\neg\gamma_n \in \Gamma$ implica que $\neg\gamma_n \in L_\Box(\Gamma)$, que tornaria Δ inconsistente ◻

Definição 5.3. *Um modelo canônico para um sistema LMQ+BF consiste em um uma quádrupla $\langle W, R, D, V\rangle$, onde W é o conjunto de todos os conjuntos maximais consistentes, onde $wRw'sseL_\Box \subset w'$, D é o conjunto de variáveis individuais e V é uma função que define $\langle x_1, ..., x_n, w\rangle \in V(\phi)sse\phi(x_1, ..., x_n) \in w$.*

Teorema 5.2.3. *Para todo $w \in W$ e $\alpha \in L^+$, $V_\sigma(w, \alpha) = V$ se, e somente se, $\alpha \in w$.*

Demonstração. A prova procede por indução. Se uma fórmula é (i) atômica ou das formas (ii) $\neg\alpha$ e (iii) $\alpha \vee \gamma$, a asserção se segue das condições de verdade das fórmulas como definidas na subseção anterior, das propriedades de maximalidade e da definição de modelo canônico.

1. (iv) Suponha que $\forall x\alpha x \in w$ e ρ é uma x-alternativa de μ. Pelo axioma (4) da teoria da quantificação, $\alpha x \in w$. αx é, portanto, verdadeiro em w segundo uma atribuição ρ. Como ρ é uma atribuição arbitrária, $V_\sigma(\forall x\alpha x, w) = V$.

2. (v) Suponha que não ocorre $\forall x\alpha x \in w$, portanto $\neg\forall x\alpha x \in w$. Dada a propriedade de testemunha, $\neg\alpha[y/x] \in w$. Consequentemente, não ocorre que $\alpha[y/x] \in w$ e $V(\alpha[y/x], w) = F$. O axioma (4) nos permite inferir que $V(\forall\alpha[y/x], w) = F$.

3. (vi) Suponha que $\Box\alpha \in w$ e wRw'. Pela definição do modelo canônico, para todo w' do modelo tal que wRw', $V(\alpha, w') = V$. Logo $V(\Box\alpha, w) = V$

4. (vii)Suponha que não ocorre $\Box\alpha \in w$. Pela maximalidade, $\neg\Box\alpha \in w$, e, pelo teorema 2.4.2.2, sabemos que há um w' maximal consistente e com a propriedade de testemunha tal que não ocorre que $\alpha \in w'$ e $\neg\alpha \in w'$. Ocorre, portanto, que $V(\alpha, w') = F$ e, consequentemente, $V(\Box\alpha, w) = F$

◻

Corolário 5.2.1. *Uma fórmula α é válida no modelo canônico de uma dada LMQ+BF se, e somente se, α é teorema de LMQ + BF.*

6 Conclusão

O propósito do capítulo consistiu em estabelecer uma especificação de caráter mais formal com relação à linguagem em que o debate filosófico está situado. Trata-se, portanto, de um esclarecimento dos termos que podem ser tomados na discussão do capítulo posterior sobre o debate entre atlualismo e possibilismo.

Abordamos neste capítulo as noções de metalinguagem e sistema axiomático, que serviram de base para a composição de sistemas formais de primeira ordem e, posteriormente, foram estendidos aos sistemas de lógicas modais quantificadas. Provamos a correção e a completude de uma classe de lógicas modais quantificadas de domínio constante. Dentre considerações outras, poder-se-ia imaginar que o sistema formal de lógicas modais quantificadas não apresentariam grandes dificuldades em termos de sua composição. A princípio, bastaria considerar a união resultante do conjunto de axiomas da teoria da quantificação clássica e do conjunto de axiomas de uma dada lógica modal proposicional. Por um lado, o sistema formal em consideração é a forma mais natural de imaginar uma Lógica Modal Quantificada. Por outro lado, sistemas que são assim compostos apresentam teoremas cujo significado intuitivo é bastante obscuro em contrapartida ao seu significado em termos de modelos. O significado filosófico desses teoremas são abordados no capítulo subsequente.

Um aspecto da composição de lógicas modais quantificadas é o número de escolhas que são necessárias para a sua composição [Men91b, p.297]. Pode-se, por sua vez, escolher entre um domínio de objetos que é o mesmo para todos os mundos possíveis, e.g. todos os mundos tem como domínio o conjunto que tem como elementos os objetos a e b; ou pode haver um mapeamento entre subconjuntos de um domínio do modelo e os mundos do modelo, e.g. um modelo que contém um mundo w cujo domínio é o conjunto unitário que contém a, ao mesmo tempo que o modelo contém um mundo w' cujo domínio é o conjunto unitário que contém b. Esta escolha é causadora da oposição entre a obscuridade do significado intuitivo de propriedades modais e a clareza do significado formal de propriedades modais, podendo estes também ilustrar o que seriam aspectos fundamentais do nosso entendimento sobre a modalidade.