

**CONTRIBUIÇÕES À METODOLOGIA DE PROJETO DE  
ABSORVEDORES LÍQUIDOS SINTONIZADOS (ALS)**

**ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ**

**TESE DE DOUTORADO**

**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**CONTRIBUIÇÕES À METODOLOGIA DE PROJETO DE  
ABSORVEDORES LÍQUIDOS SINTONIZADOS (ALS)**

**ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**CO-ORIENTADOR: MARCUS VINÍCIUS GIRÃO DE MORAES**

**TESE DE DOUTORADO EM  
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**BRASÍLIA/DF: 13 MARÇO, 2020.**

# **CONTRIBUIÇÕES À METODOLOGIA DE PROJETO DE ABSORVEDORES LÍQUIDOS SINTONIZADOS (ALS)**

**ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Marcus Vinícius Girão de Moraes, Dr.Univ. (UnB)**  
(Co-orientador)

---

**Prof. Frederico Martins Alves da Silva, DSc. (UFG)**  
(Examinador Externo)

---

**Prof. Suzana Moreira Ávila, Dr. (UnB-Gama)**  
(Examinadora Externa)

---

**Prof. José Luis Vital de Brito, Dr. (UnB)**  
(Examinador Interno)

**BRASÍLIA/DF, 13 DE MARÇO DE 2020.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

OSPINA LOPEZ, ALEJANDRO AUGUSTO

Contribuições à metodologia de projeto de absorvedores líquidos sintonizados (ALS)  
[Distrito Federal] 2020.

140 p. 210x297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas, 2020). Tese de Doutorado  
– Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia  
Civil e Ambiental.

1. *Sloshing*

2. Modelo mecânico equivalente

3. Mapa de respostas

I. ENC/FT/UnB

4. Captura de movimento de vídeo

5. Otimização paramétrica

6. Recomendações de projeto de ALS

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPEZ, A. A. O. (2020). Contribuições à metodologia de projeto de absorvedores líquidos sintonizados (ALS). Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 1A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, (145 p.)

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Alejandro Augusto Ospina Lopez.

TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO: Contribuições à metodologia de projeto de absorvedores líquidos sintonizados (ALS).

GRAU: Doutor ANO: 2020.

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma cópia de esta tese de doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Alejandro Augusto Ospina Lopez

SCRN 706/707 Bloco F, Asa Norte - Brasília DF

CEP 70740-660.

aaospinalopez@gmail.com

## **DEDICATÓRIA E AGRADECIMENTOS**

Como inspiração inicial dedico este trabalho a Deus, agradeço a Ele, pela motivação, a saúde, a alegria do saber e o espírito incansável na procura de compreensões e capacidades cada vez maiores. Também quero dedicar este triunfo aos meus pais, o senhor Camilo Augusto Ospina Arbelaez e a senhora Martha Lucia Lopez Orozco, fontes da minha inspiração e fortaleza.

Agradeço a minha amada namorada parceira Mariângela Pereira da Silva, pelo apoio, dedicação e companhia nos momentos frívolos desta caminhada.

Quero agradecer a oportunidade de ter trabalhado com os profs. Marcus Vinícius Girão de Moraes e Lineu José Pedroso, meus orientadores, pela confiança, apoio e paciência em mim depositados e pelo compartilhamento de seus conhecimentos.

Também quero agradecer a Universidade de Brasília, bem como aos programas de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil e Ciências Mecânicas, por me oferecerem as condições necessárias para a realização deste trabalho.

Agradeço ao laboratório de Vibrações e Meteorologia Dinâmica, ao Grupo de Dinâmica de Sistemas (professores, técnicos e alunos) pelos conhecimentos transmitidos e pela amizade oferecida. Ao CAPES pela concessão da bolsa e ao Brasil como tudo pela oportunidade que me foi dada. Assim aos professores, José Luís Vital de Brito, Luciano Mendes Bezerra, Frederico Martins Alves da Silva, Suzana Moreira Ávila, pela disponibilidade e a paciência de avaliar este trabalho.

Novamente agradeço a Deus por estas conquistas e pelas bênçãos recebidas, olhando ao céu preenchido de uma alegria, satisfação e felicidades infinitas no meu coração.

## RESUMO

### CONTRIBUIÇÕES À METODOLOGIA DE PROJETO DE ABSORVEDORES LÍQUIDOS SINTONIZADOS (ALS)

**Autor: Alejandro Augusto Ospina Lopez**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Co-orientador: Marcus Vinicius Girão de Moraes**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Março de 2020**

Com o avanço em técnicas construtivas e implementação de novos materiais de construção, assim como o aproveitamento do espaço urbano, tem-se projetado e construído edifícios cada vez mais esbeltos, leves e flexíveis. Tais estruturas são mais vulneráveis às excitações de natureza dinâmica, apresentando grandes amplitudes de deslocamento no topo; Ficando sujeitas a problemas de segurança estrutural ou problemas de utilização. Para mitigar estes efeitos nocivos e indesejáveis, estudam-se reservatórios parcialmente preenchidos com líquido, conhecidos na literatura especializada como absorvedores de líquidos sintonizados (ALS). Um ALS é um dispositivo de controle estrutural passivo que transfere a energia mecânica da estrutura principal para o líquido *sloshing* em um tanque. A descrição mecânica do líquido *sloshing* contido em um reservatório requer uma intrincada formulação matemática. Uma técnica alternativa é descrever o comportamento dinâmico do ALS como modelo mecânico equivalente composto por uma série de sistemas de pêndulos fixados às paredes do tanque. Para validar esta abordagem, modelos desacoplados e acoplados de *sloshing* discreto equivalente são comparados a resultados experimentais e soluções analíticas, tornando assim um procedimento válido e confiável. Em seguida, o problema real, edifício alto equipado com ALS, é conceituado como um modelo mecânico de pêndulo duplo, que é otimizado pela técnica de mapa de respostas fundamentada numa análise por varredura de parâmetros que geram amplitudes de resposta mínima no sistema principal. Finalmente contribuições para o projeto de ALS são apresentadas na forma de configuração geométrica ótima de comprimento, largura e altura do líquido do ALS. Este trabalho apresenta contribuições em modelagem e procedimento experimental.

Palavras-chave: *Sloshing*, Modelo mecânico equivalente, Captura de movimento de vídeo, Otimização paramétrica, Mapa de respostas, Recomendações de projeto de ALS.

## **ABSTRACT**

### **CONTRIBUTIONS TO DESIGN METHODOLOGY OF TUNED LIQUID ABSORBERS (ALS)**

**Author: Alejandro Augusto Ospina Lopez**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Co-supervisor: Marcus Vinicius Girão de Moraes**

**Graduate Program in Structures and Civil Construction**

**Brasília, March 2020**

With the advance in construction techniques and the implementation of new building materials, as well as the use of urban space, light and flexible buildings have been designed and built. Structures with these characteristics when subjected to dynamic excitations such as earthquakes and winds, present excessive vibrations that can compromise the structural integrity and affect the comfort of your users. To mitigate these adverse and undesirable effects, partially liquid filled reservoirs, known in the literature as tuned liquid absorbers (ALS), are studied. An ALS is a passive structural control device that transfers kinetic energy from the main structure to the sloshing liquid in a tank. The mechanical description of sloshing liquid contained in a reservoir requires an intricate mathematical formulation. An alternative technique is to describe the dynamic behavior of the ALS as an the equivalent mechanical model composed of a series of pendulum systems or spring masses attached to the tank walls. To validate this approach, coupled and decoupled models of equivalent discrete sloshing are compared with experimental results and analytical solutions, showing that it is a valid and reliable procedure. High building equipped with ALS is conceptualized as a mechanical model of double pendulum, which will be optimized by the response map technique based on a scan analysis of parametric combinations that generate minimal response amplitude in the main system. Finally ALS project contributions are presented when by algebraic manipulation of the expressions that define the studied adimensional parameters, and their and its locations of lower value in the response abacuses, the optimum geometric configuration of length, width and height of the ALS liquid is obtained. As presented, the contributions of this work are modelling and experimental procedure.

**Keywords:** Sloshing, Equivalent Mechanical Model, Video Motion Capture, Parametric Optimization, Response Map, ALS Design Recommendations.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação .....	2
1.2 Objetivos .....	5
1.2.1 Objetivo geral.....	5
1.2.2 Objetivos específicos.....	5
1.3 Hipóteses.....	5
1.4 Metodologia.....	6
1.5 Contribuição da tese.....	6
1.6 Estrutura da tese .....	9
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	11
3. FORMULAÇÃO TEÓRICA .....	17
3.1 Modelagem da superfície livre .....	17
3.2 Vibração livre (VL) do <i>sloshing</i> lateral .....	19
3.2.1 Solução superfície livre para tanque retangular .....	20
3.2.2 Movimento da onda ao longo do eixo vertical – z.....	21
3.2.3 Aplicação da condição de superfície livre .....	22
3.2.4 Solução geral da superfície livre no plano $x - z$ .....	24
3.2.5 Discussão sobre o parâmetro $m_n$ .....	26
3.3 Vibração forçada (VF) do <i>sloshing</i> lateral.....	29
3.4 Modelos mecânicos equivalentes .....	32
4. ACOPLAMENTO <i>SLOSHING</i> – ESTRUTURA .....	40
4.1 Controle de vibração .....	40
4.2 Pêndulo de Cooker (P.d.C) .....	42
4.3 Modelo equivalente proposto para o pêndulo de Cooker .....	46
4.3.1 Modelo pendular (Newton) .....	46
4.3.2 Modelo pendular (Lagrange) .....	48

5. ANÁLISE EXPERIMENTAL.....	52
5.1 Bancadas experimentais.....	52
5.1.1 Aparato experimental ( <i>sloshing</i> em tanque retangular).....	52
5.1.2 Bancada pêndulo de Cooker (P.d.C) .....	54
5.2 Aquisição dos dados e identificação dos parâmetros modais.....	55
5.2.1 Técnica de captura de movimento por vídeo (Aquisição dos dados).....	55
5.2.2 Identificação de parâmetros modais.....	60
5.2.3 Considerações sobre o sensor dinâmico da superfície livre.....	62
5.2.4 Cálculo de incerteza experimental.....	64
5.3 Resultados experimentais .....	65
5.3.1 Bancada <i>sloshing</i> em tanque retangular.....	65
5.3.2 Bancada pêndulo de Cooker (P.d.C) .....	68
6. OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA <i>SLOSHING</i> ACOPLADO ESTRUTURA .....	73
6.1 Propriedades do ALS .....	73
6.2 Parâmetros adimensionais .....	73
6.3 Modelo adimensional .....	74
6.4 Mapas de respostas .....	79
6.4.1 Análise do mapa de respostas sem amortecimento $\xi_p = \xi_1 = 0$ .....	82
6.4.2 Influência do amortecimento do fluido .....	83
6.4.3 Influência da variação da razão de aspecto .....	87
6.5 Construção do mapa de respostas ótimo .....	89
6.6 Determinação do ALS ótimo .....	91
6.7 Caso de estudo edifício torre <i>Liberty</i> em Tóquio Japão.....	100
7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....	109
7.1 Conclusões gerais das análises numéricas .....	109
7.1.1 <i>Sloshing</i> em tanque retangular .....	109
7.1.2 <i>Sloshing</i> acoplado estrutura .....	110
7.1.3 Otimização paramétrica pela técnica de superfície de resposta.....	110
7.1.4 Recomendações de projeto de ALS.....	111

7.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	113

## LISTA DE FIGURAS

### CAPITULO 1

Figura 1.1– Perfil de velocidade do vento segundo a topografia do terreno (MENDIS <i>et al</i> , 2007).....	1
Figura 1.2 – One Rincon Hill, São Francisco (ROBSISNON, 2012).....	3
Figura 1.3 – <i>Comcast Center</i> , Filadélfia - <i>EUA</i> .....	4

### CAPITULO 2

Figura 2.1 – Regimes de movimento da superfície líquida livre e sua modelagem mecânica equivalente (IBRAHIM, 2005).....	14
Figura 2.2 – Experimento do pêndulo de Cooker (1994) (Adaptado COOKER, 1994).....	16

### CAPITULO 3

Figura 3.1 – ALS: (a) Modelo esquemático do ALS de geometria retangular, (b) Detalhe do <i>sloshing</i> .....	17
Figura 3.2 – Forma da superfície livre no modo fundamental antissimétrico.....	26
Figura 3.3 – Forma de onda <i>sloshing</i> para os três primeiros modos anti-simétricos na direção $x$ de um tanque retangular. Modificado (DODGE, 2000).....	27
Figura 3.4 – Forma de onda do <i>sloshing</i> para os três primeiros modos simétricos de um tanque retangular. Modificado (DODGE, 2002).....	27
Figura 3.5 – Tanque retangular sob excitação lateral sinusoidal .....	30
Figura 3.6 – Modelos mecânicos equivalentes de <i>sloshing</i> .....	33
Figura 3.7 – Comparação da função de resposta em frequência (FRF) obtida pelo modelo contínuo em linha vermelha e modelo discreto equivalente em asterisco azul.....	36
Figura 3.8 – Razão de massas vs. razão de preenchimento (IBRAHIM, 2005).....	38

## CAPITULO 4

Figura 4.1 – Estrutura principal com AMS.....	40
Figura 4.2 – Amplitude de vibração para massa principal com AMS .....	42
Figura 4.3 – Pêndulo de Cooker (COOKER, 1994) .....	43
Figura 4.4 – Solução gráfica da equação (4.15) .....	45
Figura 4.5 – <i>Sloshing</i> discreto tipo pêndulo acoplado a um pêndulo.....	46
Figura 4.6 – Convergência da frequência de oscilação $\omega_i(rad/s)$ do modelo discreto como função de $i(th)$ massas equivalentes.....	48
Figura 4.7 – Diagrama de corpo livre.....	49

## CAPITULO 5

Figura 5.1 – Esquema da disposição do elemento flutuante (sensor do nível dinâmico do líquido) .....	53
Figura 5.2 – Esquema bancada pêndulo de Cooker .....	55
Figura 5.3 – a) Janela do programa <i>CVMob</i> em um procedimento de medida do nível dinâmico do líquido. b) Trajetória boia.....	56
Figura 5.4 – Nível do líquido $H = 3,85\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	57
Figura 5.5 – Nível do líquido $H = 5,75\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	57
Figura 5.6 – Nível do líquido $H = 7,08\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	58
Figura 5.7 – Nível do líquido $H = 9,05\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	58
Figura 5.8 – Nível do líquido $H = 10,25\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	59
Figura 5.9 – Nível do líquido $H = 12,35\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> .....	59
Figura 5.10 – Nível do líquido $H = 14,28\text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva <i>Backbone</i> ....	60
Figura 5.11 – Ajuste do modelo teórico senoidal amortecido às medidas obtidas com o <i>CVMob</i> . Os pontos representam as medidas; a linha sólida, o ajuste.....	61
Figura 5.12 – Resposta dinâmica da boia vs. intervalo de frequências do experimento .....	63
Figura 5.13 – FRF da boia para diferentes alturas de boia $H_b = [1,0; 2,0; 2,3; 3,0; 4,0]\text{ cm}$ .....	63

Figura 5.14 – Período <i>sloshing</i> vs. razão de aspecto $H/L$ para modelo mecânico equivalente (tipo pendular e tipo massa-mola) e fórmula período água intermediária A.I.....	66
Figura 5.15 – Período <i>sloshing</i> vs. razão de aspecto para diferentes soluções de profundidade das águas no tanque.....	68
Figura 5.16 – Evolução do período de oscilação experimental do <i>P.d.C.</i> .....	69
Figura 5.17 – Comparação experimental e analítica da forma de superfície livre antissimétrica na bancada <i>sloshing</i> em tanque retangular.....	72

## CAPITULO 6

Figura 6.1 – Parâmetros do ALS de geometria retangular .....	73
Figura 6.2 – Modelo pêndulo duplo .....	75
Figura 6.3 – Implementação computacional do mapa de respostas.....	80
Figura 6.4 – Técnica de otimização (a) Mapa de respostas, (b) <i>FRF</i> em função de $\gamma$ e $\mu$ .....	81
Figura 6.5 – Mapa de respostas indicando linha curva (– * –) de valores com amplitude mínima.....	82
Figura 6.6 – Mapa de respostas sem adição de amortecimento. Inspirado em (SOUSA NETO, 2018) .....	83
Figura 6.7 – As figuras de (a) até (f) configuram o intervalo $\xi_1$ de 0,01 até 0,06.....	84
Figura 6.8 – As figuras de (g) até (l) configuram o intervalo $\xi_1$ de 0,1 até 0,6 .....	85
Figura 6.9 – Variação da razão de amortecimento do fluido vs. amplitude do sistema principal.....	86
Figura 6.10 – Variação da razão de aspecto vs. Amplitude de resposta com $\xi_1 = 0,05$ .....	88
Figura 6.11 – Curvas de menor amplitude para várias razões de aspecto $H/L$ no mapa de respostas..	90
Figura 6.12 – Esquema para utilização do ábaco de resposta ótima Figura 6.11.....	91
Figura 6.13 – <i>FRF</i> do pêndulo trifilar da bancada experimental com ALS ótimo obtido segundo Mapa de respostas.....	93
Figura 6.14 – Modelos mecânicos equivalentes do fenômeno <i>sloshing</i> .....	95
Figura 6.15 – Modelos para estudo de pendulo com reservatório acoplado.....	96
Figura 6.16 – Recomendações de projeto.....	98
Figura 6.17 – Localização ALS.....	99

Figura 6.18 – Caso de estudo edifício Torre *Liberty*: a) Vista perfil, b) Planta piso.....101

Figura 6.19 – Fluxograma de projeto de Absorvedores Líquidos Sintonizados - ALS.....102

Figura 6.20 – Ilustração esquemática em planta e em altura da localização do ALS ótimo.....105

Figura 6.21 – Resposta em frequência da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .....106

Figura 6.22 – Rotação da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .....106

Figura 6.23 – Resposta em frequência da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .....107

Figura 6.24 – Rotação da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .....108

## LISTA DE TABELAS

### CAPITULO 2

Tabela 2.1 – Classificação de sistemas de controle de vibrações em estruturas. (SPENCER e NAGARAJAIAH, 2003 <i>apud</i> PEÑA, 2017).....	11
--	----

### CAPITULO 3

Tabela 3.1 – Resumo das teorias de ondas de água .....	29
Tabela 3.2 – Parâmetros tanque retangular .....	39

### CAPITULO 5

Tabela 5.1 – Parâmetros modais em função da razão de aspecto .....	67
Tabela 5.2 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para $l_p = 285mm$ .....	70
Tabela 5.3 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para $l_p = 407mm$ .....	71
Tabela 5.4 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para $l_p = 538mm$ .....	71

### CAPITULO 6

Tabela 6.1 – Variação da razão de amortecimento do fluido $\xi_1$ vs. Amplitude do sistema principal $\ln \left( \max  H_{\theta_p}(\Omega)  \right)$ .....	87
Tabela 6.2 – Variação da razão de preenchimento $H/L$ vs. Amplitude do sistema principal $\ln \left( \max  H_{\theta_p}(\Omega)  \right)$ .....	89
Tabela 6.3 – Configurações geométricas de ALS ótimo para bancada pêndulo de Cooker $l_p = 538 mm$ e $m_p = 2454gr$ .....	92
Tabela 6.4 – Frequência e massa para o modo fundamental de vibração.....	100
Tabela 6.5 – Medidas ótimas de ALS para $H/L = 0,1$ .....	103
Tabela 6.6 – Medidas ótimas de ALS para $H/L = 0,3$ .....	104
Tabela 6.7 – Medidas ótimas de ALS para $H/L = 0,5$ .....	104

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

<i>A. I.</i>	Águas intermediárias
<i>ALS</i>	Absorvedor líquido sintonizado
<i>AMS</i>	Absorvedor de massa sintonizado
<i>A. P.</i>	Águas profundas
<i>A. R.</i>	Águas rasas
<i>A e B</i>	Coefficientes constantes que dependem das condições de contorno
<i>C</i>	Matriz de amortecimento do modelo acoplado
<i>C(t)</i>	Constante do tempo
CF TOOL	Ferramenta de ajuste de curva
CVMob	Software de computação visual do movimento (captura por vídeo)
<i>D</i>	Constante
<i>Exp</i>	Experimento
<i>E<sub>c</sub></i>	Energia cinética
<i>E<sub>p</sub></i>	Energia potencial
<i>E<sub>Exp</sub></i> (%)	Erro relativo porcentual experimental
<i>E<sub>M.Eq</sub></i> (%)	Erro relativo porcentual modelo mecânico equivalente
<i>F(t)</i>	Força de excitação externo
$\vec{F}(t)$	$[F_0, 0]'$ (Vetor de excitação)
<i>FRF</i>	Função de resposta em frequência
<i>F<sub>xw</sub></i>	Força hidrodinâmica na direção horizontal
<i>F<sub>0</sub></i>	Amplitude da força massa equivalente
<i>G</i>	Parâmetro adimensional (formulação pêndulo de Cooker)
<i>H</i>	Altura ou nível do líquido no ALS
<i>H/L</i>	Razão de aspecto
$\bar{H}$	Valor médio das medições feitas para H
<i>H<sub>b</sub></i>	Alturas do elemento flutuante boia
<i>K</i>	Matriz de rigidez do modelo acoplado

$K(\Omega)$	Matriz de impedância dinâmica
$L$	Comprimento de onda e comprimento do ALS
$\bar{L}$	Valor médio das medições feitas para L
$M$	Matriz de massa do modelo acoplado
$M$	Massa do líquido formulação pêndulo de Cooker
MATLAB	Matriz de laboratório
MEC	Método dos elementos de contorno
M. Eq	Modelo massa equivalente (Tipo pêndulo e Tipo massa-mola)
MEF	Método dos elementos finitos
$P''$	Derivada segunda da função $P(z)$
$P.d.C$	Pêndulo de Cooker
$P(z)$	Função componente vertical de $\emptyset$
$R$	Parâmetro adimensional (formulação pêndulo de Cooker)
$T$	Período
$T_{Exp}$	Período acoplado experimento
$TLD$	<i>Tuned liquid damper</i>
$TMD$	<i>Tuned mass damper</i>
$T_{M.Eq}$	Período acoplado solução analítica modelo mecânico equivalente
$T_p$	Período pêndulo seco (formulação pêndulo de Cooker)
$T_{P.d.c}$	Período acoplado solução analítica de Cooker
$T_s$	Período acoplado (formulação pêndulo de Cooker)
$U(x, y)$	Função componente horizontal de $\emptyset$
$V$	Magnitude de velocidade $V = [u^2 + v^2 + w^2]^{1/2}$
$VF$	Vibração forçada
$VL$	Vibração livre
$V_n$	Velocidade da partícula de fluido normal a parede do tanque
$\dot{Y}_0$	Velocidade imposta no tanque na direção y
$\dot{X}_0$	Velocidade imposta no tanque na direção x
$X_0$	Amplitude de deslocamento na direção x

$X_n$	Velocidade imposta no tanque na direção z
$X_p$	Amplitude de resposta estrutura principal
$X_s$	Amplitude de resposta estrutura secundária
$\dot{Z}_0$	Velocidade imposta no tanque na direção z
$a$	$L/2$
$\beta$	Razão de forçamento
$c$	Velocidade de onda
$c_1$	Coefficiente de amortecimento modelo <i>sloshing</i> pêndulo
$c_p$	Coefficiente de amortecimento pêndulo principal ou pêndulo estrutura
$c_s$	Amortecimento estrutura secundária ou estrutura pêndulo
$d$	Altura da parede do aparato experimental (aquário vidro)
$d = L/2$	Metade comprimento do tanque formulação pêndulo de Cooker
$e$	Exponencial
$f$	Função solução geral no tempo para condição de superfície livre
$\ddot{f}$	Derivada segunda da função $f$
$f(t)$	Função tempo de $\emptyset$
$f(x)$	Função de superfície livre
$fps$	<i>frames per secong</i> (Quadros por segundo)
$g$	Aceleração da gravidade local do laboratório
$i, j, k$	Vetores unitários ao longo dos eixos coordenados $OX, OY, OZ$
$\ln$	Logaritmo natural ou logaritmo neperiano
$\omega$	Frequência natural
$k_n = (n = 1 \dots n)$	Número de molas discretas utilizadas no modelo mecânico equivalente
$k_1$	Rigidez fundamental do <i>sloshing</i> modelo tipo massa-mola
$k^2$	Frequência natural ao quadrado
$k_p$	Rigidez estrutura principal ou estrutura pêndulo
$l$	Comprimento pêndulo suspenso (formulação pêndulo de Cooker)
$l_1$	Comprimento fundamental do <i>sloshing</i> modelo tipo pêndulo
<i>length</i>	Retorna o comprimento do vetor no programa MATLAB

$l_p$	Comprimento pêndulo estrutura
$l_n = (n = 1 \dots n)$	Número de comprimentos discretos de <i>sloshing</i> pêndulo
$\ln$	Logaritmo natural ou logaritmo neperiano
$m_n$	$(2n - 1)\pi/L$ modo antissimétrico e $2n\pi/L$ modo simétrico
$m$	Massa pêndulo seco formulação pêndulo de Cooker
$m_1$	Massa fundamental do <i>sloshing</i> modelo tipo massa-mola
$max$	Máximo
$meshgrid$	Gera uma malha de valores no programa MATLAB
$m_f$	Massa total de fluido no ALS
$m_g$	$m_p + m_0$ (Soma da massa pêndulo principal + massa água impulsiva do ALS)
$m_n = (n = 1 \dots n)$	Número de massas discretas modelo mecânico equivalente
$m_0$	Massa do fundo do ALS que não participa do movimento do <i>sloshing</i>
$m_p$	Massa estrutura principal ou estrutura pêndulo
$m_s$	Massa estrutura secundária ou estrutura pêndulo
$n$	Número de massas discretas do modelo mecânico equivalente
$\vec{\eta}$	Vetor elevação superfície livre
$\dot{\eta}$	Velocidade de superfície livre
$\eta(d, t)$	Elevação superfície livre na parede do tanque formulação pêndulo de Cooker
$p$	Pressão
$\rho$	Massa específica
$p_{fundo}$	Pressão no fundo do tanque
$p_{par}$	Pressão na parede do tanque
$P''$	Derivada segunda da função $P(z)$
$r^2 + k^2 = 0$	Equação característica solução de $f$
$u, v, w$	Componentes da velocidade $V$ ao longo dos eixos coordenados cartesianos
$t$	Tempo
$s$	Raiz solução da equação transcendental formulação pêndulo de Cooker

$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_n$	Número de onda simétrico (formulação pêndulo de Cooker)
$x, y, z$	Sistema cartesiano de coordenadas
$x(t)$	Solução temporal do deslocamento
$x_p$	Deslocamento estrutura principal
$x_s$	Deslocamento estrutura secundária
$X_n$	Amplitude massa equivalente
$\dot{x}_0$	Aceleração impulsiva massa equivalente
$X_0$	Amplitude de deslocamento na direção $x$
$\ddot{X}$	Excitação superfície livre
$z$	Carga estática – altura de coluna em relação ao plano de referência
$w$	Largura do ALS
$\omega_n$	Frequência natural do modo de superfície livre simétrico
$\varphi^2$	Parâmetros adimensionais (formulação pêndulo de Cooker)
$\mu_n$	Número de onda antissimétrico (formulação pêndulo de Cooker)
$\sigma_n$	Frequência natural do modo de superfície livre antissimétrico
$\theta$	Deslocamento angular (formulação pêndulo de Cooker)
$\sigma_T$	Desvio padrão total para o período <i>sloshing</i>
$\sigma_L$	Desvio padrão da variável $L$
$\sigma_g$	Desvio padrão da variável $g$
$\sigma_H$	Desvio padrão da variável $H$
$\partial T / \partial H$	Derivada parcial do período <i>sloshing</i> para A.I. em relação $H$
$\partial V / \partial t$	Aceleração local: é dada pela mudança na velocidade do movimento de translação em relação ao tempo.
$\partial T / \partial L$	Derivada parcial do período <i>sloshing</i> para A.I. em relação $L$
$\partial \Phi / \partial t$	Termo de inércia local na equação de momentum para fluxo irrotacional
$\partial T / \partial g$	Derivada parcial do período <i>sloshing</i> para A.I. em relação $g$
$\partial \Phi / \partial y$	Gradiente função potencial em relação a coordenada $y$
$\partial \Phi / \partial z$	Gradiente função potencial em relação a coordenada $z$

$(\omega_n)_{exp}$	Frequência natural experimental
$(\omega_n)_{Ana}$	Frequência natural Analítica
$\gamma$	Razão de sintonização
$\mu$	Razão de massa em relação a massa efetiva do <i>sloshing</i> $m_1$
$\xi_1$	Razão de amortecimento do fluido
$\xi_p$	Razão de amortecimento do pêndulo – estrutura
$\omega_1$	Frequência natural desacoplada modelo <i>sloshing</i> pêndulo
$\omega_p$	Frequência natural desacoplada pêndulo principal ou pêndulo estrutura
$\ddot{\theta}_p$	Aceleração angular pêndulo principal
$\dot{\theta}_p$	Velocidade angular pêndulo principal
$\theta_p$	Deslocamento angular pêndulo principal
$\ddot{\theta}_1$	Aceleração angular <i>sloshing</i> pêndulo
$\dot{\theta}_1$	Velocidade angular <i>sloshing</i> pêndulo
$\theta_1$	Deslocamento angular <i>sloshing</i> pêndulo
$\mu_p$	Razão de massa em relação a massa total de fluido $m_f$
$\vec{X}$	$[H_{\theta_p}, H_{\theta_1}]'$ (Vetor de amplitudes de resposta)
$ H_{\theta_p}(\Omega) $	Absoluto da amplitude de resposta em frequência do pêndulo-estrutura
$\nabla$	Gradiente
$(V \cdot \nabla)V$	Aceleração local
$\nabla$ ou <b>grad</b>	Gradiente: derivada em relação ao espaço $(x, y, z)$
$\nabla \times V$	Fluxo Rotacional
$\nabla^2 \phi$	Equação de Laplace
$\phi(x, y, z, t)$	Função potencial de velocidade
$\theta$	Deslocamento angular (formulação pêndulo de Cooker)

# 1. INTRODUÇÃO

Com o benefício do crescente progresso das técnicas construtivas, o avanço nas implementações de novos materiais de construção como também o aproveitamento do espaço urbano e do elevado custo do metro quadrado da construção civil nas grandes cidades, têm-se projetado e construído estruturas cada vez mais esbeltas, leves e flexíveis (ALI e KYOUNG, 2007).

Tais estruturas são mais vulneráveis às excitações de natureza dinâmica, por exemplo excitações eólicas e sísmicas, apresentando respostas estruturais com grandes amplitudes de deslocamento no topo. Desta forma, essas estruturas estão sujeitas a problemas de segurança estrutural devido a falhas por fadiga ou a problemas de utilização relacionados ao conforto do usuário.

Analisando o vento e seus efeitos em arranha-céus observa-se como a velocidade do vento varia em função da altura e da rugosidade do terreno. O tamanho e a forma do perfil de velocidades é ilustrado na Figura 1.1, e é caracterizado tanto pelo relevo como pela sua ocupação.

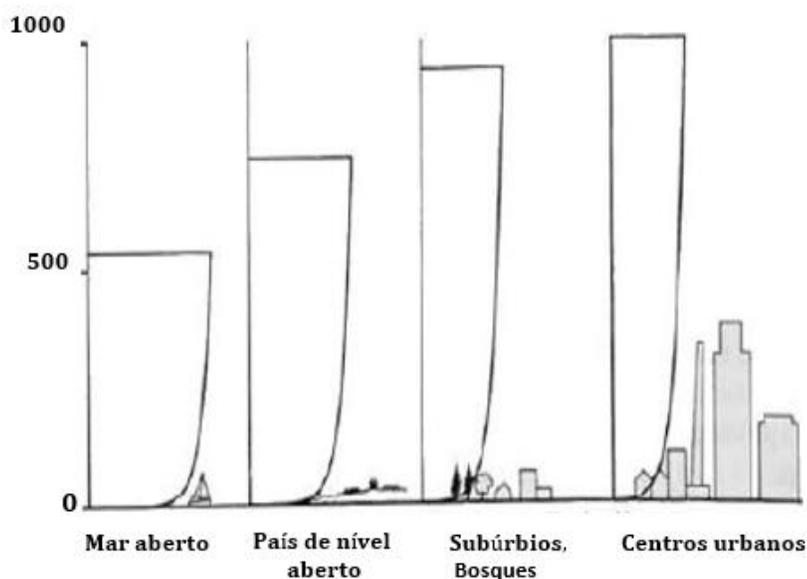


Figura 1.1 – Perfil de velocidades do vento em relação à altura. (MENDIS *et al*, 2007).

Quanto mais esbelta for uma estrutura, maior será a sua resposta dinâmica ao vento e também será mais sensível a carregamentos dinâmicos. Desta forma quanto mais flexível, menor é a frequência natural.

Para mitigar os efeitos nocivos gerados pela natureza dinâmica das perturbações ambientais como por exemplo de ventos e terremotos, o controle estrutural é uma alternativa atraente para um melhor desempenho das estruturas de engenharia. Assim sendo, a técnica de controle estrutural, é capaz de absorver e/ou dissipar parte da energia vibratória promovendo uma alteração na propriedade de amortecimento da estrutura, seja pela adição de dispositivos externos ou pela ação de forças externas. Ele pode ser classificado como: controle passivo, controle ativo, controle híbrido ou controle semi-ativo (SOONG e DARGUSH, 1997; AVILA, 2002).

## 1.1 Motivação

Para o controle de vibrações excessivas, nocivas e indesejadas em estruturas esbeltas em edifícios arranha-céus, torres eólicas, pontes, estruturas *offshore*, etc. estudam-se reservatórios parcialmente preenchidos com líquido, conhecidos como absorvedores líquidos sintonizados (ALS) (em inglês TLD *Tuned Liquid Damper* ou *Sloshing Damper*) como dispositivos de controle passivo. Isto mediante a transferência da energia cinética do edifício para o líquido contido no reservatório (ALS) gerando o movimento *sloshing* ou oscilação da superfície livre do líquido. Outro dispositivo de controle passivo que utiliza a oscilação de uma quantidade de líquido é o absorvedor de coluna líquida sintonizada (ACLS) (em inglês, TLCD – *Tuned Liquid Colum Damper*).

No campo de vibrações produzidas pelo vento em edifícios altos, podem ser relatados dois casos práticos. Os quais mencionam uma solução no controle de vibrações mediante a implementação de ALS e seu semelhante, o ACLS (Absorvedor de coluna de líquido sintonizado).

O *One Rincon Hill*, localizado na baía da Califórnia, Estados Unidos (ROBINSON *et al*, 2007), foi construído com a premissa de resistir e ter estabilidade as ações de terremotos e de poderosos ventos do pacífico, que podem atingir a força de furacão acima de 120 quilômetros por hora. A Figura 1.2, apresenta uma vista panorâmica das duas torres e os ALS.

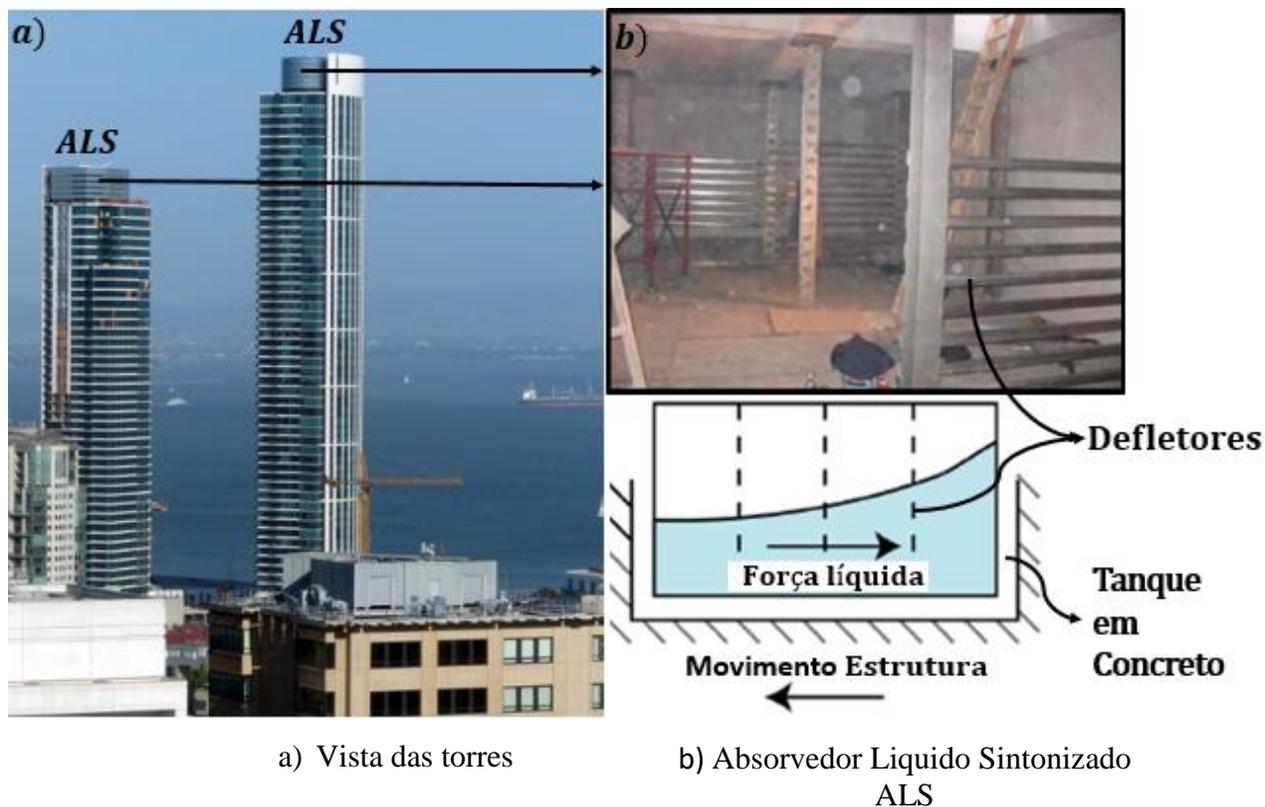
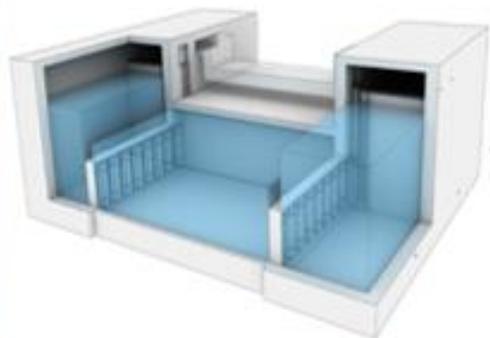


Figura 1.2 – *One Rincon Hill* (ROBINSON *et al*, 2007)

Cada torre está equipada no seu topo com absorvedores líquidos sintonizados, que funcionam com 29.000 litros de água e pesam 185.440 kg, (NOLTE, 2007). Os ALS também contêm duas telas amortecedoras distribuídas no seu comprimento, para ajudar na dissipação de energia e combater a oscilação.

O segundo caso é o *Comcast Center*, de 58 andares, é o prédio mais alto da Filadélfia - EUA, a forma da torre é um obelisco facetado, envolto em vidros prateados com vidro ultra claro nos cantos e na coroa do edifício. Estudos em túnel de vento mostraram que a torre estaria sujeita a vibrações significativas induzidas pelo vento devido a efeitos de desprendimento de vórtices.

Na Figura 1.3 apresenta-se a torre, sua arquitetura e o detalhe do ACLS localizado no topo do edifício.



**Absorvedor de Coluna Líquida  
Sintonizada - TLCD**

Figura 1.3 – *Comcast Center* Filadélfia, *EUA*.

[https://es.wikipedia.org/wiki/Comcast\\_Center](https://es.wikipedia.org/wiki/Comcast_Center)

Acesso em: 30 de abril de 2020.

Os dois casos expostos acima evidenciam-se problemas de grandes oscilações geradas pelos efeitos de carregamentos dinâmicos ambientais como ventos e sismos. Nestes adotam-se como dispositivos de controle estrutural soluções baseadas em absorvedores líquidos tais como *ALS* e *ACLS* no primeiro e segundo, respectivamente.

O trabalho apresenta validação com bancadas experimentais simples dos modelos analíticos estudados, o que admite a validade e confiabilidade dos seus resultados. Além do grupo de pesquisa em dinâmica e fluido estrutura (*GDFE*) e grupo de dinâmica de sistemas (*GDS*) da Universidade de Brasília das quais são oriundas as orientações para a obtenção dos resultados, os estudos desta pesquisa podem ser de grande interesse para engenheiros projetistas estruturais, e pesquisadores em controle estrutural que pretendam uma solução rápida e precisa na implementação adequada de *ALS* para o controle de vibrações de edifícios altos, subtraindo as complexas formulações matemáticas que regem o fenômeno *sloshing*, as equações da dinâmica dos fluidos e seu acoplamento com a estrutura em implementações computacionais.

## 1.2 Objetivos

### Geral

A partir da problemática de vibrações em edifícios altos pretende-se estudar o controle passivo de estruturas com baixas frequências que estão em concordância com as faixas de frequência de sistemas oscilatórios de superfície livre (*sloshing*). O problema a ser tratado neste trabalho se interessa com o controle da resposta dinâmica da estrutura principal (pêndulo) acoplada a um ALS de geometria retangular. O modelo estudado foi deduzido partindo da simplificação de uma estrutura de edifício alto reduzido a um único grau de liberdade no formato pêndulo, acoplado a um ALS. Com isto, dentre as motivações e contribuições deste trabalho é a compreensão do comportamento dinâmico de um edifício alto equipado com um ALS no topo.

### Específicos

Como objetivos específicos pretende-se:

- Propor uma técnica experimental para determinação de parâmetros modais de superfície livre em tanques retangulares;
- Modelar analiticamente o problema pêndulo de Cooker (1994) pela técnica de massa equivalente e validar os resultados experimentalmente;
- Otimizar a função objetivo definida como amplitude de resposta em frequência do sistema pêndulo principal pela técnica de mapa de respostas;
- Formular diretrizes ou recomendações metodológicas de projeto para a determinação das dimensões ótimas de um ALS.

## 1.3 Hipóteses

- Para a modelagem do dispositivo de controle ALS aborda-se apenas a teoria linear de onda, assumindo um fluido não rotacional e não viscoso, modelado por uma função potencial de velocidades.
- Na modelagem do sistema acoplado, os pêndulos que representam a estrutura principal e o modo fundamental do *sloshing* respectivamente, assumem-se para pequenas amplitudes de oscilação limitando as equações ao regime linear.

## 1.4 Metodologia

Esta pesquisa apresenta uma técnica experimental para determinação de parâmetros modais de superfície livre (*sloshing*) em tanque retangular, como também a construção de bancadas experimentais capazes de validar modelos analíticos e ajudar a compreender a vasta teoria sobre absorvedores de massa líquida sintonizados.

Inicialmente é estudado o fenômeno *sloshing* em vibração livre VL e vibração forçada VF para determinar os parâmetros modais dos modelos mecânicos equivalentes de *sloshing* nos formatos massa-mola e pêndulo.

A seguir, o modelo pêndulo com reservatório acoplado, com solução analítica proposta por Cooker (1994) é modelado pela técnica de parâmetros mecânicos equivalentes no formato de pêndulo duplo. Até este passo, o modelo de *sloshing* desacoplado e acoplado são validados por análise experimental usando a técnica de captura de movimento por vídeo.

Uma vez validados, o modelo de pêndulo duplo, conceituado como um edifício alto equipado com ALS é configurado para uma otimização paramétrica utilizando a técnica de mapa de respostas, a qual identifica mediante solução gráfica amplitudes de resposta mínima do sistema principal.

Finalmente, são apresentadas recomendações de projeto que informem aos projetistas como conseguir o controle estrutural usando-se a técnica de modelos mecânicos equivalentes e de mapa de respostas são apresentadas. A pesquisa é importante pela sua simplicidade e precisão dos resultados, também pela relação custo - benefício em referência a análises experimentais complexas e custosas encontradas na literatura especializada (DI MATTEO *et al*, 2014, 2015a,2015b).

## 1.5 Contribuição da tese e Justificativa

Esta pesquisa apresenta novidades em termos de modelagem de edifício alto equipado com ALS e procedimento experimental. Estuda como a partir de modelos analíticos e aparatos experimentais simples se pode obter informações importantes que conduzem a inferências relevantes a situações reais, como é o controle de vibrações de edifícios altos. A nível de conhecimento, a partir

da revisão bibliográfica não foi encontrada nenhuma descrição da técnica experimental com modelos simples; da modelagem do problema pêndulo de Cooker; da otimização paramétrica por técnica de mapa de respostas, bem como as recomendações de projeto de ALS, que a seguir serão apresentados.

Inicialmente apresenta-se uma técnica experimental capaz de medir parâmetros modais de onda de superfície livre (ou *sloshing*) de um líquido que parcialmente preenche um reservatório finito. Utiliza-se como sensor de movimento uma boia que acompanha a oscilação da superfície livre do líquido, cuja trajetória é adquirida através de técnicas de captura de movimento de vídeo. Esta técnica é validada pela solução analítica da formulação teórica clássica e valida o modelo mecânico equivalente de *sloshing*. Na literatura estudada não foi reportada uma técnica simplificada como a executada.

Uma segunda contribuição trata-se da modelagem do problema pêndulo de Cooker (1994) pela técnica de modelos mecânicos equivalentes de *sloshing* ou técnica de massa equivalente. Nesta etapa, o trabalho apresenta uma formulação analítica robusta validada experimentalmente que abre e possibilita a compreensão do comportamento dinâmico de um edifício alto equipado com um ALS, como um modelo mecânico acoplado na forma de pêndulo duplo. Com isto tem-se um problema complexo representado de forma simples e eficiente. A modelagem do problema pêndulo de Cooker é validada pela solução analítica de Cooker (1994) e pela técnica experimental.

Uma terceira contribuição é a otimização paramétrica pela técnica de mapa de respostas. Este procedimento baseia-se numa análise por varredura de parâmetros adimensionais (razão de massa e razão de sintonização). Sendo uma solução de natureza gráfica, contém informações qualitativas e quantitativas das combinações paramétricas que geram menor amplitude de resposta do sistema principal (estrutura-pêndulo), identificadas mediante um vale ou locus geométrico no espaço tridimensional. O mapa de respostas é validado experimentalmente por vibração livre.

Partindo do mapa de respostas (ou ábaco de trajetórias de amplitude de resposta mínima do sistema principal) e de dados de entrada do edifício que pretende ser controlado tais como massa,

frequência fundamental e um valor assumido da razão de aspecto do ALS é possível prescrever dimensões (H, L e W) de ALS ótimos.

A metodologia utilizada nesta pesquisa segue um processo sequencial de modelagem analítica com validação experimental o que garante que os resultados sejam válidos e confiáveis.

Os resultados obtidos nesta pesquisa tem especial interesse para pesquisadores que trabalhem no controle estrutural com Absorvedores de Massa Sintonizados (*AMS*) por terem em mãos uma ferramenta para transformar sistemas controlados com dispositivos oscilatórios de superfície livre - ALS em sistemas discretos de comportamento bem conhecido. Também para engenheiros projetistas estruturais por encontrar neste trabalho um roteiro de projeto de ALS fácil e preciso de ser executado com simplicidade nos cálculos, que permita uma alternativa para as complexas formulações matemáticas da dinâmica dos fluidos e aos altos custos computacionais da modelagem numérica.

## 1.6 Estrutura da tese

O trabalho divide-se em sete capítulos:

- O primeiro capítulo da introdução apresenta a motivação, objetivos, metodologia e contribuições ou justificativa da pesquisa. Em aspectos gerais a necessidade do controle de vibrações excessivas a prédios altos que quando submetidos a excitações dinâmicas podem gerar desconforto ou comprometer a integridade da estrutura. Apresentam-se tanques de água (*ALS*) operando como dispositivos de controle de vibração passiva. Para estes, são apresentadas as suas vantagens com respeito de outras técnicas. A partir da colocação do problema, comentam-se as motivações, propõem-se os objetivos, descreve-se a metodologia, finalmente expõem-se as contribuições da pesquisa.

- O segundo capítulo dedica-se a uma apresentação sucinta de parte da bibliografia existente sobre o assunto, a qual trata sobre os modelos matemáticos de *sloshing* e modelos mecânicos equivalentes que reproduzem os efeitos hidrodinâmicos. Revisa-se trabalhos onde focados em controle de vibrações com *ALS*, busca-se entender os parâmetros que controlam o problema, assim como as técnicas de otimização utilizadas. Estudaram-se trabalhos no âmbito experimental; Foi realizada uma varredura de trabalhos clássicos e publicações mais recentes.

- No terceiro capítulo é apresentada a formulação analítica utilizada para o desenvolvimento da pesquisa. A descrição matemática do fenômeno *sloshing*, a solução analítica em vibração livre e vibração forçada da superfície livre em um reservatório retangular. É introduzido o conceito de modelo mecânico equivalente e as formas massa – mola e pendular para descrever o comportamento dinâmico de superfície livre.

- No quarto capítulo apresenta-se a formulação do *sloshing* acoplado a estrutura. Inicialmente mostra-se a definição de controle de vibrações passiva, a solução analítica para o pêndulo de Cooker, e por último o modelo equivalente proposto para o pêndulo de Cooker.

- No quinto capítulo apresenta-se a metodologia experimental de sensor de flutuação e análise de movimento por captura de vídeo para a identificação dos parâmetros modais experimentais da superfície livre de um *ALS* e sua relação com o nível de preenchimento. Em seguida, a mesma metodologia é realizada para a identificação do período fundamental do sistema acoplado pêndulo - *ALS*.

- No sexto capítulo apresenta-se a técnica de otimização paramétrica por mapa de respostas.

- Finalmente, no sétimo capítulo, se expõem as principais conclusões alcançadas a partir dos resultados numéricos e experimentais e se sugerem tópicos que podem ser abordados em trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A introdução de sistemas estruturais modernos, estimulados por avanços nas metodologias de construção e materiais de alta resistência, levou ao auge dos modernos arranha-céus (ALI e KYOUNG, 2007). Embora a ciência e a tecnologia tenham conseguido aumentar a resistência dos materiais de construção, como o aço e o concreto, a rigidez observa-se diminuída pelo aumento da esbeltes das estruturas (NNAMANI, 2012). O resultado final são edifícios altos e flexíveis, suscetíveis a vibrações. Para isto, o controle estrutural surge como uma maneira de controlar níveis excessivos de vibração. (DEN HARTOG,1956; MCMARA,1977; Warburton, 1982; Housner *et al*, 1997; Kareem, 1993; Kareem *et al*, 1999; Spencer e Nagarajaiah, 2003). Segundo Connor (2003) o controle estrutural baseia-se na necessidade de incluir sistemas de amortecimento adicionais que ajudem a dissipar energia de deformação principalmente em condições perto da ressonância. Na Tabela 2.1 apresentam-se os três principais sistemas de controle de vibração (Sistemas de controle passivo, sistemas de controle ativo e sistemas de controle semiativos). (Constantinou *et al*, 1998).

Tabela 2.1 – Classificação de sistemas de controle de vibrações em estruturas. (Spencer e Nagarajaiah, 2003 *apud* Peña, 2017).

Sistema de Controle	Tipo	Dispositivo
<u>Passivo</u>	<u>Absorvedores</u>	Amortecedores de massa sintonizada (AMS) Amortecedores de líquido sintonizada (ALS)
	Dissipadores	Amortecedores viscosos Amortecedores viscoelásticos Amortecedores friccionais Amortecedores hysteréticos
	Isoladores	Isolamento de base
	Efeito de massa	Amortecedores de massa ativa Amortecedores híbridos de massa
Ativo e Híbrido	Controle de força	Cabos ativos Diagonais ativas Atuadores piezoelétricos
	Controle de amortecimento	Amortecedores viscosos de orifício variável Amortecedores sintonizados líquidos ajustáveis Amortecedores fluidos controláveis
Semiativo	Controle da rigidez	Amortecedores de fricção variáveis

O controle passivo por meio de absorvedores dinâmicos de massa sintonizada (AMS, ou, em inglês *Tuned Mass Damper*) são amplamente utilizados. O princípio de funcionamento é baseado na transferência de energia cinética da estrutura principal para o absorvedor dinâmico, reduzindo assim, a energia por deformação nos membros da estrutura principal. A principal vantagem do controle passivo por AMS é a facilidade de instalação, o baixo custo de manutenção, não prescindir de fontes de energia, e possuir eficiência/confiabilidade comprovada (CONSTANTINO et al, 1998). E sua principal desvantagem é a limitação de funcionar eficazmente para uma faixa de frequência estreita (RAMOS, 2007).

Esta pesquisa centra-se no estudo de sistemas de controle passivo do tipo absorvedores líquidos. Um ALS é um tipo de AMS que transfere a energia cinética da estrutura principal para um fluido oscilando em reservatório. A oscilação do fluido contido em um reservatório é conhecido como o fenômeno de *sloshing* (CARNEIRO JR, 2017). Embora a construção de um ALS seja simples, a descrição do fenômeno de *sloshing* requer uma formulação matemática complexa conforme (ABRAMSON, 1966; DODGE, 2000; IBRAHIM, 2005).

O estudo do controle de vibrações com dispositivos de ALS requer o domínio da teoria da dinâmica dos fluidos e complexos procedimentos numéricos para sua modelagem. Fujino *et al* (1988) e Sun *et al* (1989, 1992, 1995) e Sun (1991) apresentam estudos para um tanque retangular usando as equações da teoria de ondas de águas rasas, e da continuidade, o modelo inclui uma expressão analítica para o amortecimento por viscosidade na camada limite. Também contém um fator de contaminação da superfície  $S$ , e coeficientes empíricos para determinar a quebra de onda. As equações são discretizadas pelo método das diferenças finitas e solucionadas pelo método de *Runge-kutta* de quarta ordem. Shimizu e Hayama (1986) apresentaram um modelo numérico para resolver as equações de Navier-Stokes e da continuidade com base na teoria de onda para águas rasas. Eles discretizaram as principais equações e resolveram numericamente.

Modi e Seto (1997) propõem um estudo numérico considerando o comportamento não-linear do ALS. Ele inclui os efeitos de dispersão da onda, bem como o efeito de camada limite nos contornos das paredes, interações de partículas flutuantes à superfície livre e da quebra de onda. No entanto, a análise não leva em conta a dinâmica de impacto da onda batendo na parede do tanque. Além disso, em alturas inferiores do líquido, o que corresponde a ocorrência da quebra de onda, a

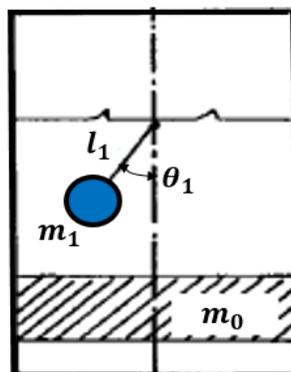
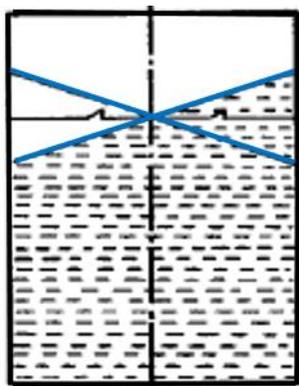
análise numérica não é muito precisa e uma grande discrepância existe entre resultados numéricos e experimentais.

Como alternativa aos complexos procedimentos mencionados; (GRAHAM e RODRIGUEZ, 1952; ABRAMSON, 1966; DODGE, 2000; IBRAHIM, 2005, 2014) descrevem a resposta dinâmica do *sloshing* para tanques com diferentes geometrias como um modelo mecânico equivalente composto por sistemas massa-mola ou pêndulo fixados nas paredes do reservatório. A Figura 2.1 conceitualizada por Ibrahim (2005) apresenta de forma ampla e conceitual as análises que os pesquisadores pretendem realizar a partir das formulações sejam estas do modelo contínuo ou discreto do *sloshing* em relação a complexidade do problema a ser analisado, ao fazer analogia dos efeitos não lineares da onda de superfície livre do líquido *sloshing* com as características físicas do comprimento do cabo de um pêndulo.

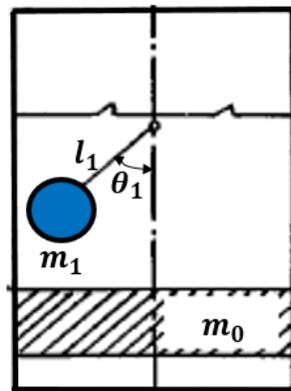
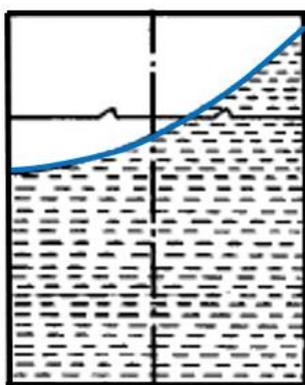
Utilizando a praticidade destes modelos mecânicos equivalentes de *sloshing*, foram possíveis análises sofisticadas de não linearidade, Yu *et al* (1999) estudaram um modelo numérico do ALS como um amortecedor de massa sintonizado equivalente com rigidez e amortecimento não lineares, o modelo incorpora a rigidez como uma propriedade de endurecimento do ALS sob grande amplitude de excitação. Diversos autores (NICKAWDE *et al*, 2004; KANG, 2006; YUE, 2011) modelaram o movimento de *sloshing* como um pêndulo simples para estudar a estabilidade do sistema acoplado *sloshing* – veículo espacial, eles empregaram modelos mecânicos equivalentes pendulares para realizar estudos de modelagem e controle de dinâmica de espaçonaves com combustível *slosh*, outros como Cui *et al*, (2014) consagraram no estudo da estabilidade da dinâmica veículo-combustível *slosh*. D'Alessandro (2011), estuda o efeito do líquido *sloshing* em caminhão tanque, e modela a resposta acoplada do sistema por modelos computacionais CFD e experimentais.

Exemplos de aplicações de ALS para controle de vibrações são: (a) em edifícios por (CASTILLO e CRUCHAGA, 2012; NOVO *et al*, 2014; BATTAGLIA *et al*, 2018; ESPINOZA *et al*, 2018), (b) em turbinas eólicas (MURTAGH, 2008; COLWELL, 2009; ZHANG, *et al*, 2015, 2016), (c) em pontes por (XUE, *et al* 1999; SHUM *et al*, 2008), (d) em estruturas *offshore* (LACKNER e ROTEA, 2011). Muitas estruturas altas foram efetivamente equipadas com dispositivos ALS, resultando em uma diminuição significativa no movimento estrutural (FUJINO *et al*, 1988; NOJI *et al*, 1988).

a) Modelagem linear



b) Não linearidade fraca



c) *Sloshing* de impacto

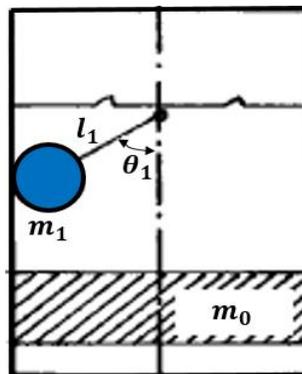
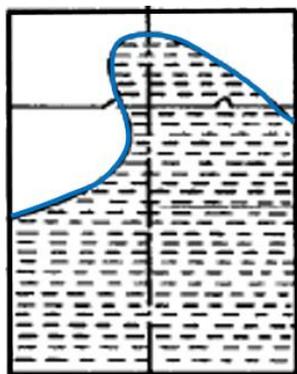


Figura 2.1 – Regimes de movimento da superfície líquida livre e sua modelagem mecânica equivalente. (IBRAHIM, 2005).

Li e Gong (2012) desenvolveram um método semi-analítico / numérico para modelos mecânicos equivalentes de fluidos *sloshing* em aquedutos de formato arbitrário. Apenas o primeiro modo *sloshing* é considerado para as expressões analíticas dos modelos equivalentes e suas localizações. Li e Wang (2011) apresentam um estudo suplementar para descrever uma solução exata de um modelo mecânico equivalente para um fluido *sloshing* em um tanque retangular. Tait *et al* (2002) e Tait (2008) estudaram o mecanismo adicional de dissipação de energia, com telas de amortecimento.

Kareem e Sun (1987) apresentam uma análise do fluido *sloshing* submetido a uma excitação estocástica. O conceito de massa equivalente e amortecimento pode ser usado para determinar um valor equivalente estimado experimentalmente por AMS, numa mesa excitadora (SORKHABI *et al*, 2017). O modelo de fluido equivalente ainda é o favorito para engenheiros estruturais.

Outras pesquisas têm sido devotadas aos estudos híbridos numéricos experimentais, onde o ALS é analisado experimentalmente e as forças de iteração do líquido alimentam um modelo de numérico da estrutura. (MALEKGHASEMI, 2011; SORKHABI *et al*, 2012)

Estes dispositivos necessitam para desenvolver corretamente o controle de vibrações a sintonização de sua frequência de oscilação com a da estrutura de forma bastante precisa. Esta sensibilidade ao ajuste de seus parâmetros dinâmicos tem impulsionado diversos pesquisadores ao seu estudo. Para ressaltar alguns trabalhos têm-se: (CRANDALL,1973; KAREM *et al*, 1999; ZULUAGA, 2007; AVILA *et al*, 2009; COLHERINHAS, 2016).

As pesquisas de absorvedores de massa sintonizados e modelos mecânicos equivalentes de *sloshing* são caracterizados além da estimação dos parâmetros dinâmicos destes dispositivos e sua interação com os da estrutura principal, pelos estudos de otimização a fim de garantir a eficiência máxima destes dispositivos nas mais diversas configurações e/ou excitações externas. Na Universidade de Brasília, diversos trabalhos sobre absorvedores dinâmicos foram desenvolvidos com o intuito de se obter parâmetros ótimos. (ZULUAGA, 2007; AVILA *et al*, 2009; ALKMIN, 2015; COLHERINHA, 2016; SOUSA NETO, 2018) entre outros.

O grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura (GDFE) do PECC, tem consagrado vários estudos com atenuadores de líquido sintonizados (ALS's), tais como (FREITAS e PEDROSO, 2017, 2019; MENDES *et al*, 2018; MENDES, 2018) além dos conteúdos de base e fundamentos

encontrados nos textos dos cursos de Dinâmica II e Fluido-Estrutura do PECC (PEDROSO, 1992, 2000 e 2016), entre outros.

Neste trabalho, o modelo mecânico equivalente é comparado com os resultados experimentais e a solução analítica de *sloshing* em contêineres retangulares e com o problema de pêndulo-*sloshing* como mostrado na Figura 2.2 (COOKER, 1994).

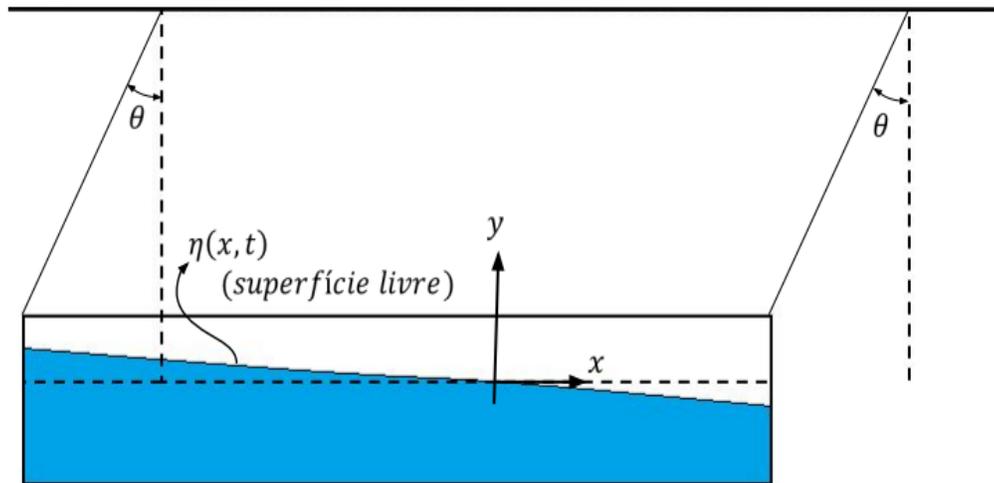


Figura 2.2 – Experimento do pêndulo de Cooker (1994) (Adaptado COOKER,1994)

Este trabalho apresenta novidades em termos de modelagem e procedimento experimental. O uso de um sensor flutuante para determinar o movimento da superfície livre é uma solução engenhosa não utilizada na literatura. Várias pesquisas (DI MATTEO *et al*, 2014, 2015a, 2015b; PARK *et al*, 2015; BATTAGLIA *et al*, 2018) utilizam técnicas complexas e dispendiosas com laser. Até onde sabemos, a comparação da solução analítica do experimento de Cooker por técnicas equivalentes é apresentada inicialmente neste trabalho. Love e Tait (2011, 2013) comparam um sistema 2D de pêndulo-*sloshing* usando técnicas mecânicas equivalentes com apenas resultados de experimentos.

### 3. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a modelagem matemática do fenômeno de onda de superfície livre também conhecido como fenômeno *sloshing*, de um líquido que parcialmente preenche um reservatório finito de geometria retangular. Inicialmente realiza-se uma análise em vibração livre para determinar as frequências de vibração e as formas modais da superfície livre, posteriormente mediante uma análise em vibração forçada determinam-se as forças hidrodinâmicas do líquido sobre as paredes do reservatório (ou tanque). Com estes resultados é possível obter parâmetros mecânicos equivalentes de modelos discretos de *sloshing* capazes de replicar o comportamento dinâmico da superfície livre do líquido.

#### 3.1 Modelagem da superfície livre

A onda de superfície livre (*sloshing*) no interior de um reservatório de geometria retangular, como esquematiza-se a seguir na Figura 3.1 é um fenômeno oscilatório caracterizado por baixas frequências. Para sua modelagem matemática simplificações como tanque de paredes rígidas e fluido ideal não viscoso, permitem o uso da teoria potencial para explicar o comportamento do fluido.

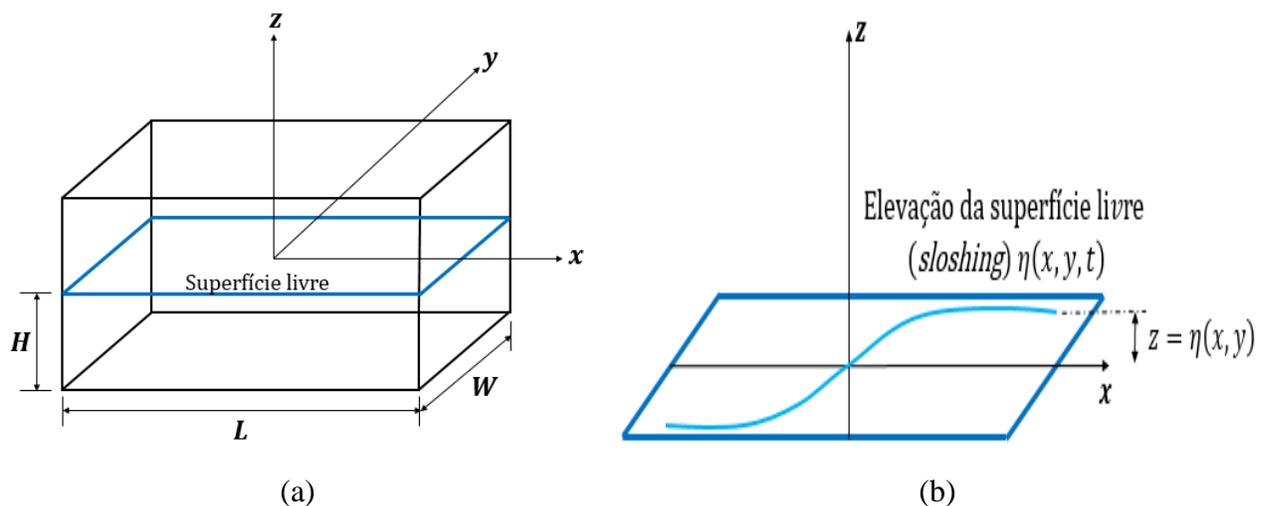


Figura 3.1 – ALS: (a) Modelo esquemático do ALS de geometria retangular, (b) Detalhe do *sloshing*.

As formulações das seções 3.1 a 3.3 estão fundamentadas em vários textos da literatura (LE MÉHAUTÉ, 1976; PEDROSO, 1992; PEDROSO apud MORAES, 2000; SUN, 1992). A

premissa básica neste desenvolvimento consiste na linearidade, na proporcionalidade que pequenas amplitudes de onda são precedidas de pequenas amplitudes de movimento impostas no tanque. Como exposto introdutoriamente as hipóteses simplificadoras do problema são:

- a) Tanque (ou reservatório) de paredes rígidas;
- b) Líquido ideal, no qual as forças de viscosidade são negligenciadas, o movimento é assumido como não-rotacional e o fluido é incompressível;
- c) Sendo  $\eta$  a elevação da superfície,  $H$  a altura do líquido contido e  $L$  o comprimento do tanque, como mostrado na Figura 3.1(a), os efeitos não-lineares são desprezados, isto porque  $\eta/L$  e  $\eta/H \ll 1$ ;
- d) Os efeitos de tensão superficial e da atmosfera exterior são desprezíveis;
- e) O fundo é horizontal, fixo e impermeável, implicando na velocidade do fundo zero.

Partindo da equação governante do movimento (Equação de Euler);

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{-1}{\rho} \nabla p - \nabla(gz) \quad (3.1)$$

onde,  $\mathbf{V}$  é a velocidade média do fluido com componentes  $u, v, w$  nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente:  $\partial \mathbf{V} / \partial t$  é a aceleração local,  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  é a aceleração convectiva,  $p$  é a pressão do fluido,  $\rho$  massa específica do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $z$  é a altura da coluna de água em relação a um plano de referência (carga estática).  $\nabla$  é o operador gradiente em coordenadas cartesianas.

Escreve-se a aceleração convectiva  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  como:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \nabla V^2 \quad (3.2)$$

Como o fluido é não rotacional  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ , garante-se a existência de uma função potencial de velocidade  $\phi(x, y, z, t)$  na qual o campo de velocidades pode ser derivado como:

$$ui + vj + wk = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \right) \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = -\nabla \phi \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (3.2) e (3.3), na equação (3.1), tem-se:

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Integrando-se a equação (3.4) no domínio do tempo, chega-se na equação de Bernoulli:

$$\frac{-\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.5)$$

onde  $C(t)$  é uma função do tempo e o termo não linear devido a inércia convectiva  $\frac{1}{2} V^2$  pode ser expresso como uma função potencial  $\phi$ , em que:

$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} [(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial y)^2 + (\partial \phi / \partial z)^2] = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \quad (3.6)$$

Efetuada-se as linearizações pertinentes ao caso, torna-se possível aplicar a teoria potencial e o problema pode ser representado pela equação de Laplace, que governa o domínio do fluido.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.7)$$

### 3.2 Vibração livre (VL) do *sloshing* lateral

A solução da equação de Laplace é de natureza harmônica definida pelas condições de contorno aplicadas nos contornos rígidos do tanque retangular e na superfície livre. Desta forma na parede rígida molhada e no fundo, a velocidade do fluido e da parede devem ter o mesmo valor no ponto em questão. Se o tanque se move com a velocidade prescrita  $V_0 = \dot{X}_0 i + \dot{Y}_0 j + \dot{Z}_0 k$ , temos:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=-L/2} = \dot{X}_0; \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=-W/2} = \dot{Y}_0; \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = \dot{Z}_0 \quad (3.8)$$

Portanto, para um tanque retangular fixo, como apresentado na Figura. 3.1 temos nas paredes:

$$u|_{x=L/2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = 0; \quad v|_{y=W/2} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=W/2} = 0; \quad (3.9)$$

E no fundo:

$$w|_{z=-H} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (3.10)$$

Para se estabelecer a condição de contorno de superfície livre (condição de contorno dinâmica), analisa-se a equação (3.5) em  $z = \eta$ . Para esta condição ao fazer  $p = 0$  por ser igual à pressão atmosférica e desprezar os termos não lineares, chega-se a condição de superfície livre linearizada:

$$\frac{-\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (3.11)$$

Estabelecendo uma condição cinemática do movimento vertical da superfície livre, a variação de  $z$  em relação ao tempo é:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-\partial \phi}{\partial z} \quad (3.12)$$

Desta forma, diferenciando no tempo a condição dinâmica (3.11), e utilizando a condição cinemática (3.12), obtêm-se a condição de contorno dinâmica de superfície livre:

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

Esta expressão é conhecida como condição de Cauchy-Poisson (LE MÉHAUTÉ, 1976).

### 3.2.1 Solução superfície livre para tanque retangular

O processo de solução da equação de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$ , pode ser efetuado por separação de variáveis. Esta solução para a função potencial de velocidades  $\phi$  é constituída pelas componentes horizontal  $U(x, y)$ , vertical  $P(z)$  e do tempo  $f(t)$ .

$$\phi(x, y, z, t) = U(x, y)P(z)f(t) \quad (3.14)$$

Levando equação (3.14) na equação (3.7), e após algumas manipulações algébricas; vem:

$$\frac{-\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2}{U(x,y)} = \frac{\partial^2 P/\partial z^2}{P(z)} \quad (3.15)$$

ou, de forma simplificada:

$$\frac{-\nabla^2 U}{U} = \frac{P''}{P} = m^2 \quad (3.16)$$

em que a constante  $m$  têm significado físico para as soluções no caso de movimento de onda ( $m$  real e  $m^2$  positivo).

A equação (3.16) é transformada em:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right)P = 0 \quad (3.17a)$$

$$(\nabla^2 + m^2)U = 0 \quad (3.17b)$$

### 3.2.2 Movimento da onda ao longo do eixo vertical - z

Para se determinar a função solução da equação (3.17a), escreve-se da seguinte forma:

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - m^2 P(z) = 0 \quad (3.18)$$

cuja solução tem a forma:

$$P = Ae^{mz} + Be^{-mz} \quad (3.19)$$

onde as constantes  $A$  e  $B$  são determinadas pelas condições de contorno na parte inferior do tanque equação (3.10)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0 \quad (3.20)$$

Aplicando a condição de contorno equação (3.20) na solução equação (3.19), o resultado é:

$$Ae^{-mH} = Be^{+mH} = \frac{1}{2}D \quad (3.21)$$

A fim de simplificar a solução original equação (3.19), multiplica-se seu lado direito por  $e^{-mH}e^{+mH}$

$$P = Ae^{m(z+H)}e^{-mH} + Be^{-m(z+H)}e^{+mH} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.21) em (3.22), chega-se a:

$$P = \frac{1}{2}D(e^{m(z+H)} + e^{-m(z+H)}) = D\cosh(m(z+H)) \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) na expressão para a função potencial  $\phi$ , (3.14):

$$\phi(x, y, z, t) = D\cosh(m(z+H))U(x, y)f(t) \quad (3.24)$$

Desta forma, obtém-se a função potencial de velocidades  $\phi$  que satisfaz as condições de contorno no fundo do reservatório.

### 3.2.3 Aplicação da condição de superfície livre

A solução no tempo é dada pela aplicação da condição de contorno da superfície livre (3.13) em  $z = 0$ , substituindo equação (3.24) em equação (3.13) tem-se:

$$\left[ Dm\sinh(m(z+H))Uf + \frac{1}{g}D\cosh(m(z+H))U\ddot{f} \right]_{z=0} = 0 \quad (3.25)$$

Logo,

$$\frac{\ddot{f}}{f} = \omega^2 = -gm\tanh(mH) \quad (3.26)$$

Se  $\omega^2 = gm\tanh(mH)$ , a solução para a função  $f$  é governada pela equação diferencial  $\ddot{f} + \omega f = 0$ , expressa como equação característica tem-se  $r^2 + \omega^2 = 0$ , onde  $r = \pm i\omega$

Desta forma

$$f = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} \quad (3.27)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dependentes das condições de contorno,  $\omega$  é a frequência  $2\pi/T$ , e  $T$  é o período da onda. Quando  $\beta = 0$ ; aplicando (3.27) em (3.24), a função potencial de velocidade  $\Phi$  apresenta a seguinte forma:

$$\Phi(x, y, z, t) = D \cosh(m(z + H)) U(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Sendo o coeficiente  $\alpha$  incluído na constante  $D$ . Uma vez que existe um número discreto infinito de valores para  $\omega_n$  e  $m_n$  que satisfazem a equação (3.26), rescrita como:

$$\omega_n^2 = m_n g \tanh(m_n H) \quad (3.29)$$

Assim a solução geral para  $\Phi$  é expressa como:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cosh(m_n(z + H)) U_n(x, y) e^{i\omega_n t + \theta_n} \quad (3.30)$$

onde  $\theta_n$  é o ângulo de fase. Substituindo (3.30) na equação dinâmica de superfície livre (3.11), linearizada em  $z = 0$ , e considerando somente a parte real, chega-se em:

$$\eta = \frac{-\omega D}{g} \cosh(mH) \text{sen}(\omega t) U(x, y) \quad (3.31)$$

A expressão para  $\Phi$  mostra-se mais conveniente quando substituir a amplitude  $\eta$  pela definição ( $aU$ ) na equação (3.31), desta forma ao deixar em evidencia  $a$ , obtem-se  $a = -(\omega D/g) \cosh(mH)$ , a continuação da expressão anterior deduzida, ao deixar em evidencia  $D$  chega-se

$$D = \frac{-ag}{\omega} \frac{1}{\cosh(mH)} \quad (3.32)$$

Logo, substituindo (3.32) em (3.28), tem-se:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{-ag \cosh(m(z + H))}{\omega \cosh(mH)} U(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

Por último substituindo a equação (3.29) na equação (3.33) leva a:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{-a\omega \cosh(m(z + H))}{m \sinh(mH)} U(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.34)$$

### 3.2.4 Solução geral da superfície livre no plano x-z

A equação diferencial (3.17b) um certo conjunto de soluções dependentes das condições de contorno, desta forma a equação (3.17b) é reescrita como:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) U = 0 \quad (3.35)$$

Como solução da equação (3.35) combinações  $e^{imx}$  e  $e^{-imx}$ , tal que a função solução  $U$  possa ser escrita como:

$$U = A' e^{imx} + B' e^{-imx} \quad (3.36)$$

Assumindo  $U = e^{-imx}$  e substituindo na equação (3.34) chega-se em

$$\Phi = \frac{-a\omega \cosh(m(H + z))}{m \sinh(mH)} e^{i(\omega t - mx)} \quad (3.37)$$

Ou considerando a parte real,

$$\Phi = \frac{-a\omega \cosh(m(H + z))}{m \sinh(mH)} \cos(\omega t - mx) \quad (3.38)$$

A equação (3.38) é a função potencial de velocidade para uma onda progressiva na direção horizontal do eixo  $x$  positivo. Se  $U = e^{imx}$ , a função potencial de velocidade  $\emptyset$  corresponde a uma onda indo na direção horizontal eixo  $x$  negativo.

Se a solução para  $U$  é do tipo:

$$U = \frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx}) = \cos(mx) \quad (3.39)$$

ou,

$$U = \frac{1}{2i}(e^{imx} - e^{-imx}) = \text{sen}(mx) \quad (3.40)$$

Então; substituindo a expressão solução completa da função  $U(x, y)$  tem-se:

$$\emptyset_n = \frac{-a\omega_n \cosh(m_n(H+z))}{m_n \sinh(m_n H)} \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} (m_n x) \cos(\omega_n t) \quad (3.41.a)$$

Uma vez conhece-se as expressões para as funções  $P(z)$ ,  $f(t)$  e  $U(x, y)$  pode-se definir completamente a equação (3.24) agora como (3.41), e também pode-se obter a definição completa da equação (3.31) agora como (3.41.b)

$$\eta_n = \frac{-\omega_n D}{g} \cosh(m_n H) \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} (m_n x) \cos(\omega_n t) \quad (3.41.b)$$

O objetivo da formulação apresentada até o momento, foi deduzir a expressão matemática completa no sistema cartesiano  $x, y, z, t$  da função frequência natural *sloshing*  $\omega$ , função potencial de velocidades  $\emptyset$  e função elevação de superfície livre  $\eta$ .

Na Figura 3.2 apresenta-se a Equação (4.41.b) como uma onda fundamental  $n = 1$  e antissimétrica  $m_{(n=1)} = (2n - 1)\pi/L = \pi/L$ , avaliada em  $z = 0$ , para um tanque de geometria

retangular de dimensões  $L = 0,29 \text{ m}$ ,  $H = 0,1428 \text{ m}$ . (Tanque do experimento da bancada *sloshing* Capítulo 5).

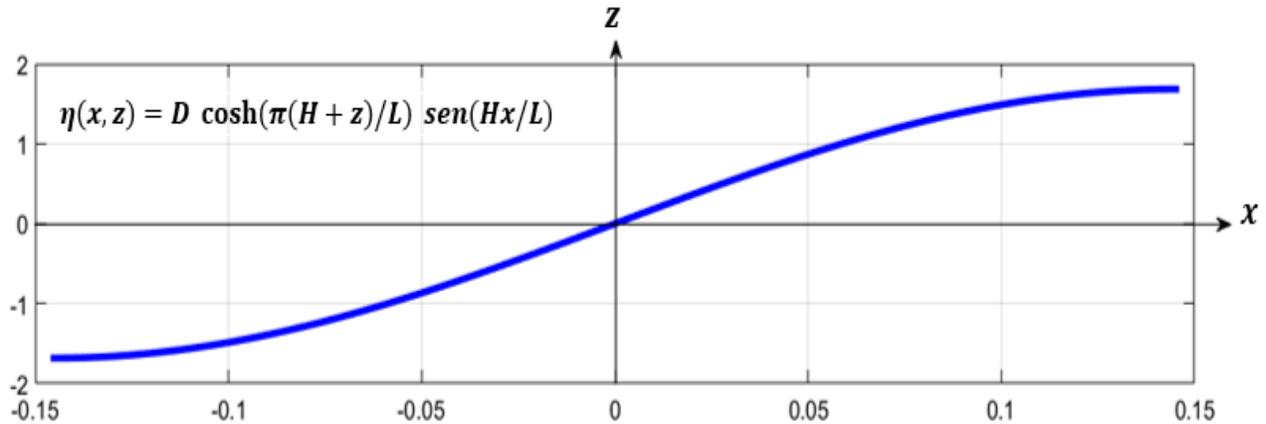


Figura 3.2 – Forma da superfície livre no modo fundamental antissimétrico.

### 3.2.5 Discussão sobre o parâmetro $m_n$

O parâmetro  $m_n$  define a distribuição da forma da onda de superfície no interior do reservatório finito de geometria retangular, neste trabalho estudado. Esta distribuição pode ser de forma simétrica ou antissimétrica.

Para a Figura 3.3 a expressão para o parâmetro  $m_n$  apresenta-se como  $(2n - 1)\pi/L$ , para o modo de vibração  $n = 1$  a onda tem amplitude zero em  $x = 0$ , um pico positivo numa parede, e um pico negativo na outra parede, este é o modo fundamental antissimétricos da onda, para  $n > 1$ , há picos intermediários, o número de picos aumenta com o modo de vibração. Na Figura 3.2 também esquematiza-se o deslocamento do centro de massa c.m. para cada modo. O deslocamento ou mudança do centro de massa para o modo fundamental  $n = 1$  é substancialmente maior que dos outros modos para a mesma amplitude máxima de onda. Sendo a oscilação do centro de massa a responsável pelas forças induzidas pelo líquido *sloshing*, a onda para o modo  $n = 1$  produz uma força muito maior do que qualquer outro modo.

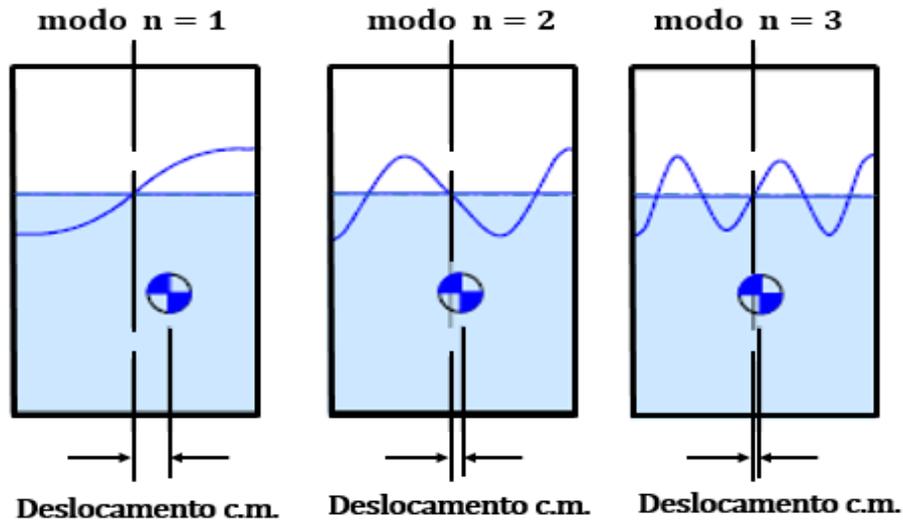


Figura 3.3 – Forma de onda *sloshing* para os três primeiros modos anti-simétricos na direção  $x$  de um tanque retangular. Modificado (DODGE, 2000).

Para a Figura 3.4 a expressão para o parâmetro  $m_n$  apresenta-se como  $2n\pi/L$ , sendo o modo de vibração e a frequência natural simétrica, caracterizados por serem modos e frequências mais altas que as antissimétricas, e por não apresentar deslocamento do centro de massa, a Figura 3.3 apresenta os primeiros modos deste tipo.

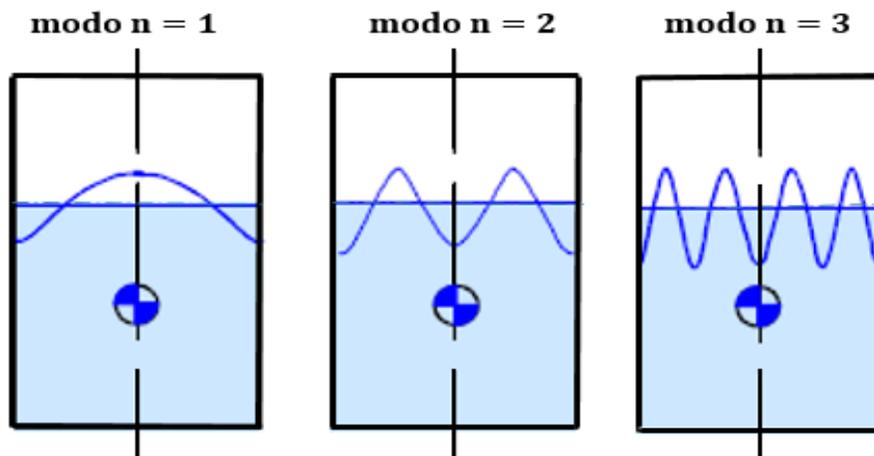


Figura 3.4 – Forma de onda do *sloshing* para os três primeiros modos simétricos de um tanque retangular. Modificado (DODGE, 2000).

Ao aplicar esta definição  $m = 2\pi/L$  na equação (3.29), tem-se:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \quad (3.42)$$

Logo, a velocidade da onda pode ser calculada como:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{H}{L}\right) \quad (3.43)$$

ou ainda

$$c = \frac{g}{\omega} \tanh\left(2\pi \frac{H}{L}\right) = \frac{g}{\omega} \tanh\left(\frac{\omega H}{c}\right) \quad (3.44)$$

Para  $\omega H/c < 1$  ou  $H/L \ll 1$ , temos um problema de águas rasas, ou seja,  $\tanh(\omega H/c) \cong \omega H/c$

Logo:

$$c = \sqrt{gH} \text{ e } L = T\sqrt{gH} \quad (3.45)$$

Quando  $\omega H/c > 1$  ou  $H/L > 1$ , temos um problema de águas profundas,  $\tanh(\omega H/c) \approx 1$

Logo,

$$c = gT/2\pi \text{ e } L = gT^2/2\pi \quad (3.46)$$

Na Tabela 3.1 a seguir apresentam-se os intervalos do parâmetro razão de aspecto em que regem as teorias de ondas de água.

Tabela 3.1 – Resumo das teorias de ondas de água.

	Águas Profundas	Águas Intermediárias	Águas Rasas
<b>Teoria</b>	$\frac{H}{L} > 0,5$	$0,5 > \frac{H}{L} > 0,05$	$\frac{H}{L} < 0,05$
<b>Frequência natural antissimétrica e simétrica</b>	$\omega = \sqrt{g\pi/L}$	$\omega = \sqrt{(\pi g/L) \tanh(\pi H/L)}$	$\omega = \sqrt{gH(\pi/L)^2}$
	$\omega = \sqrt{2g\pi/L}$	$\omega = \sqrt{(2\pi g/L) \tanh(2\pi H/L)}$	$\omega = \sqrt{gH(2\pi/L)^2}$
<b>Período antissimétrico e simétrico</b>	$T = 2\sqrt{\frac{\pi L}{g}}$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh(\frac{\pi H}{L})}}$	$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$
	$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\pi g}{L} \tanh(\frac{2\pi H}{L})}}$	$T = \frac{L}{\sqrt{gH}}$

### 3.3 Vibração forçada (VF) do *sloshing* lateral

Para determinação dos parâmetros equivalentes do *sloshing* é necessário conhecer as forças hidrodinâmicas que agem sobre as paredes do reservatório, Para isto assumem-se paredes rígidas, e condições linearizadas de onda de superfície livre sob a suposição de pequena amplitude de excitação e pequena amplitude na resposta do fluido. O sistema é submetido a uma excitação senoidal lateral  $x(t) = X_0 \text{sen} \Omega t$ , como mostra a Figura 3.5. Esta formulação foi desenvolvida a partir de (DODGE, 2000; IBRAHIM, 2005; GRAHAM e RODRIGUES, 1952). Com a suposição de esforços viscosos insignificantes, a única condição a ser imposta na parede do tanque é que a velocidade da partícula de líquido perpendicular ao plano da parede deve ser igual, à velocidade  $V_n$  da parede do tanque na direção normal.

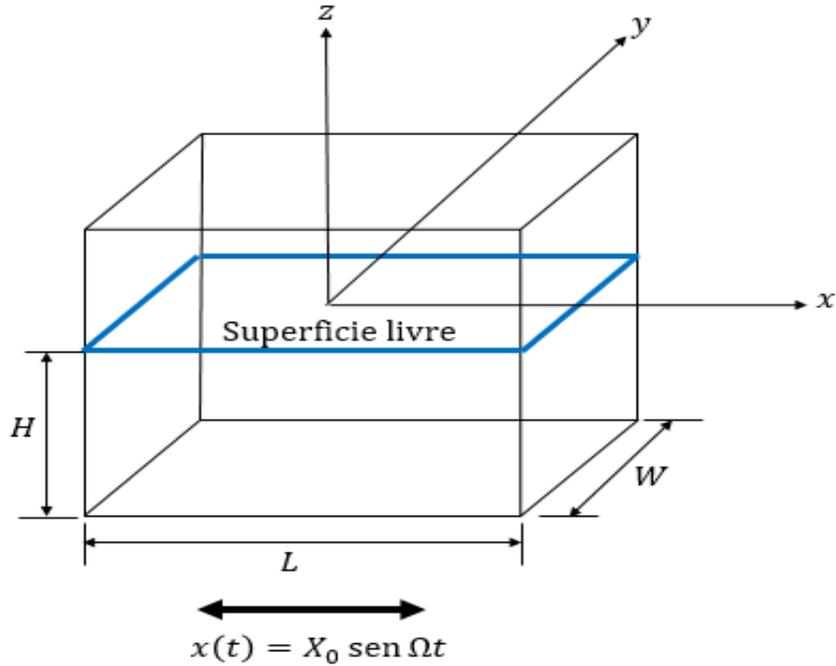


Figura 3.5 – Tanque retangular sob excitação lateral senoidal.

Para a análise de vibração forçada do *sloshing* lateral, supõe-se que o tanque está oscilando para frente e para atrás, este movimento é definido como a soma de duas funções potenciais de velocidade, uma que representa o movimento do tanque como corpo rígido  $\tilde{\phi}$ , e outra que define o movimento do líquido relativo as paredes do tanque  $\phi$ . Desta forma a nova função potencial de velocidades do sistema é  $\Phi = \tilde{\phi} + \phi$ . Ao substituir esta função na condição de contorno de superfície livre equação (3.13) chega-se em:

$$\frac{\partial^2(\tilde{\phi}+\phi)}{\partial t^2} + \frac{g\partial(\tilde{\phi}+\phi)}{\partial z} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \ddot{\tilde{\phi}} + \frac{g\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (3.47a)$$

A variação do movimento do tanque como corpo rígido na direção horizontal pode ser expressada como  $\partial\tilde{\phi}/\partial x = \dot{X}$ . Integrando em função de  $x$ , tem-se  $\int \partial\tilde{\phi}/\partial x = \int \dot{X} dx$  que equivale a,

$$\tilde{\phi} = \dot{X}x \quad (3.47b)$$

Posteriormente ao substituir 3.47b em 3.47a chega-se na condição de contorno de superfície livre submetida a um forçamento

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\ddot{X}x \quad (3.48)$$

Da avaliação da função potencial  $\Phi$ , na condição de contorno dinâmica de superfície livre com forçamento equação (3.48), obtém-se:

$$\phi = -X_0 \Omega \cos \Omega t \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} \left( (2n-1) \frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{cosh} \left( (2n-1) \frac{\pi(z+H)}{L} \right)}{\pi^2 (2n-1)^2 \cos \left( (2n-1) \frac{\pi H}{L} \right)} \frac{4L\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right] \right] \quad (3.49)$$

Em que  $\omega_n^2 = (2n-1)\pi(g/L)\tanh((2n-1)\pi(H/L))$  é o quadrado da frequência natural da superfície livre do fluido. A elevação da onda de superfície livre é determinada substituindo a equação (3.49) na condição cinemática de movimento, equação (3.11).

$$\eta = \frac{-X_0 \Omega^2}{g} \operatorname{sen} \Omega t \left[ x - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} 4L}{\pi^2 (2n-1)^2} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \operatorname{sen} \left( (2n-1) \frac{\pi x}{L} \right) \right] \right] \quad (3.50)$$

A pressão em algum ponto ao interior do domínio do fluido, desprezando a pressão hidrostática ( $\rho g z$ ) é:

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.51)$$

$$\rho X_0 \Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} \left( (2n-1) \frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{cosh} \left( (2n-1) \frac{\pi(z+H)}{L} \right)}{\pi^2 (2n-1)^2 \operatorname{cosh} \left( (2n-1) \frac{\pi H}{L} \right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right]$$

A pressão hidrodinâmica em qualquer ponto da parede,  $x = L/2$ , é:

$$p_{par} = \rho X_0 \Omega^2 \text{sen} \Omega t \left[ \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} \cosh \left( (2n-1) \frac{\pi(z+H)}{L} \right)}{\pi^2 (2n-1)^2 \cosh \left( (2n-1) \frac{\pi H}{L} \right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right] \quad (3.52)$$

A pressão hidrodinâmica em qualquer ponto sobre o fundo,  $z = -H$ , é:

$$p_{fundo} = \rho X_0 \Omega^2 \text{sen} \Omega t \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} \text{sen} \left( (2n-1) \frac{\pi x}{L} \right)}{\pi^2 (2n-1)^2 \cosh \left( (2n-1) \frac{\pi H}{L} \right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right] \quad (3.53)$$

A força total hidrodinâmica exercida pelo fluido sob as paredes do reservatório é determinada pela integração da pressão sobre a área completa das paredes,  $y \in \pm W/2$ , e  $z \in [-H, 0]$

$$F_{xw} = 2 \int_{-H}^0 dz \int_{-W/2}^{W/2} p_w dy$$

$$\frac{F_{xw}}{m_f X_0 \Omega^2} = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{8 \tanh \left( (2n-1) \frac{\pi H}{L} \right)}{(H/L) \pi^3 (2n-1)^3} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right] \quad (3.54)$$

em que  $m_f = \rho LWH$ , é a massa do volume total de fluido. As soluções em VL e VF são necessárias para poder realizar a transformação em modelos mecânicos discretos equivalentes.

Como pode-se apreciar até aqui, o fenômeno *sloshing* fundamenta-se numa intrincada formulação matemática, o que justifica o uso da técnica de modelos mecânicos equivalentes de *sloshing* a qual substitui conceitualmente o líquido no interior do reservatório por modelos mecânicos discretos de comportamento conhecido do tipo massa-mola e pêndulo.

### 3.4 Modelos mecânicos equivalentes

O líquido *sloshing* pode ser bem representado mediante modelos mecânicos equivalentes no formato pêndulo ou massa-mola. Para modelar um ALS (tanque parcialmente preenchido com líquido) é preciso duas massas. A primeira massa conhecida como massa impulsiva, denominada  $m_0$  corresponde a porcentagem do líquido que fica no fundo do tanque, não ajuda no processo do controle

e é somada a massa da estrutura principal. Atua como uma massa rígida fixada às paredes do tanque no fundo, como indica-se na Figura 3.6 (b) e (c).

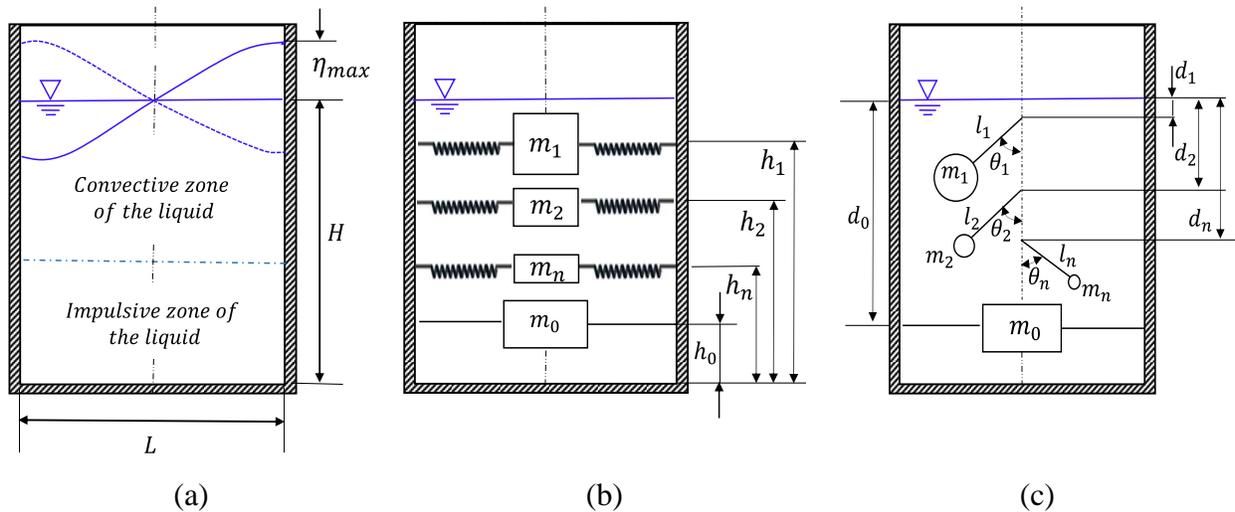


Figura 3.6 – Modelos mecânicos equivalentes de *sloshing*:

(a) *Sloshing* lateral em um container retangular. (b) Modelo mecânico equivalente tipo massa-mola composto por uma massa fixa  $m_0$  e sistemas moveis massa-mola, massas  $m_i = (i = 1 \dots n)$  e molas com rigidez  $k_i = (i = 1 \dots n)$ . (c) Modelo mecânico equivalente tipo pêndulo, composto por uma massa fixa  $m_0$  e sistemas pêndulo, massas  $m_i = (i = 1 \dots n)$  com comprimento de cabo  $l_i = (i = 1 \dots n)$ .

Uma segunda massa oscilante denominada  $m_1$  conhecida como massa convectiva operando como um pêndulo ou massa-mola. Que modela o efeito oscilatório da superfície livre (ou líquido *sloshing*). Para modelar a frequência fundamental de superfície livre (ou *onda permanente*) usa-se um único sistema massa-mola, para frequências de vibração mais altas, é preciso incluir mais sistemas massa-mola. Altas frequências tem pouca importância para o controle estrutural, *ALSs* operam com baixas frequências. Os parâmetros modais tais como  $m_1$ ,  $k_1$ ,  $l_1$  and  $m_0$  são determinados como uma função da razão de aspecto do tanque  $H/L$ . Na Figura 3.6 detalha-se a posição das massas e os dois tipos de modelos discretos de *sloshing*.

Para o modelo mecânico equivalente no formato massa-mola da Figura 3.6 (b),  $h_0$  corresponde à altura da massa impulsiva,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_n$  correspondem as alturas das massas convectivas, todas as alturas medidas com respeito ao fundo. Para o modelo mecânico equivalente no formato

pêndulo da Figura 3.6 (c),  $d_0$  corresponde a profundidade da massa impulsiva,  $d_1, d_2, d_n$  correspondem as profundidades dos cabos dos pêndulos, medidos agora desde a superfície do líquido,  $n$  corresponde ao número de massas convectivas (ou massas discretas) utilizadas no modelo e que estão relacionadas com frequências de vibração elevadas quando  $n > 1$ . As frequências fundamentais naturais do reservatório quando só uma massa convectiva é analisada são  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$  e  $\omega_1 = \sqrt{g/l_1}$  respectivamente.

As expressões analíticas para a massa e rigidez equivalentes associadas com o sistema massa-mola podem ser determinadas pelas equações apresentadas a seguir segundo Graham e Rodriguez (1952) apud Dodge (2000).

Aplicando o princípio de conservação da massa. O somatório de todas as massas deve ser igual à massa líquida contida no tanque definida como  $m_f$ , dessa forma:

$$m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n = m_f \quad (3.55)$$

O centro de gravidade do modelo equivalente deve ser o mesmo do problema real. A equação (3.55) precisa das propriedades dinâmicas, para conseguir reproduzir as forças do *sloshing* nas paredes do reservatório. Desta forma, pode-se estabelecer a igualdade da frequência natural do *slosh* para o modo  $n$ , como:

$$m_n/k_n = \omega_n^2 \quad (3.56)$$

Usando a segunda lei de Newton, é possível obter a equação do movimento para cada massa discreta:

$$m_n(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_n) = k_n x_n \quad (3.57)$$

As forças restauradoras que aparecem são devido as molas acopladas às massas discretas, e a movimentação é causada por uma excitação de base cujo deslocamento é representado por  $x_0$ . A força total exercida sobre o tanque, deve-se igualar ao oposto das forças aplicadas em cada massa.

$$F = -m_0 \ddot{x}_0 - \sum m_n (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_n) \quad (3.58)$$

Como assume-se que as soluções são harmônicas no tempo, a coordenada  $x_0$  pode ser expressa por  $-X_0 e^{i\Omega t}$  onde  $X_0$  representa a amplitude de oscilação do deslocamento da massa rígida. A coordenada  $x_n$  por  $X_n e^{i\Omega t}$ , com  $X_n$  representando a amplitude de oscilação do deslocamento de cada massa discreta. Substituindo na equação (3.57), obtém-se:

$$X_n = \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} X_0 \quad (3.59)$$

Assim, obtém-se uma expressão para a amplitude de oscilação de cada massa em função da amplitude de deslocamento do tanque. A expressão para a força gerada pelas forças de inércia reversiva do movimento das massas discretas é,

$$\frac{F_0}{m_f \Omega^2 X_0} = \left( 1 + \sum \frac{m_n}{m_f} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \quad (3.60)$$

Na Figura 3.7 apresenta-se a função de resposta em frequência FRF obtida pelo modelo contínuo mediante a teoria do potencial de velocidades equação (3.54) comparada a FRF do modelo gerado pelas massas discretas equação (3.60). A primeira amplitude da resposta forçada na Figura 3.7 corresponde ao modo fundamental de *sloshing* com frequência igual a  $9,8 \text{ rad/s}$ , conforme resultados experimentais da Tabela 5.1 apresentada no Capítulo 5 para uma altura de líquido igual a  $H = 0,1428 \text{ m}$ .

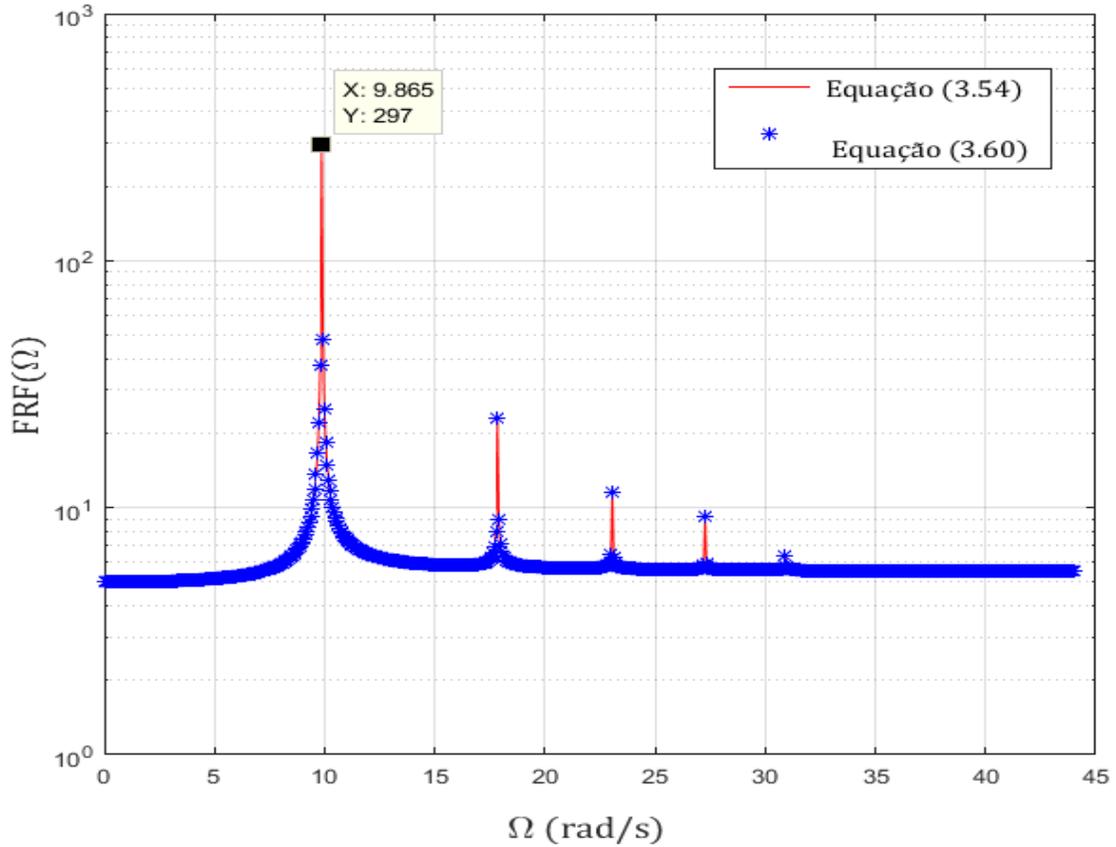


Figura 3.7 – Comparação da função de resposta em frequência (FRF) obtida pelo modelo contínuo em linha vermelha e modelo discreto equivalente em asterisco azul.

Comparando-se a força lateral exercida sob o tanque pelo líquido *sloshing* equação (3.54), com a expressão obtida pela força do modelo mecânico equivalente massa-mola sobre as paredes do tanque equação (3.60), obtém-se a seguinte igualdade:

$$m_n = \frac{8 \tanh((2n - 1) \pi H / L)}{\pi^3 (2n - 1)^3} m_f \quad (3.61)$$

Ao substituir a expressão da massa equivalente, equação (3.61), na expressão da frequência natural do modelo discreto, equação (3.56), obtém-se uma expressão para rigidez da mola equivalente:

$$k_n = \omega_n^2 m_n = 8 \left( \frac{g}{H} \right) \frac{\tanh^2((2n-1)\pi(H/L))}{\pi^2(2n-1)^2} m_f \quad (3.62)$$

Com base na premissa fundamental que os modelos discretos no formato massa-mola e pêndulo são equivalentes, pode-se estabelecer a igualdade a seguir:

$$\omega_n = \sqrt{k_n/m_n} = \sqrt{g/l_n} \quad (3.63)$$

Assim da equação (3.63) é possível obter uma expressão para o comprimento do cabo equivalente  $l_n$  como:

$$l_n = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{L}{(2n-1)\pi \tanh((2n-1)\pi H/L)} \quad (3.64)$$

De acordo com as propriedades de conservação da massa de fluido no tanque, Da equação (3.55) pode-se obter a expressão para a quantidade de massa líquido impulsivo que permanece no fundo do tanque:

$$m_0 = \left[ 1 - 8 \frac{H}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh((2n-1)\pi H/L)}{(2n-1)^3} \right] m_f \quad (3.65)$$

Os parâmetros mecânicos equivalentes  $m_n$  e  $m_0$  definem a quantidade de massa que transporta a onda de superfície livre ou líquido *sloshing* e a quantidade de massa que permanece no fundo do tanque, ambas em relação à massa total de líquido  $m_f$  contido no tanque. Desta forma, ambas as massas representam uma porcentagem da massa total de líquido. Ibrahim (2005) apresenta curvas de variação de  $m_n/m_f$  e  $m_0/m_f$  em relação a razão de aspecto  $H/L$ , conforme Figura 3.8.

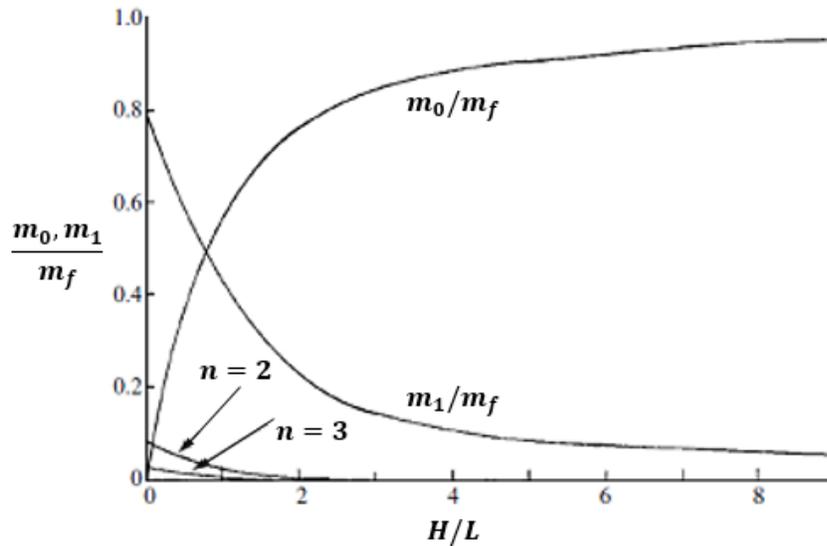


Figura 3.8 – Razão de massas pela razão de preenchimento. (IBRAHIM, 2005)

Na Figura 3.8 observa-se que quando a razão de aspecto fica maior a porcentagem de líquido de onda de superfície livre fica menor. Caso contrário acontece para a porcentagem de líquido do fundo do reservatório, a qual é menor para razões de aspecto menores e maior para razões de aspecto maiores.

A Tabela 3.2 a seguir, resume os parâmetros equivalentes que foram apresentados.

Tabela 3.2 – Parâmetros tanque retangular

Parâmetro	Valor
Massa <i>slosh</i> $m_n$	$\left( 8 \frac{L}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi H/L]}{\pi^3(2n-1)^3} \right) m_f$
Massa rigidamente anexa $m_0$	$\left( 1 - 8 \frac{L}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi H/L]}{\pi^3(2n-1)^3} \right) m_f$
Constante da mola $k_n$	$8 \frac{g}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^2[(2n-1)\pi H/L]}{\pi^2(2n-1)^2} m_f$
Comprimento cabo pêndulo $l_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{\pi(2n-1)\tanh[(2n-1)\pi H/L]}$

As expressões analíticas dadas na Tabela 3.2 mostram que os parâmetros do modelo são função da geometria do tanque e do nível de preenchimento.

## 4. ACOPLAMENTO *SLOSHING* – ESTRUTURA

Neste capítulo apresentam-se reservatórios parcialmente preenchidos com líquido, empregados como dispositivos de controle de vibração passiva melhor conhecidos na literatura especializada como absorvedores líquidos sintonizados (ALS), Inicialmente são expostos os conceitos fundamentais de absorvedores dinâmicos sintonizados (AMS), a seguir apresenta-se a formulação analítica do pêndulo de Cooker (1994) onde se detalha o movimento oscilatório de um pêndulo acoplado ao efeito da onda de superfície livre de um líquido contido num reservatório de geometria retangular. Por último apresenta-se o pêndulo de Cooker modelado pela técnica de massa equivalente como um pêndulo duplo deduzido pela formulação Newtoniana e Lagrangeana.

### 4.1 Controle de vibração

O controle de vibração busca intervir no comportamento de um sistema dinâmico (estrutura principal) com o objetivo de reduzir seu nível vibratório. Os absorvedores dinâmicos de vibração são um tipo de dispositivo adicional de controle de vibração passivo. Na Figura 4.1 faz-se uma breve introdução de modelos equivalentes de *sloshing*, ao se realizar a transformação do modelo contínuo original do tanque de água, para um modelo mecânico do tipo massa-mola.

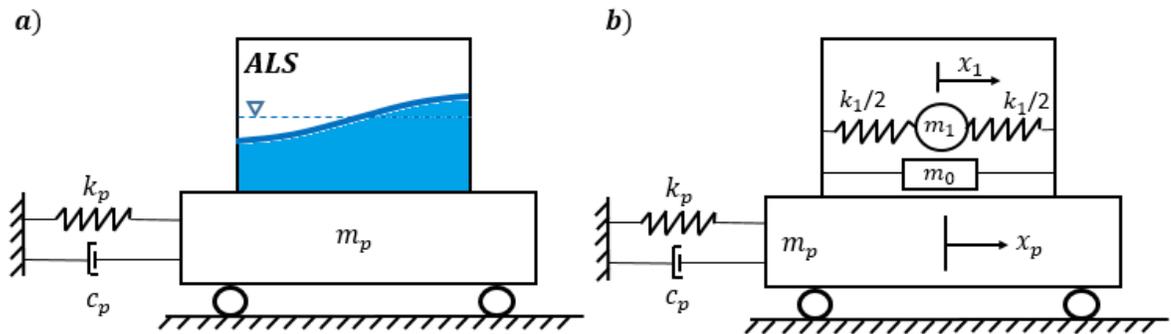


Figura 4.1 – Estrutura principal com AMS (a) Sistema estrutura + ALS, (b) Analogia modelo mecânico equivalente

A equação de movimento para o sistema da figura 4.1b é dado por:

$$\begin{bmatrix} (m_p + m_0) & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p(t) \\ \ddot{x}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \text{sen}(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

O sistema excitado por uma força harmônica, oscila de acordo com a frequência de vibração ( $\Omega$ ), e a solução para as coordenadas primária ( $x_p$ ) referente a estrutura e secundária ( $x_s$ ) referente a dispositivo adicional de controle, são da forma:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_p \\ X_1 \end{Bmatrix} \text{sen}(\Omega t) \quad (4.2)$$

onde  $X_p$  e  $X_s$  representam as amplitudes de vibração de cada coordenada. Aplicando essas soluções na equação (4.1), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} k_p + k_1 - (m_p + m_0)\Omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 - m_1\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

A solução do sistema linear, resulta nas amplitudes de vibração dos sistemas principal e secundário.

$$X_p = \frac{(k_1 - m_1\Omega^2)F_0}{(k_p + k_1 - (m_p + m_0)\Omega^2)(k_1 - m_1\Omega^2) - k_1^2} \quad (4.4)$$

$$X_1 = \frac{k_1 F_0}{(k_p + k_1 - (m_p + m_0)\Omega^2)(k_1 - m_1\Omega^2) - k_1^2} \quad (4.5)$$

Com a obtenção dessas expressões de amplitude de vibração, e lembrando que a frequência natural de cada sistema é dada pela raiz da rigidez associada pela massa, tem-se:

$$X_p = \frac{1 - (\Omega/\omega_s)^2}{\left[1 + \mu(\omega_1/\omega_p)^2 - (\Omega/\omega_p)^2\right] \left[1 - (\Omega/\omega_1)^2\right] - \mu(\omega_1/\omega_p)^2 k_p} \frac{F_0}{k_p} \quad (4.6)$$

$$X_1 = \frac{F_0/k_p}{\left[1 + \mu(\omega_1/\omega_p)^2 - (\Omega/\omega_p)^2\right] \left[1 - (\Omega/\omega_1)^2\right] - \mu(\omega_1/\omega_p)^2} \quad (4.7)$$

onde  $\mu = m_1/(m_p + m_0)$  representa a razão de massas entre o absorvedor e o sistema principal. O dispositivo ALS estudado, comporta-se de maneira análoga ao modelo do absorvedor dinâmico de vibrações genérico AMS. A diferença reside em mudar uma massa sólida por uma massa líquida, com a qual é necessária uma abordagem fluido - dinâmica para descrever o comportamento do fluido e

aplicar na teoria descrita nesta seção. A equação (4.6) é representada graficamente segundo Rao (2010), na Figura 4.2.

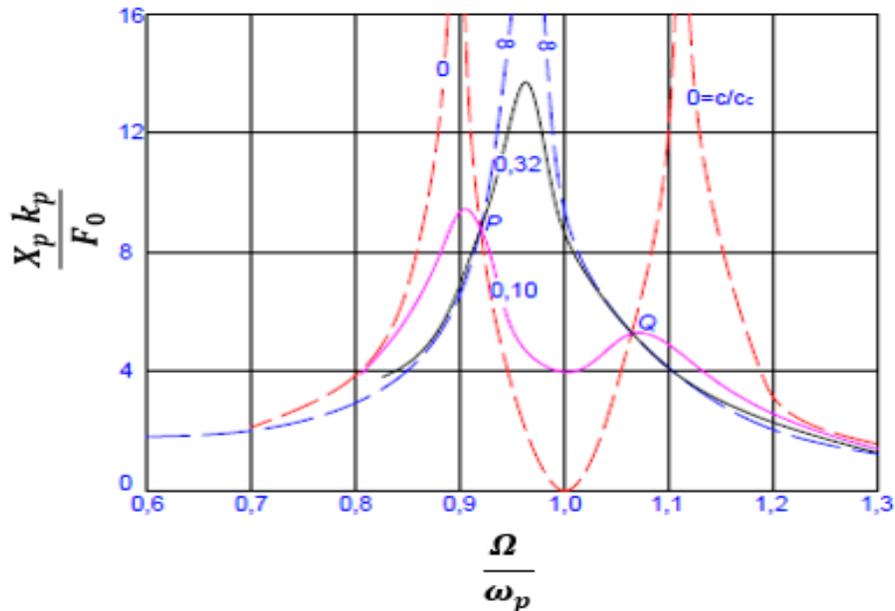


Figura 4.2 – Amplitude de vibração para massa principal com AMS. Modificado (RAO, 2010)

A função de amplitude em relação às razões de massa e frequências na equação (4.6) obtidas para o ALS acoplado a uma estrutura será o foco de estudo no capítulo 6, com a finalidade de minimizar esta função, para obter as dimensões geométricas que definem um ALS ótimo.

#### 4.2 Pêndulo de Cooker (P.d.C)

Inicia-se esta seção fazendo referência as diferentes formas para a modelagem de tanques parcialmente preenchidos com líquidos, isto baseado na condição da altura do líquido no interior em relação ao lado do reservatório. Le Méhauté (1976) define para a teoria linear de ondas de água, que existem três diferentes classificações (a) águas profundas para ( $H/L > 0,5$ ), (b) águas intermédias ( $0,5 > H/L > 0,05$ ) e (c) águas rasas ( $H/L < 0,05$ ).

Cooker (1994) motivado pela observação da oscilação de um pêndulo acoplado ao efeito de um tanque preenchido com líquido em diferentes níveis como mostra a Figura 4.3, e baseado na suposição de pequenos deslocamentos, usou equações de águas rasas linearizadas para modelar o movimento do líquido e obter soluções temporais para o sistema cujos períodos são governados por uma relação transcendental. A seguinte formulação é fundamentada no trabalho de Cooker (1994).

Considerando o tanque isolado da Figura 4.3 como o primeiro sistema a ser analisado, é definido em um referencial inercial  $(x, y)$ , onde a coordenada horizontal é  $x$ , quando  $x = 0$ , o tanque está em posição de equilíbrio. O eixo  $y$  é direcionado verticalmente e quando  $y = 0$ , o líquido no interior está em repouso. O tanque tem comprimento  $L$  e um deslocamento  $X(t)$ , de modo que as paredes finais ficam em  $x = \pm d + X(t)$ , onde  $d = L/2$ .

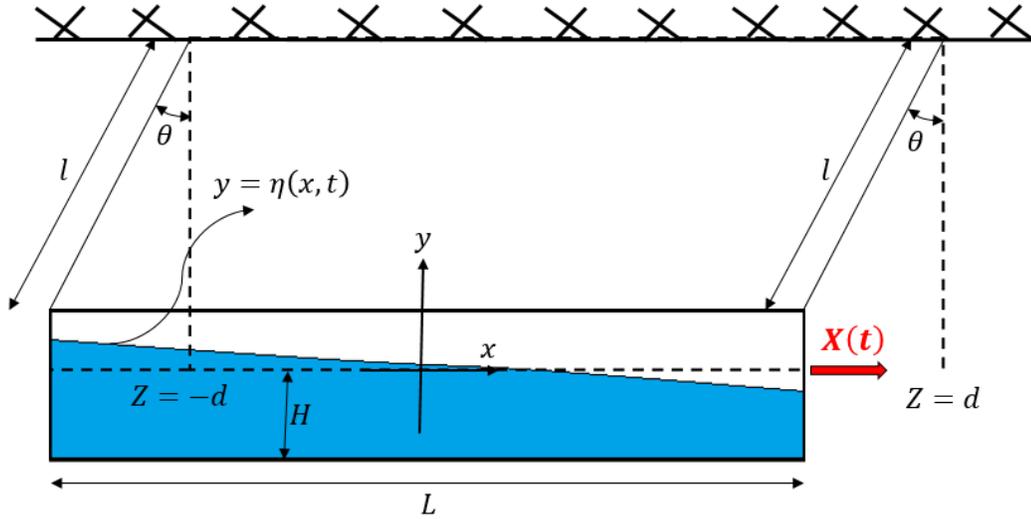


Figura 4.3 – Pêndulo de Cooker (COOKER, 1994).

O tanque vazio tem massa  $m$ . O líquido contido tem massa  $M = \rho LHW$  onde  $\rho$  é a massa específica do líquido e  $W$  é a largura do tanque. O tanque atua por duas forças. A primeira é a componente horizontal da tensão nos suportes, que juntos dão uma força restauradora igual a  $(M + m)gX/l$  no tanque, direcionando-o para a posição de equilíbrio em  $x = 0$ , sendo  $g$  é a gravidade local.

A segunda força é o carregamento da onda sobre as paredes do tanque, a qual, ao se supor pequenos deslocamentos na direção horizontal, e se-desprezar os deslocamentos na direção vertical, pode ser aproximada com a pressão hidrostática segundo a expressão  $\rho g(\eta - y)$  para uma posição do nível do líquido com coordenadas  $y \leq \eta$ . Desta forma, a equação de movimento do sistema pêndulo-*sloshing* tanque é dada por:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -(M + m)g \frac{X}{l} + \left[ W \int_{-H}^{\eta} \rho g(\eta - y) dy \right]_{x=-d}^{x=d} \quad (4.8)$$

Se a condição de linearidade da superfície livre  $\eta/H$  é pequeno, a equação de movimento é aproximadamente:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\varphi^2 X + \frac{\rho g b H}{m} (\eta(d, t) - \eta(-d, t)) \quad (4.9)$$

onde  $\varphi^2 = (1 + 1/R) g/l$  e  $R = m/M$ . Substituindo o deslocamento da superfície livre  $\eta(x, y)$  apresentado em Cooker (1994), formado pela soma da resposta transiente parte inicial e permanente (parte final) para ondas simétricas e assimétrica como apresenta-se a seguir,

$$\eta = HkX_0 \exp(i\omega t) \frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kd)} + i\sqrt{H/g} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{sen}(v_n x) \exp(i\omega_n t) + b_n \text{sen}(\mu_n x) \exp(i\sigma_n t)] \quad (4.10)$$

Em que  $X_0 = |X|$  é o deslocamento horizontal absoluto do nível de água nas paredes do tanque,  $H$  é a altura do líquido,  $\omega$  frequência circular,  $k = \omega/\sqrt{gH}$  é a relação de dispersão, assume-se  $kH$  pequeno,  $v_n = n\pi/d$ ,  $\omega_n = v_n\sqrt{gH}$ ,  $\mu_n = (n - 1/2)\pi/d$ , e  $\sigma_n = \mu_n\sqrt{gH}$ . Se o tanque é mantido fixo então  $X_0 = 0$ , então ondas estacionárias (*standing wave*) ocorrem. Os modos de superfície livre simétricos e antisimétricos têm números  $v_n = 2n\pi/L$ ,  $\mu_n = (2n - 1)\pi/L$ , respectivamente, onde  $n$  é um inteiro. O termo  $n = 1$  dá o modo fundamental com o período  $T_s = L/\sqrt{gH}$  na equação (4.9), tem-se:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\varphi^2 X + \frac{X_0 H k g}{R d} \tan(kd) \exp(i\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^n \exp(i\sigma_n t) \quad (4.11)$$

A solução geral para  $X$  é:

$$X(t) = B \exp(i\omega t) + C \exp(i\varphi t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(i\sigma_n t) \quad (4.12)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária,  $R = m/M = m/\rho W H L$ :

$$B = \frac{X_0 H k g \tan(kd)}{R d (\varphi^2 - \omega^2)} \quad (4.13)$$

e

$$D_n = \frac{ib_n\sqrt{gH}(-1)^n}{Rd(\varphi^2 - \sigma_n^2)} \quad (4.14)$$

A equação (4.12) é válida para  $\omega \neq \varphi$  e  $\varphi \neq \sigma_n$ , (soluções longe da condição de ressonância). Para estudar soluções periódicas, assume-se  $X(t) = X_0 \exp(i\omega t)$  como solução da equação (4.11); Para isto, os valores de  $C$  e  $D_n$  devem ser iguais a zero. Assim, fazendo uma apropriada escolha das condições iniciais em que  $B = X_0$  nas equações (4.12) e (4.13) chega-se numa condição para o número de onda,

$$\frac{G}{s} - Rs = \tan(s) \quad (4.15)$$

onde  $s = kd$ , e  $G = (1 + R)d^2/Hl$

A equação (4.15) possui solução gráfica, os dois lados são desenhados separadamente como apresenta-se na Figura 4.4, os interceptos entre as duas funções representam as raízes solução ( $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ). Onde estritamente para valores positivos de  $G$  e  $R$ , os valores solução encontram nos intervalos para  $s_1$  no intervalo  $0 < s_1 < \pi/2$  e para  $s_2$  no intervalo  $(n - 3/2)\pi < s_n < (n - 1/2)\pi$ . A raiz  $s_1$  corresponde ao comprimento de onda mais longo, para os quais os movimentos do tanque e da onda estão em fase. (A elevação da superfície acompanha a oscilação do pêndulo).

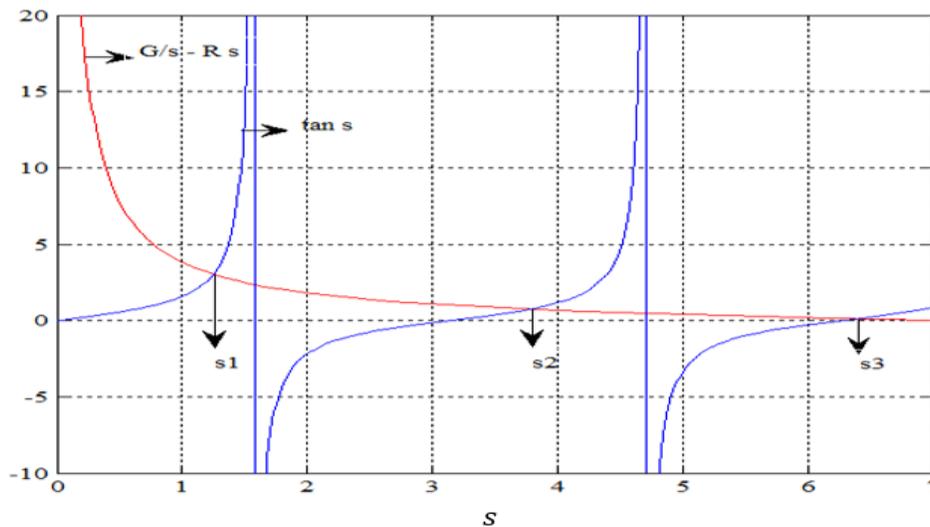


Figura 4.4 – Solução gráfica da equação (4.15).

A raiz  $s_2$  corresponde a comprimentos de onda mais curtos relacionados com altos modos de vibração. Isto é, são formas de superfície entre um e três nós: se há um nó então a superfície oscila em antifase com o tanque.

Como observa-se na Figura 4.4 o primeiro ponto intersecção entre as duas funções corresponde ao modo fundamental da onda de superfície. Os modos mais altos são menos importantes. O período fundamental do sistema acoplado é dado por

$$T = \pi L / (s \sqrt{gH}) \quad (4.16)$$

Comparando o período acoplado  $T$ , com o período natural de tanque vazio  $T_p = 2\pi\sqrt{g/l}$  de comprimento  $l$  (movendo-se como pêndulo simples) e o período fundamental da onda estacionária  $T_s = 2L/\sqrt{gH}$  (para tanque mantido fixo), Pode-se concluir como um resultado geral importante que quando o sistema acoplado oscila, seu período  $T$  é maior que  $T_p$  e  $T_s$ .

### 4.3 Modelo equivalente proposto para o pêndulo de Cooker

Esta seção apresenta as equações de movimento pelos métodos de Newton e Lagrange, conforme o modelo proposto do pêndulo de Cooker.

#### 4.3.1 Modelo pendular (Newton)

O modelo da Figura 4.5 representa a estrutura descrita como um pêndulo de pequenas amplitudes, devido a isso é possível considerar  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ ,  $\text{cos}(\theta) \approx 1$  e  $(\dot{\theta})^2 \approx 0$ .

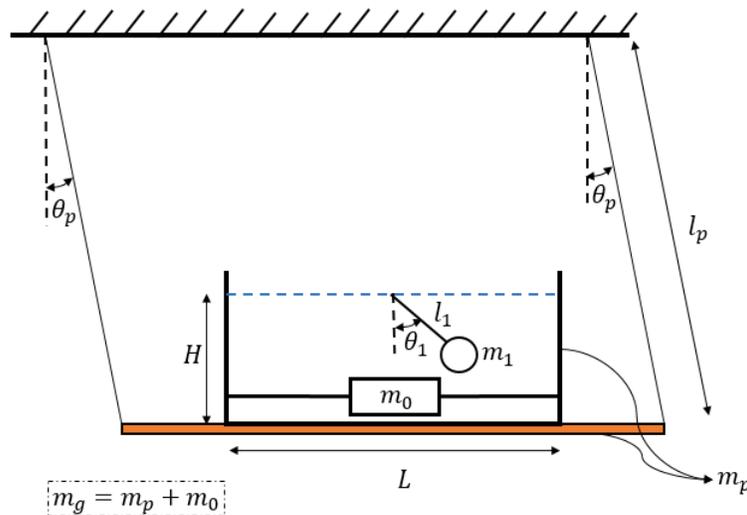


Figura 4.5 – *Sloshing* discreto tipo pêndulo acoplado a um pêndulo.

As equações de movimento para o sistema da Figura 4.5 possuem  $n + 1$  graus de liberdade (pêndulo principal +  $n$  massas equivalente discretas) utilizando a segunda lei de Newton tem-se:

$$\left(m_g + \sum_{n=1}^N m_n\right) l_p^2 \ddot{\theta}_p + l_p \sum_{n=1}^N m_n l_n \ddot{\theta}_n + \left(m_g + \sum_{n=1}^N m_n\right) l_p g \theta_p = F(t) \quad (4.17)$$

$$l_p \left(\sum_{n=1}^N m_n l_n\right) \ddot{\theta}_p + \sum_{n=1}^N m_n l_n^2 \ddot{\theta}_n + \left(g \sum_{n=1}^N m_n l_n \theta_n\right) = 0 \quad (4.18)$$

Na forma matricial podem ser reescritas na forma:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1) l_p^2 & m_1 l_1 l_p & m_2 l_2 l_p & \cdots & m_n l_n l_p \\ m_1 l_1 l_p & m_1 l_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ m_2 l_2 l_p & 0 & m_2 l_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n l_n l_p & 0 & 0 & \cdots & m_n l_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1) l_p g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n l_n g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

A Figura 4.6 mostra uma análise de convergência envolvendo modos mais elevados de *sloshing* (isto é, simulando a frequência natural do *sloshing* com um número maior de massa-molas ou pêndulos discretos). O modelo mecânico do pêndulo equivalente apresenta uma convergência mais rápida, para as duas primeiras massas convectivas.

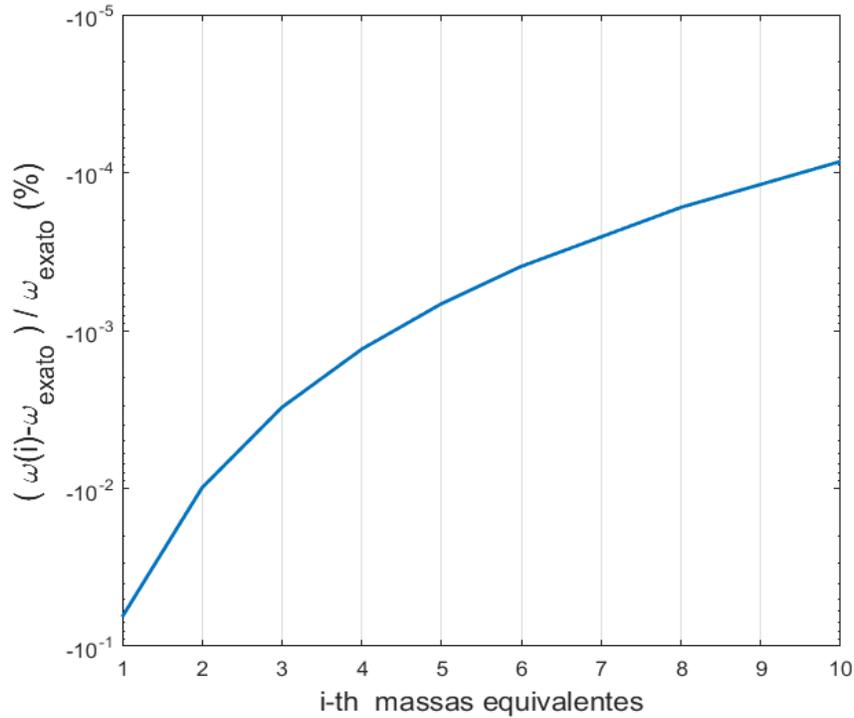


Figura 4.6 – Convergência da frequência de oscilação  $\omega_i$ (rad/s)do modelo discreto como função de  $i$ (th) massas equivalentes.

### 4.3.2 Modelo pendular (Lagrange)

Deduziram-se novamente as equações do movimento a partir da formulação de Lagrange, utilizando-se referências inerciais, em  $x$  e  $y$ . Apresenta-se o modelo baseado em energias segundo Rao (2010):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(E_c)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(E_c)}{\partial q_i} + \frac{\partial(E_p)}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.20)$$

Na equação (4.20),  $E_c$  representa a energia cinética,  $E_p$  a energia potencial,  $Q_i$  as forças externas generalizadas atuando sobre o sistema e  $q_i$  as coordenadas generalizadas do sistema. Para representar as forças externas, tem-se:

$$Q_i = \sum_k \left( F_{xj} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{yj} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{zj} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \quad (4.21)$$

O diagrama de corpo livre do sistema equivalente (Figura 4.5) apresenta-se a seguir na Figura 4.7:

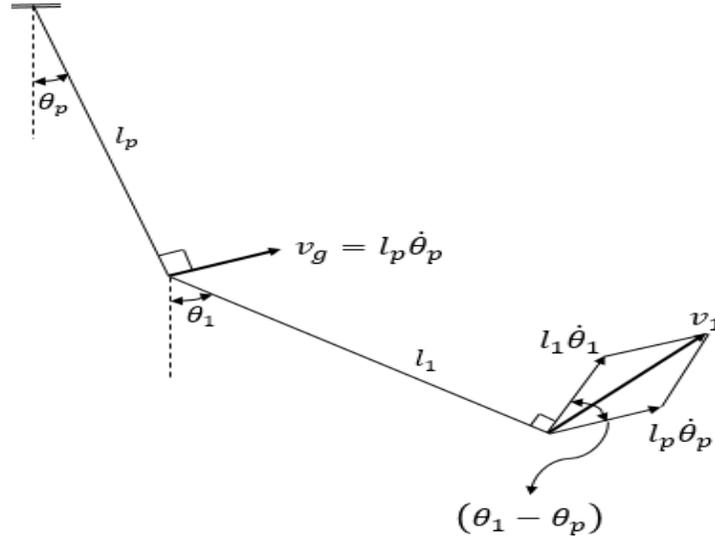


Figura 4.7 – Diagrama de corpo livre.

A partir das coordenadas no sistema, as equações para energia cinética e potencial respectivamente, são dadas por:

$$E_c = \frac{1}{2} m_g v_g^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (4.22)$$

onde  $v_g^2 = (l_p \dot{\theta}_p)^2$  e  $v_1^2 = (l_p \dot{\theta}_p)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + 2l_p l_1 \dot{\theta}_p \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_p)$  são as velocidades das massas  $m_g$  e  $m_1$  respectivamente como apresentado na Figura 4.5 e

$$E_p = m_g g l_p (1 - \cos \theta_p) + m_1 g [l_p (1 - \cos \theta_p) + l_1 (1 - \cos \theta_1)] \quad (4.23)$$

A partir das equações (4.22) e (4.23), calculam-se as derivadas parciais das equações (4.24) a (4.27) em relação as coordenadas generalizadas  $\theta_p$  e  $\theta_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial(K)}{\partial \dot{\theta}_p} &= \frac{d}{dt} \left[ m_g l_p^2 \dot{\theta}_p + m_1 \left( l_p^2 \dot{\theta}_p + l_p l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_p) \right) \right] \\ &= m_g l_p^2 \ddot{\theta}_p + m_1 l_p^2 \ddot{\theta}_p + m_1 l_p l_1 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial(K)}{\partial\theta_p} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial(P)}{\partial\theta_p} = m_g g l_p \text{sen}\theta_p + m_1 g l_p \text{sen}\theta_p = (m_g + m_1) g l_p \theta_p$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(K)}{\partial\dot{\theta}_1} = \frac{d}{dt} [m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_1 l_p l_1 \dot{\theta}_p \cos(\theta_1 - \theta_p)] = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_p l_1 \ddot{\theta}_p \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial(K)}{\partial\theta_1} = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial(P)}{\partial\theta_1} = m_1 l_1 g \text{sen}\theta_1 = m_1 l_1 g \theta_1$$

Substituindo os resultados encontrados nas derivações na equação Lagrangeana (4.20) e devido ao critério de pequenos ângulos de oscilação, as seguintes considerações são feitas:  $\text{sen}\theta \approx \theta$ ,  $\cos(\theta_1 - \theta_p) = 1$  e  $d/dt [\cos(\theta_1 - \theta_p)] = 0$ , onde chega-se nas equações de movimento dadas por:

$$(m_g + m_1) l_p^2 \ddot{\theta}_p + m_1 l_1 l_p \ddot{\theta}_1 + (m_g + m_1) g l_p \theta_p = 0 \quad (4.28)$$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 l_p \ddot{\theta}_p + m_1 l_1 g \theta_1 = 0 \quad (4.29)$$

ou, na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1) l_p^2 & m_1 l_1 l_p \\ m_1 l_1 l_p & m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1) l_p g & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

A equação (4.30) deduzida pela formulação de energias de Lagrange é equivalente a equação (4.19) obtida pela formulação de equilíbrio de forças de Newton. Ambas as formulações apresentam a modelagem analítica do problema pêndulo acoplado a ALS equivalente no formato pêndulo estudado neste trabalho. A diferença que a equação (4.19) foi deduzida para pêndulo

principal mais  $n$  massas equivalentes *sloshing* tipo pêndulo, como mencionado anteriormente cada massa equivalente representa uma frequência de vibração da superfície livre. Uma vez que este modelo de pêndulo duplo foi validado experimentalmente e analiticamente pela solução clássica, converte-se em uma formulação robusta e confiável.

A implementação computacional do modelo analítico de Cooker (1994) por modelo mecânico equivalente (pêndulo duplo) foi realizada via MATLAB. Sobre esta formulação serão realizados os estudos que serão apresentados no Capítulo 6 sobre otimização paramétrica por técnica de mapa de respostas. A seguir apresenta-se alguns aspectos da análise.

O modelo equivalente da equação (4.19) pode ser escrito na forma matricial como  $\vec{F} = \mathbf{K}(\Omega) \vec{X}$ , onde  $\mathbf{K}(\Omega)$  é a matriz de impedância,  $\vec{F}$  é o vetor de excitação e  $\vec{X}$  é o vetor de resposta de amplitudes do sistema e  $\Omega$  a frequência de excitação, sendo:

$$[\mathbf{K}(\Omega)] = \begin{bmatrix} (m_g + m_1)l_p g & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} (m_g + m_1)l_p^2 & m_1 l_1 l_p \\ m_1 l_1 l_p & m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Objetiva-se diminuir a amplitude de oscilação da estrutura principal, a função de transferência pode ser utilizada para otimizar os parâmetros e é obtida através da resolução do sistema formulado pela equação (4.31) para a primeira amplitude de oscilação (que representa a estrutura principal). A razão entre amplitude de resposta e excitação é a função de transferência  $H(\Omega)$  do sistema, Implementando a solução por regra de Kramer do sistema matricial (4.31) tem-se:

$$H_1(\Omega) = \vec{X}_1 / \vec{F} = \det|[K(\Omega)]_1| / \det|[K(\Omega)]| \quad (4.32)$$

onde  $\vec{X}_1$  representa a amplitude do sistema principal (estrutura-pêndulo), e  $[K(\Omega)]_1$  representa a matriz original  $[K(\Omega)]$  com os termos da primeira coluna substituídos pelo vetor de excitação. Desta forma a equação (4.32) concebe a função de análise paramétrica estudada no Capítulo 6.

## 5. ANÁLISE EXPERIMENTAL

Neste capítulo apresenta-se o procedimento experimental que valida os modelos analíticos estudados (modelo mecânico equivalente de *sloshing* e modelo equivalente do problema pêndulo de Cooker). Inicialmente descrevem-se as bancadas experimentais para os modelos analíticos, e a técnica de aquisição de dados por captura de vídeo com ajuda do programa *CVMob*. Em seguida explica-se o procedimento de identificação de parâmetros modais experimentais (dos dois sistemas analisados), mediante a análise das respostas temporais das bancadas com a ajuda do programa *CF TOOL – MATLAB*. A importância deste processo baseia-se na simplicidade, economia e precisão.

### 5.1 Bancadas experimentais

Nesta seção, descreve-se a construção e funcionamento das bancadas experimentais. A primeira bancada simula a oscilação da superfície livre do líquido contido num tanque de geometria retangular, a segunda bancada simula a bancada mencionada anteriormente (tanque retangular), oscilando sobre uma plataforma pendular. Para esclarecer estes experimentos a luz do escopo deste trabalho, a bancada apresentada em 5.1.1 estuda o ALS, e a bancada apresentada em 5.1.2 estuda a estrutura principal (a ser controlada) mais o ALS.

#### 5.1.1 Aparato experimental (*sloshing* em tanque retangular)

Para realizar a configuração experimental da superfície livre, um volume de líquido preenche um reservatório retangular (aquário de vidro) com variações das profundidades no líquido  $H = [2,99; 3,47; 3,96; 4,48; 4,95; 5,44; 5,94; 6,43; 6,93; 7,42; 8,41; 8,91; 9,40; 9,90]cm$ .

As dimensões do reservatório são comprimento  $L = 290 mm$ , largura  $W = 150 mm$  e altura da parede  $d = 196mm$ . A massa do reservatório vazio (aquário de vidro) é  $m_r = 808g$ .

No Laboratório de Vibrações e Metrologia Dinâmica (latitude  $-15,7633^\circ$ , longitude  $-47,8731^\circ$  e altitude  $1020m$ ), em Brasília, Brasil, a aceleração da gravidade local é  $g = 9,7808439 \pm 0,0000005 m/s^2$  (medida feita pelo medidor de gravidade *LaCoste & Romberg* modelo G n°613). E, para os presentes experimentos, o líquido utilizado foi água potável com massa específica  $\rho \cong 997 kg/m^3$ , viscosidade cinemática  $\nu = 1,002010^{-3}$  e temperatura  $T = 24^\circ C$ .

O reservatório da Figura 5.1, é submetido a uma condição inicial não controlada na forma de empurrão na direção paralela ao lado de maior comprimento ( $L$ ), uma vez que a quebra de ondas no interior do tanque cessa, o elemento flutuante é filmado por mais de 20 períodos de oscilação. O movimento da superfície livre é capturado usando uma câmera digital (de um telefone celular *Galaxy S3*) com 30 quadros por segundo (*fps*) e com o programa de captura de movimento *CVMob* (PEÑA *et al.*,2013).

Pela dificuldade de capturar o nível da superfície livre devido ao menisco do fluido, um sensor tipo boia flutuante foi utilizado como “mira” (princípio de funcionamento do sensor). A boia desloca-se verticalmente através de um fio de nylon suspenso na parte superior e inferior do reservatório.

A Figura 5.1 mostra uma representação esquemática da disposição do elemento flutuante a ser rastreado experimentalmente usando uma câmera digital e um programa de captura de movimento baseado em visão computacional. Dessa forma, o nível dinâmico do líquido é representado pela boia como um ponto específico sobre a superfície livre do reservatório retangular.

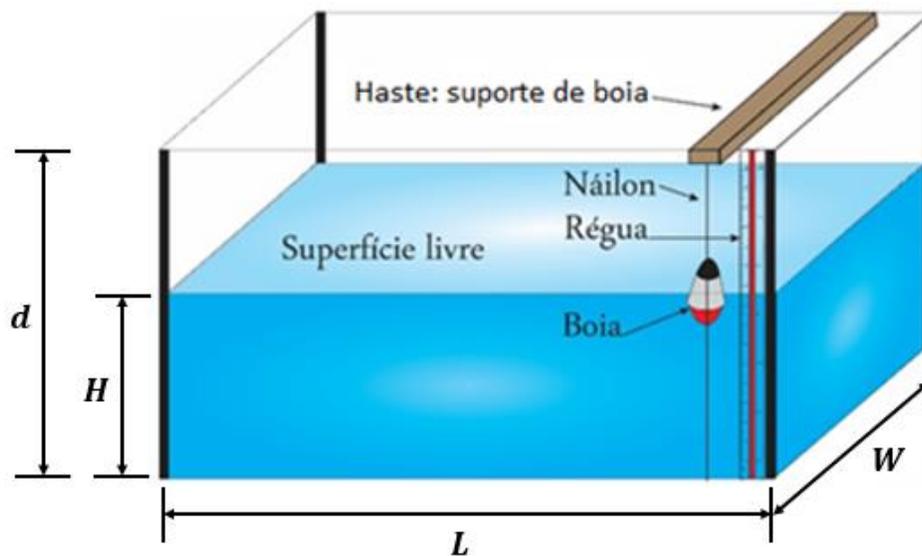


Figura 5.1 – Esquema da disposição do elemento flutuante (sensor do nível dinâmico do líquido)

### 5.1.2 Bancada pêndulo de Cooker (P.d.C)

O experimento do pêndulo de Cooker, configura-se utilizando o tanque retangular (aparato apresentado na seção 5.1.1) e colocando-o sob uma plataforma pendular (base suportada por fios inextensíveis), como é mostrado na representação esquemática da Figura 5.2. A plataforma pendular possui diferentes comprimentos  $l_p = [285; 407; 538]mm$ , a massa do pêndulo  $m_p = 2454gr$  é o equivalente à massa tanque (aquário vidro)  $808,0gr$  + massa plataforma triangular (madeira)  $1646,0gr$ . O Tanque é parcialmente preenchido com 11 alturas do líquido  $H = [30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80]cm$   
 $H/L = [0,103; 0,121; 0,138; 0,155; 0,172; 0,190; 0,207; 0,224; 0,241; 0,259; 0,276]$ .

Para conformar a análise de vibração livre o sistema plataforma-tanque da Figura 5.2 é inicialmente posicionado para um lado com um deslocamento de 106 mm, de modo que os suportes fazem um ângulo com a vertical. Em seguida o tanque é liberado do repouso. Se o ângulo inicial é grande o suficiente, as ondas quebram quando se propagam de um lado para outro. Quando a agitação passa, e a amplitude do balanço plataforma-tanque torna-se pequena, o sistema configura um movimento harmônico simples. Neste caso o balanço oscila em fase com a onda *sloshing* dentro do tanque. Este movimento é capturado usando uma câmera Nikon *COOLPIX* com 12,0 *Mega-Pixels*, posicionada numa distância de 40 cm com respeito da bancada.

Seguindo o procedimento, apresentado anteriormente, este deslocamento angular transversal é filmado por mais de 20 períodos de oscilação. A continuação com o programa de captura de movimento de vídeo *CVMob*, determinam-se as trajetórias temporais do sistema, processando-as a posteriori pelo CF-TOOL do MATLAB para a identificação dos parâmetros modais acoplados pêndulo-tanque.

Esta bancada apresenta uma facilidade com respeito da bancada *sloshing* em tanque retangular, sendo o ponto de referência ou mira sobre o sistema balanço-tanque é mais estável para o sistema de aquisição, do que os movimentos irregulares da boia que acompanha a oscilação não lineares da superfície perturbada do líquido.

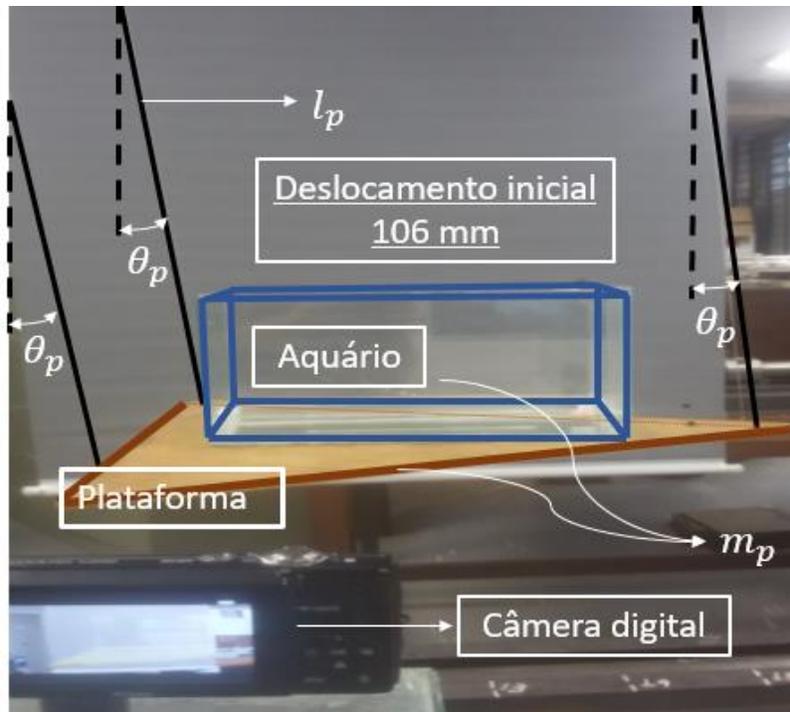


Figura 5.2 – Esquema bancada pêndulo de Cooker.

Uma vez entendido o objetivo e o funcionamento das bancadas, parte-se para a sua implementação seguindo o procedimento apresentado na seção 5.2 a seguir.

## 5.2 Aquisição dos dados e identificação dos parâmetros modais

Nesta seção apresenta-se o procedimento para aquisição e processamento das trajetórias (ou sinais temporais) provenientes das bancadas experimentais. Esta aquisição é feita mediante a ferramenta de seguimento de fluxo em sequência de imagens, pelo software livre de visão computacional *CVMob*; capaz de prever a trajetória de pontos no espaço utilizando uma simples câmera de vídeo digital.

### 5.2.1 Técnica de captura de movimento por vídeo (Aquisição dos dados)

A Figura 5.3 mostra um exemplo de captura de fluxo de imagens do nível dinâmico do líquido usando *CVMob* e uma câmera digital. O *CVMob* é um software livre que utiliza técnicas de visão computacional com análise de fluxo de pixels em vídeos, para localização e acompanhamento de padrões de imagens. O *CVMob* foi desenvolvido no Instituto de Física da Universidade Federal Bahia em linguagem C++ e com ajuda da biblioteca *OpenCV*.

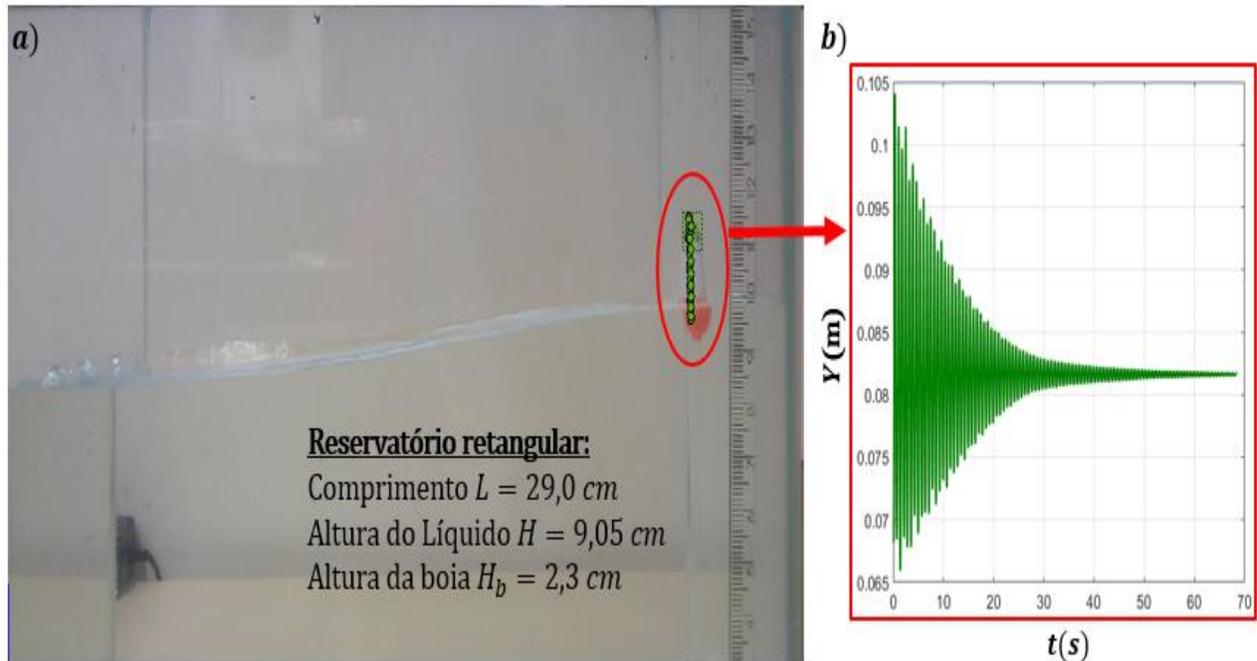


Figura 5.3 – a) Janela do programa *CVMob* em um procedimento de medida do nível dinâmico do líquido. b) Trajetória boia.

Na Figura 5.3.a mostra-se uma configuração de experimento da bancada *sloshing*, com o elemento flutuante boia oscilando com a superfície livre, na Figura 5.3.b mostra-se uma função harmônica amortecida como resultado da captura do movimento da boia para um intervalo de tempo aproximado de 70 segundos.

Os sinais temporais da bancada *sloshing*, apresentam um comportamento complexo quando o líquido no interior do tanque está em regime não linear. Uma vez que objetiva-se determinar parâmetros dinâmicos para serem validados com a teoria de ondas de água linear. É importante conhecer se a vibração do sistema é linear. Para isto configura-se uma análise de amplitude versus frequência, mediante a obtenção da curva *Backbone*, obtida para picos positivos consecutivos. Ferramenta utilizada por Tang (2016).

Nas Figuras 5.4 até 5.10 apresentam-se sete sinais de trajetória de boia. Em (a) indica-se o intervalo de tempo durante o qual a análise é realizada, como pode se observar, os primeiros instantes deste movimento são retirados, devido à instabilidade na medida do sinal. Em (b) observa-

se a curva *backbone* configurando respostas temporais de trajetória de boia lineares. Isto pelo seu comportamento com tendência vertical.

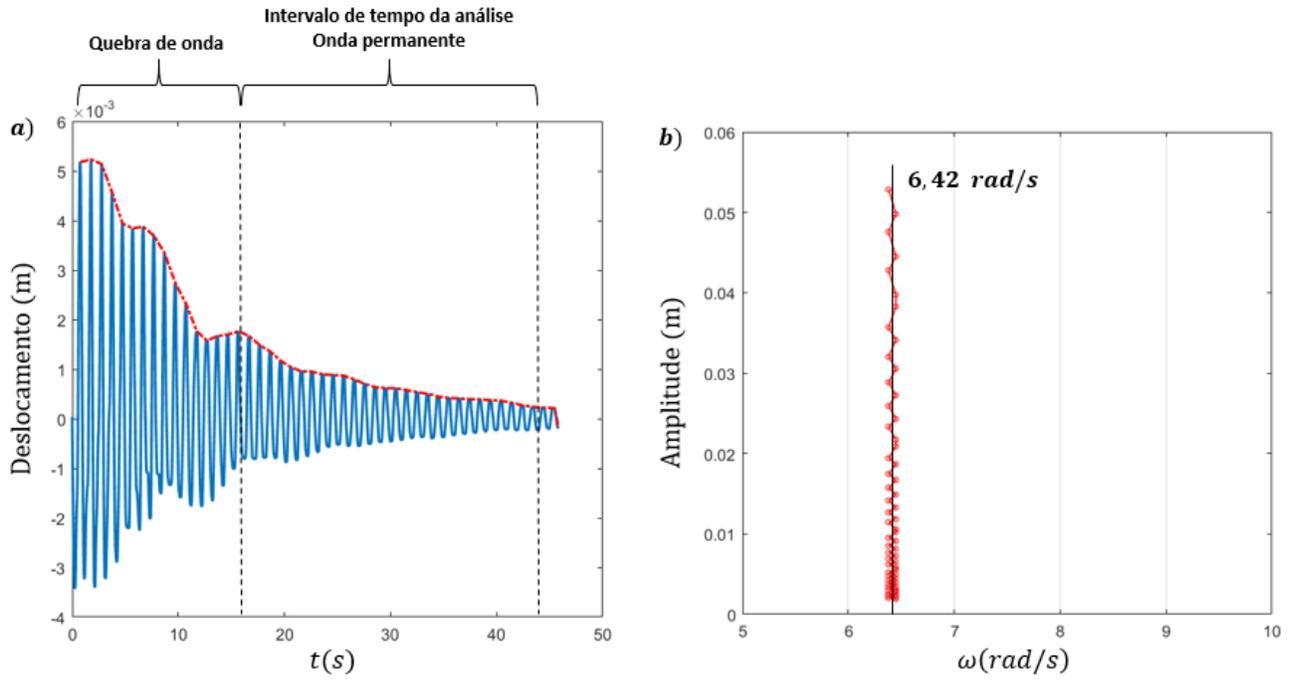


Figura 5.4 – Nível do líquido  $H = 3,85 \text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

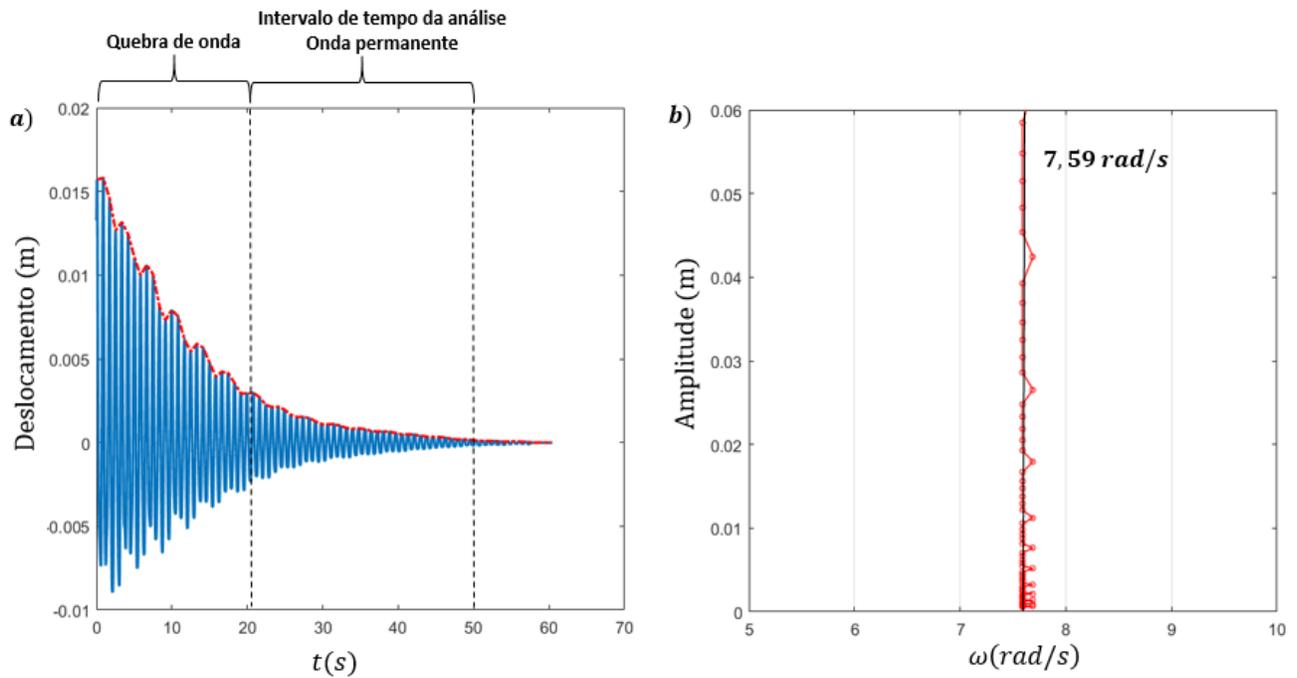


Figura 5.5 – Nível do líquido  $H = 5,75 \text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

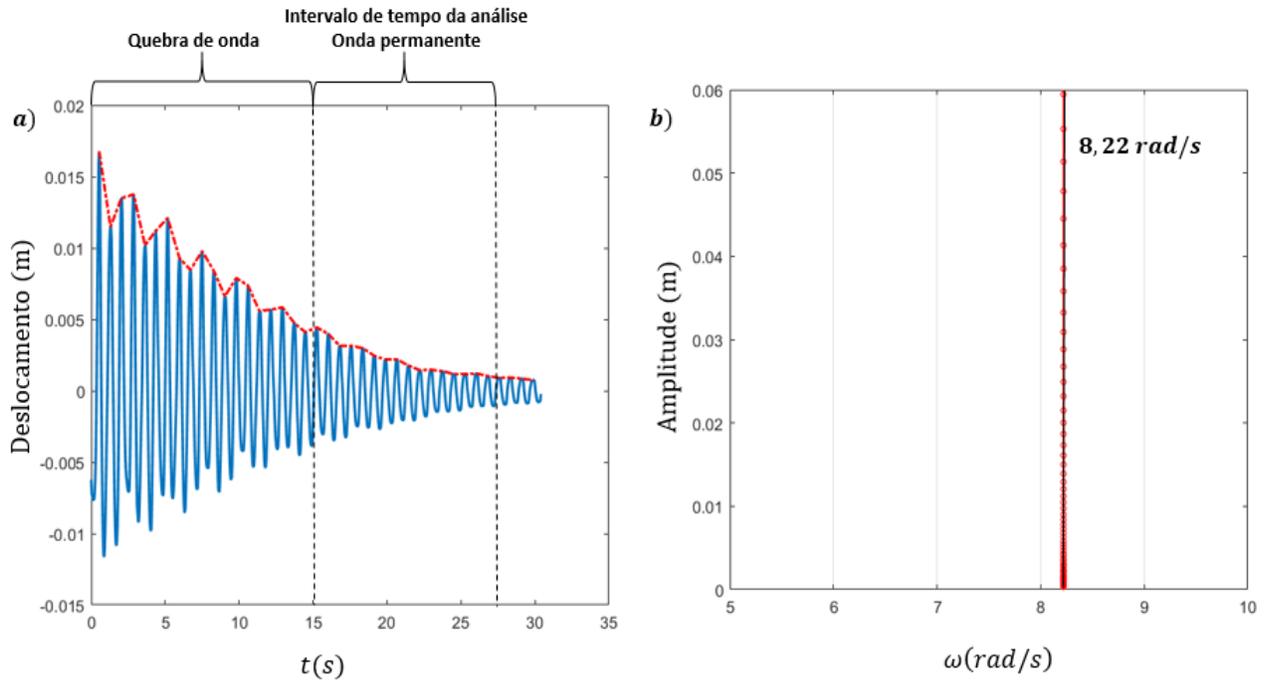


Figura 5.6 – Nível do líquido  $H = 7,08$  cm: a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

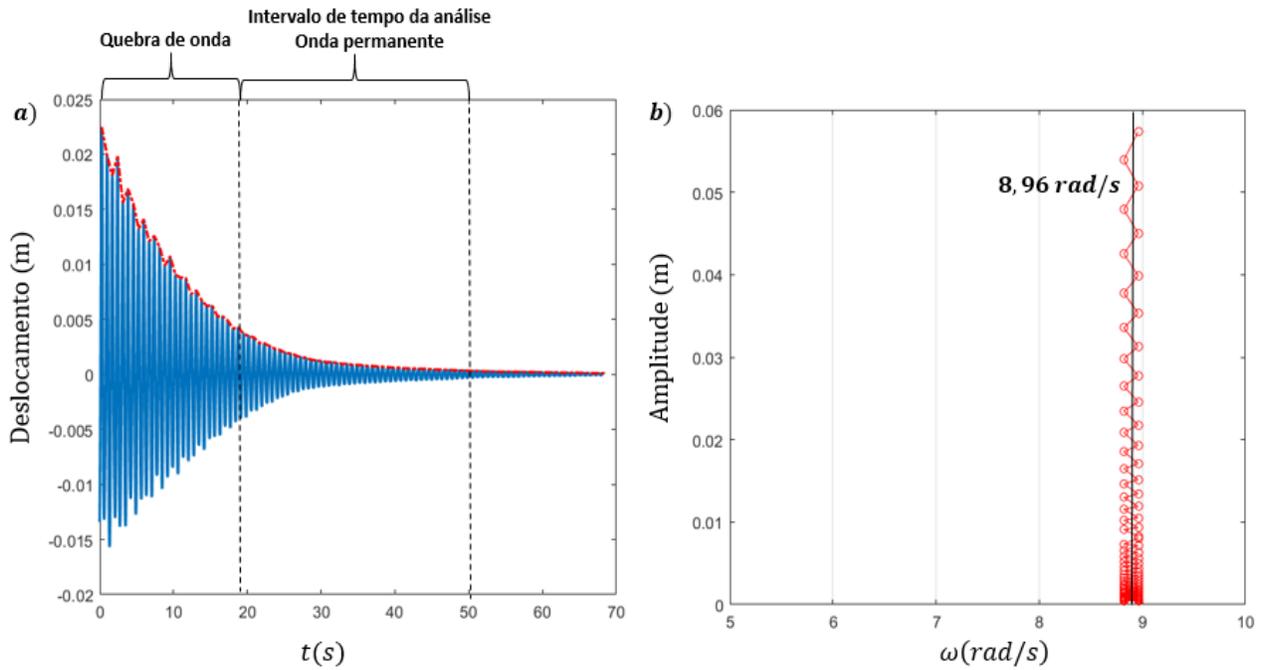


Figura 5.7 – Nível do líquido  $H = 9,05$  cm: a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

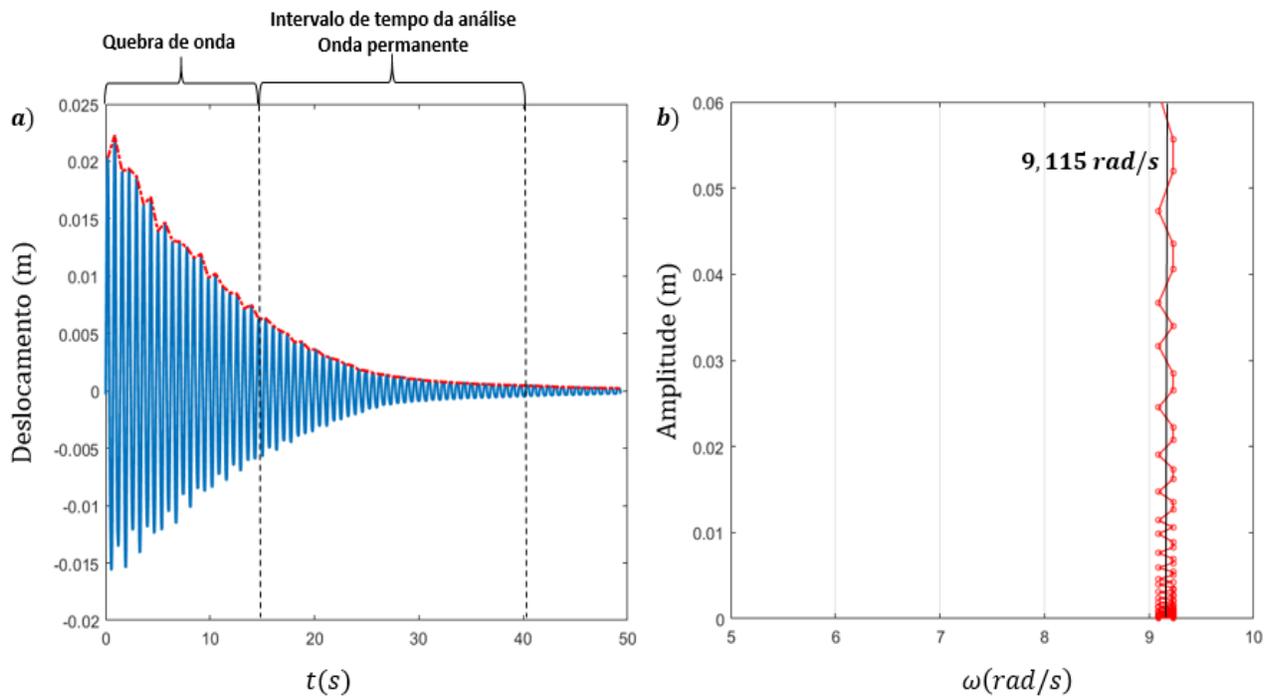


Figura 5.8 – Nível do líquido  $H = 10,25 \text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

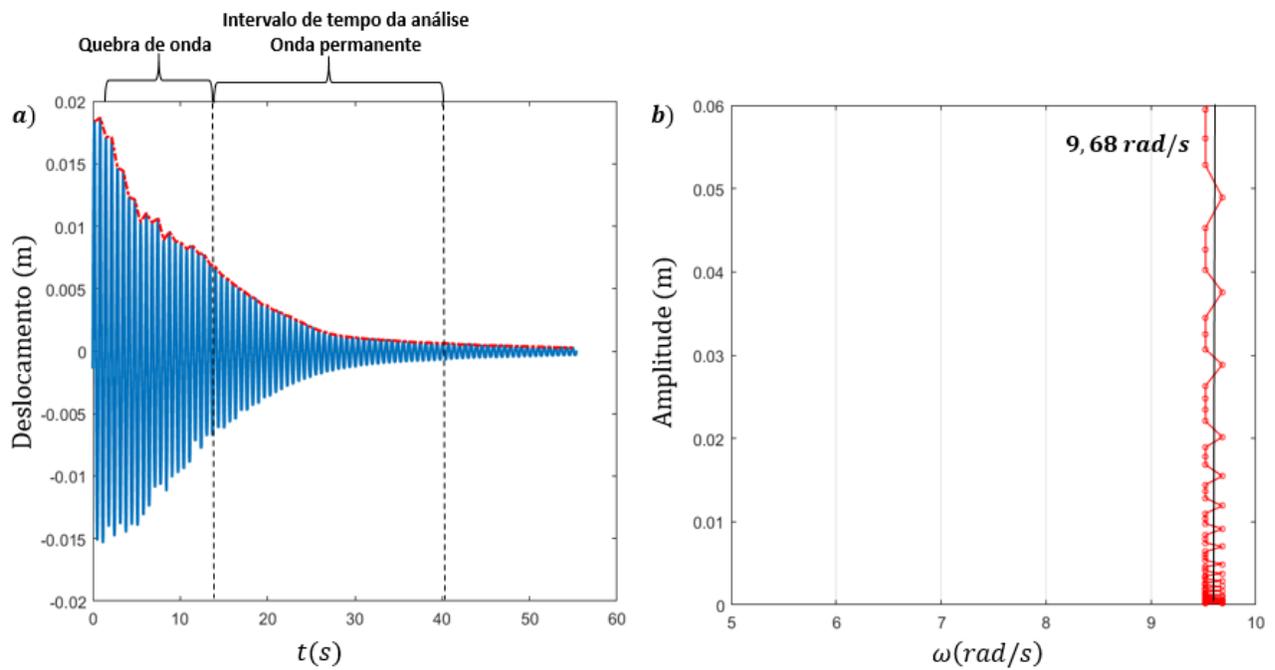


Figura 5.9 – Nível do líquido  $H = 12,35 \text{ cm}$ : a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

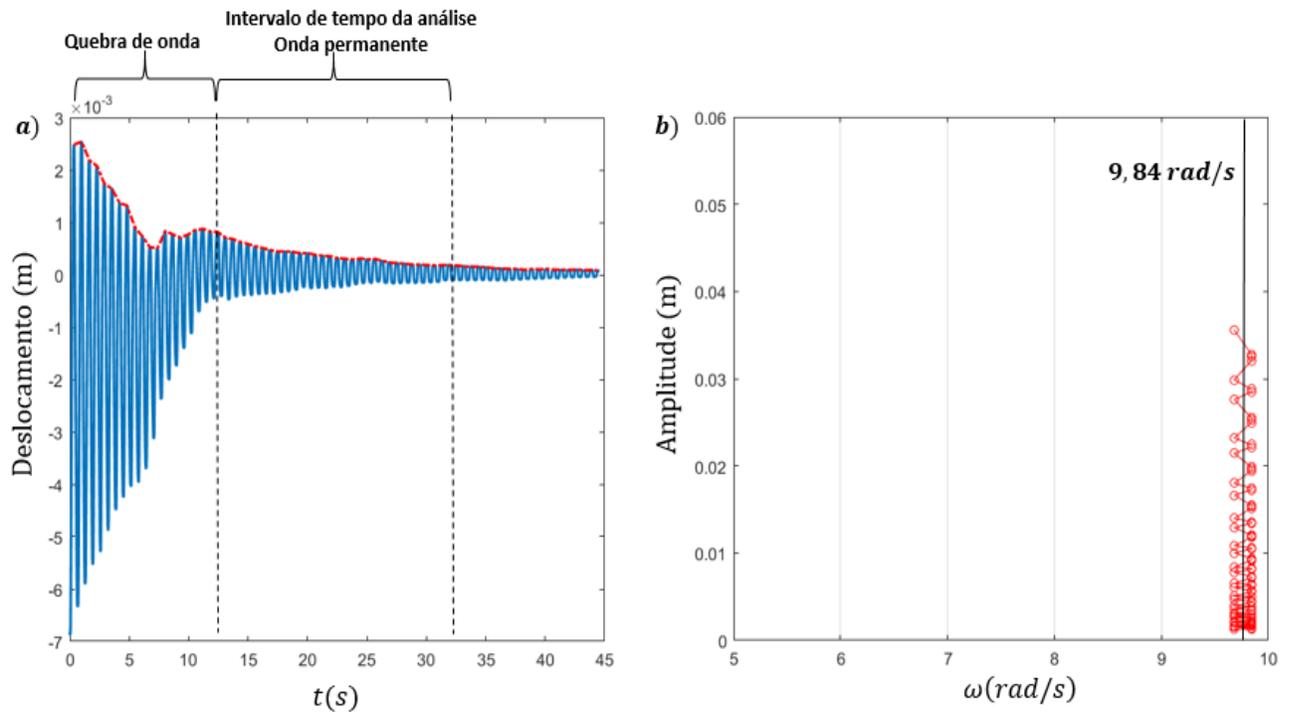


Figura 5.10 – Nível do líquido  $H = 14,28$  cm: a) Trajetória temporal boia, b) Curva *Backbone*.

### 5.2.2 Identificação de parâmetros modais

A Figura 5.11 configura um ajuste de curva realizado pela ferramenta CFTOOL-MATLAB. O modelo teórico é representado por uma função de movimento harmônica amortecida  $g(t) = a_1 e^{(-a_2 t)} \sin(a_3 t + a_4) + a_5$  e é comparado as medidas experimentais. O método Levenberg-Maquard é escolhido para realizar os mínimos quadrados não lineares. (LIMA, 2009).

$g(t)$  é uma função com cinco parâmetros de ajuste:  $a_1 = A$ ,  $a_2 = \xi \omega_n$ ,  $a_3 = \omega_d$ ,  $a_4 = \phi$  e  $a_5 = B$ , onde  $A$  é a constante de amplitude,  $\xi \omega_n$  e o produto de razão de amortecimento viscoso  $\xi$  e frequência natural  $\omega_n$ ,  $\omega_d$  é a frequência amortecida,  $\phi$  é o ângulo de fase, e  $B$  é a compensação experimental devido a definição de origem.

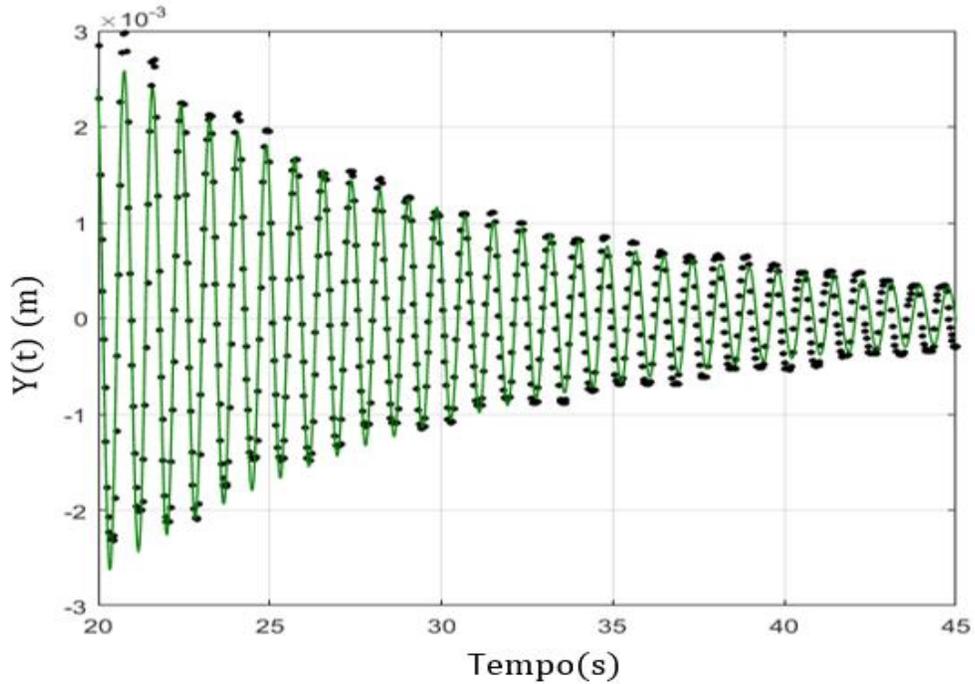


Figura 5.11 – Ajuste do modelo teórico da função harmônica amortecida às medidas obtidas com o *CVMob*. Os pontos representam as medidas; a linha sólida, o ajuste.

Para a obtenção de parâmetros dinâmicos parte-se da definição de frequência amortecida equação (5.1)

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.1)$$

Por manipulação algébrica, pode-se transformar equação (5.1) como função de parâmetros experimentais,

$$(\omega_n)^2_{Exp} = (\omega_d)^2_{Exp} + (\omega_n \xi)^2_{Exp} \quad (5.2)$$

Onde  $(\omega_d)^2_{Exp}$  e  $(\xi \omega_n)^2_{Exp}$  são fornecidos pelas funções de ajuste que melhor se encaixam nas trajetórias experimentais

### 5.2.3 Considerações sobre o sensor dinâmico da superfície livre

Modelando a boia (sensor dinâmico de superfície livre), como uma massa parcialmente submersa em água, cujo comportamento dinâmico pode ser descrito pela equação de movimento conforme (RAO, 2010)

$$m_b \ddot{u}(t) + \rho_{\text{água}} g \pi R_b^2 u(t) = \omega_b \eta(t) \quad (5.3)$$

Sendo a frequência natural de oscilação da boia igual a  $\omega_b = \sqrt{\rho_{\text{água}} g \pi R_b^2 / m_b}$ , a massa da boia  $m_b = \rho_b \pi R_b^2 H_b$ . Para esta formulação  $R_b$ ,  $H_b$  e  $\rho_b$  são o raio, a altura e a massa específica da boia respectivamente. Com esta informação é possível determinar a frequência natural da boia utilizada no aparato experimental da seção 5.1.1. a qual tem uma altura  $H_b = 2,3 \text{ cm}$ , massa específica (isopor da boia)  $\rho_b = 1,04 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ , submersa em água com massa específica  $\rho_{\text{água}} = 0,997 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ , numa gravidade local  $g = 9,7808439 \text{ (m/s}^2\text{)}$ ,

$$\omega_b = \sqrt{\frac{0,997 \text{ (g/cm}^3\text{)} 9,7808439 \text{ (m/s}^2\text{)}}{1,04 \text{ (g/cm}^3\text{)} 0,023 \text{ (m)}}} = 20,2212 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (5.4)$$

A Figura 5.12 indica que os ensaios estão limitados a frequências inferiores de  $20 \text{ rad/s}$  ( $\sim 3 \text{ Hz}$ ), o intervalo achurado em cor azul indica as frequências do experimento ou frequências fundamentais do *sloshing* para a geometria do tanque estudado (como será apresentado posteriormente na Tabela 5.1). Estas frequências ficam afastadas da resposta dinâmica da boia, justificando a não existência de erro na aquisição do sinal.

A Figura 5.13 mostra as respostas dinâmicas em frequência da boia para diferentes comprimentos de boia  $H_b$ . Pode-se apreciar que para uma variação de comprimentos de boia entre  $1,0 \text{ cm}$  e  $4,0 \text{ cm}$  todas as suas respostas estão no intervalo de frequências entre  $15$  e  $30 \text{ rad/s}$ , sendo que o comprimento de boia que gera a frequência natural mais próxima das frequências do experimento é de  $4 \text{ cm}$ .

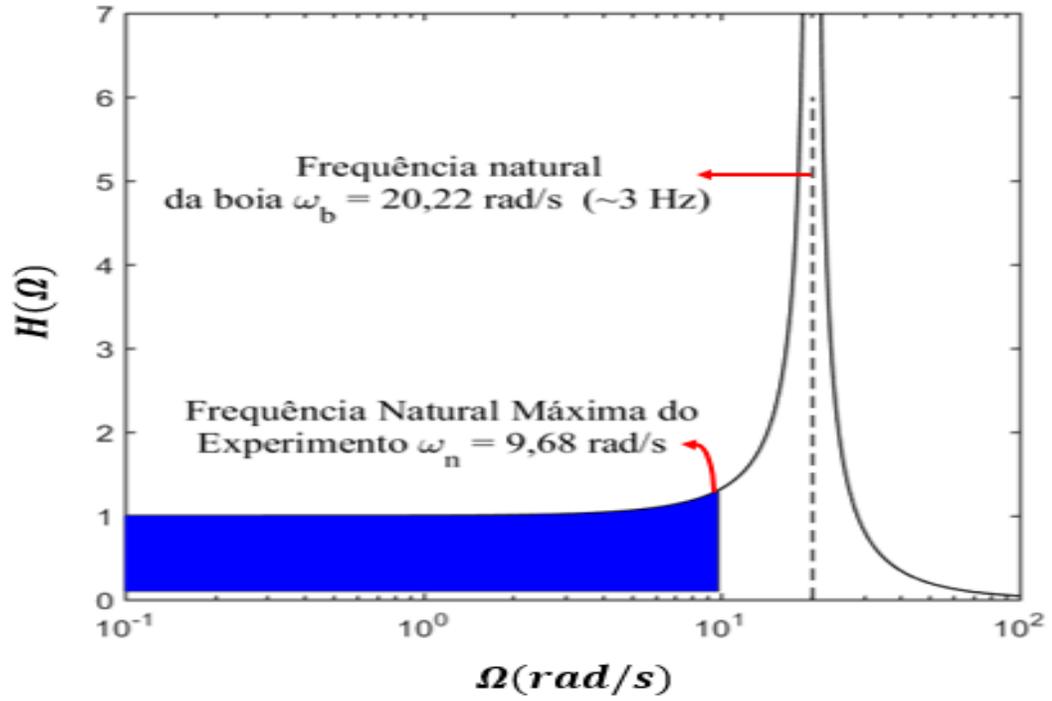


Figura 5.12 – Resposta dinâmica da boia vs. intervalo de frequências do experimento.

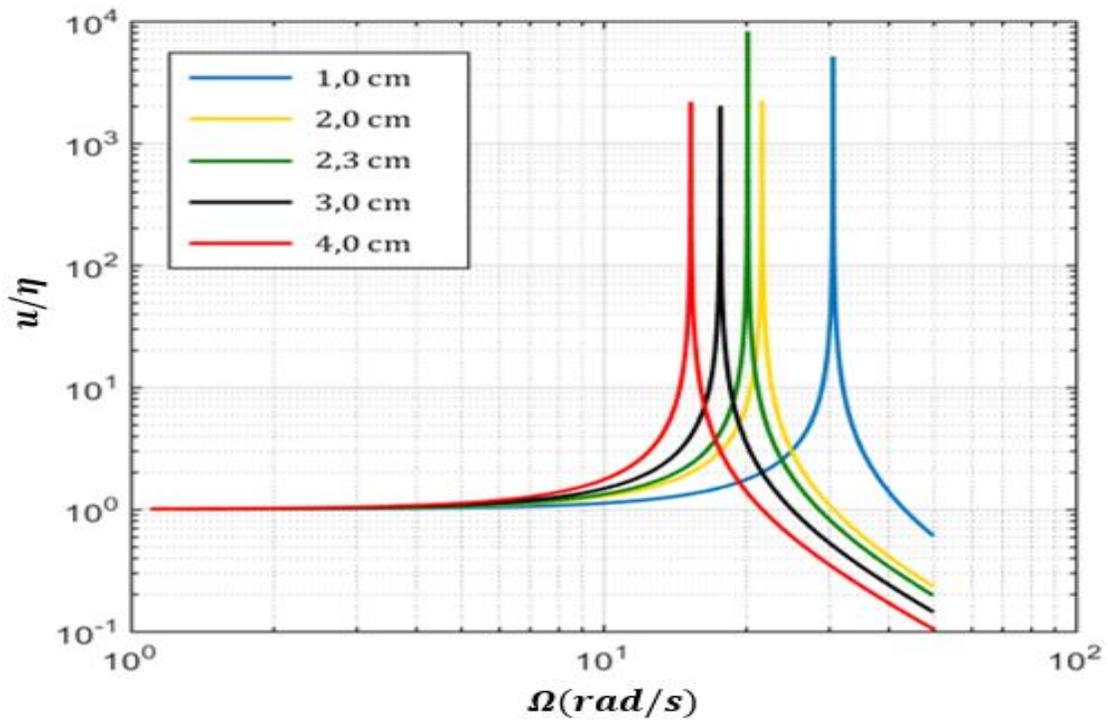


Figura 5.13 – FRF da boia para diferentes alturas de boia  $H_b = [1,0; 2,0; 2,3; 3,0; 4,0]cm$

#### 5.2.4 Cálculo de incerteza experimental

As medidas realizadas neste experimento possuem incerteza experimental, ou erro de medida. Geralmente é necessário usar valores de medidas afetadas por erros para realizar cálculos de outras grandezas, como observa-se no cálculo do período fundamental do *sloshing* antissimétrico  $T = 2\pi/\sqrt{(\pi g/L)\tanh(\pi H/L)}$ , onde grandezas como gravidade ( $g$ ), altura do líquido ( $H$ ) e comprimento do tanque ( $L$ ) precisam ser conhecidas para obter o período *sloshing*. O seguinte procedimento foi implementado com base na Guia para Física Experimental do Instituto de Física da Unicamp (CRUZ, 1997).

Para estimar a variação no resultado final período  $T$  implementa-se a equação a seguir

$$T = \bar{T} \pm \sigma_T \quad (5.5)$$

onde  $\bar{T} = f(\bar{H}, \bar{L}, \bar{g})$  representa a função período fundamental do *sloshing* antissimétrico avaliada na média aritmética das repetições realizadas na medida de cada grandeza,  $H, L$  e  $g$ ;  $\sigma_T$  é o desvio padrão das grandezas envolvidas, mediante a seguinte expressão,

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)^2 \Big|_{L=\bar{L}} \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial g}\right)^2 \Big|_{g=\bar{g}} \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)^2 \Big|_{H=\bar{H}} \sigma_H^2 \quad (5.6)$$

As equações (5.7) a (5.9) a seguir, são as derivadas parciais  $\partial T/\partial H$ ,  $\partial T/\partial L$  e  $\partial T/\partial g$  da fórmula do período fundamental do *sloshing* antissimétrico em relação a  $H, L$  e  $g$  calculadas em  $(\bar{H}, \bar{L}, \bar{g})$ . As grandezas  $H$  e  $L$  têm erros associados ao julgamento feito no momento de fazer a menor leitura da medida (neste caso para determinar  $L$ , a metade da menor divisão de uma régua seria igual a  $0,5mm$ ). O desvio padrão  $\sigma_H$  e  $\sigma_L$  de  $H$  e  $L$  é  $0,5mm$ , o desvio padrão para  $\sigma_g$  de  $g$  é  $5 * 10^{-7} m/s^2$ .

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{g\pi^3 \left( \tanh\left(\frac{\pi H}{L}\right)^2 - 1 \right)}{L^2 \left( \left( g\pi \tanh\left(\frac{\pi H}{L}\right) \right) / L \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial L} = \frac{\pi \left( \left( g \pi \tanh \left( \frac{\pi H}{L} \right) \right) / L^2 - \left( H g \pi^2 \tanh \left( \frac{\pi H}{L} \right)^2 - 1 \right) \right)}{\left( g \pi \tanh \left( \frac{\pi H}{L} \right) \right) / L^{\frac{3}{2}}} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = \frac{-\pi^2 \tanh \left( \frac{\pi H}{L} \right)}{L \left( g \pi \tanh \left( \frac{\pi H}{L} \right) \right) / L^{\frac{3}{2}}} \quad (5.9)$$

Na avaliação da incerteza pela equação (5.5) obtém-se uma faixa de valores na qual o período fundamental do *sloshing* antissimétrico estaria. Esta faixa de incerteza teórica observa-se a seguir na Figura 5.14.

### 5.3 Resultados experimentais

Nesta seção, realizamos a comparação dos parâmetros modais experimentais obtidos para a bancada *sloshing* em tanque retangular e bancada experimento pêndulo de Cooker (COOKER, 1994; ARDAKANI *et al*, 2012) com a solução analítica da formulação clássica e com o modelo mecânico equivalente.

#### 5.3.1 Bancada *sloshing* em tanque retangular

Na Figura 5.14 compara-se o período experimental com o modelo mecânico equivalente para diferentes alturas do líquido  $H$ .

$$H = [2,99; 3,47; 3,96; 4,48; 4,95; 5,44; 5,94; 6,43; 6,93; 7,42; 8,41; 8,91; 9,40; 9,90] \text{ cm}$$

$$(H/L = [0,10; 0,12; 0,14; 0,15; 0,17; 0,20; 0,22; 0,24; 0,26; 0,27; 0,29; 0,31; 0,32; 0,34])$$

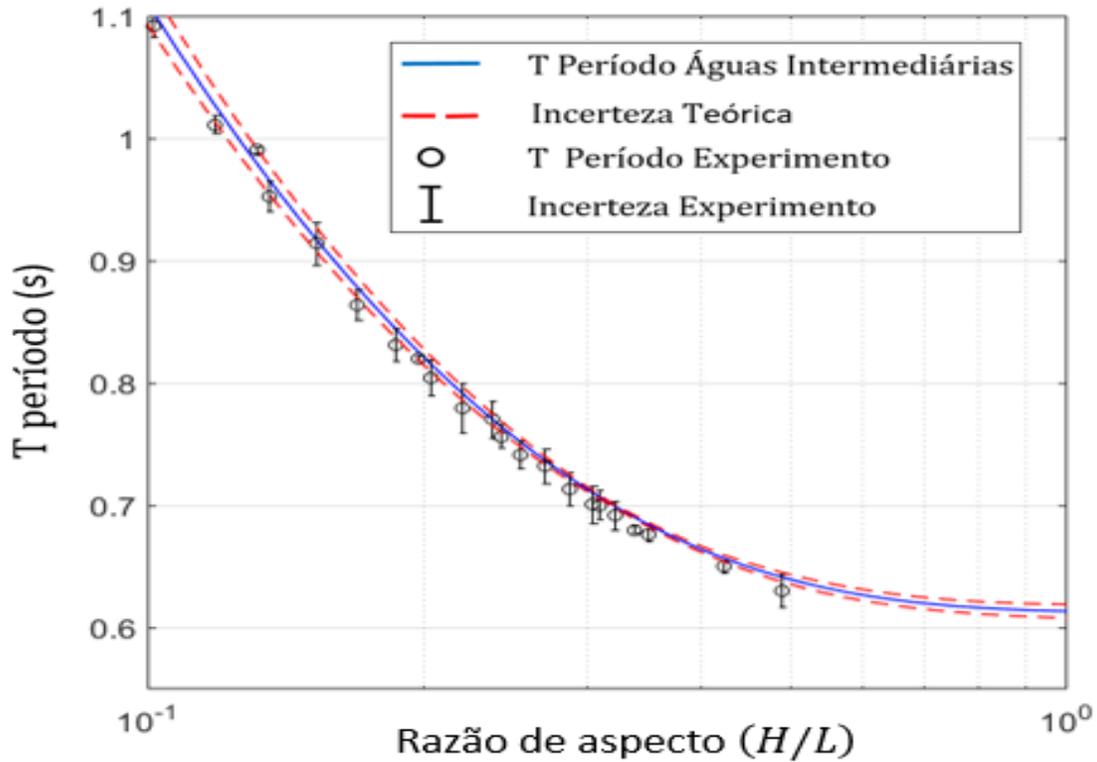


Figura 5.14 – Período *sloshing* versus razão de aspecto  $H/L$  para modelo mecânico equivalente de (tipo pendular e tipo massa-mola) e fórmula período água intermediária A.I.

Na Figura 5.14 a comparação dos períodos experimentais com a fórmula para período antissimétrico de águas intermediárias A.I. da Tabela 3.1 e o período do modelo mecânico equivalente (tipo pendulo  $T = 2\pi\sqrt{l_n/g}$  e tipo massa-mola  $T = 2\pi\sqrt{m_n/k_n}$ ) apresentam boa concordância, com o qual fica validado o presente procedimento experimental.

Na tabela 5.1 apresentam-se os parâmetros modais experimentais de frequência natural experimental  $(\omega_n)_{Exp}$ , frequência amortecida experimental  $(\omega_d)_{Exp}$ , e razão de amortecimento experimental  $(\xi)_{Exp}$  do *sloshing* para diferentes níveis de preenchimento do líquido.

Tabela 5.1 – Parâmetros modais em função da razão de aspecto.

$H(cm)$	$H/L$	$(\omega_d)_{Exp}$	$(\omega_n \xi)_{Exp}$	$(\xi)_{Exp}$	$(\omega_n)_{Ana}$ (rad/s)	$(\omega_n)_{Exp}$ (rad/s)	$E_{Exp}(\%)$
3,85	0,13	6,351	0,05623	0,0089	6,42	6,351	1,075
5,75	0,20	7,648	0,07986	0,0104	7,61	7,648	0,499
7,08	0,24	8,186	0,09496	0,0116	8,22	8,187	0,401
9,05	0,31	8,998	0,08479	0,0094	8,89	8,998	1,215
10,25	0,35	9,217	0,1216	0,0132	9,18	9,218	0,414
12,35	0,43	9,652	0,1025	0,0106	9,56	9,653	0,973
14,28	0,49	9,983	0,0559	0,0056	9,79	9,983	1,971

Na Tabela 5.1 evidencia-se uma boa concordância das frequências da formulação teórica e os resultados experimentais obtidos, observam-se razões de amortecimento  $\xi$  inferiores a 2% para cada razão de preenchimento  $H/L$ . O erro relativo entre o resultado experimental e a solução analítica obtido pela equação (5.10) foi inferior a 2% .

$$E_{Exp}(\%) = \frac{|(\omega_n)_{Exp} - (\omega_n)_{Ana}|}{(\omega_n)_{Ana}} 100\% \quad (5.10)$$

A Figura 5.15 compara o período de oscilação do *sloshing*, em função da razão de aspecto para diferentes teorias de ondas d'água (águas rasas A.R., águas intermediárias A.I. e águas profundas A.P.). Os resultados experimentais para o período de oscilação do *sloshing* no tanque retangular caracterizam preponderantemente as águas intermediárias.

Mostra-se também que a redução do movimento do líquido por um sistema equivalente composto apenas por uma massa-mola ou pêndulo pode ser uma boa aproximação para o problema.

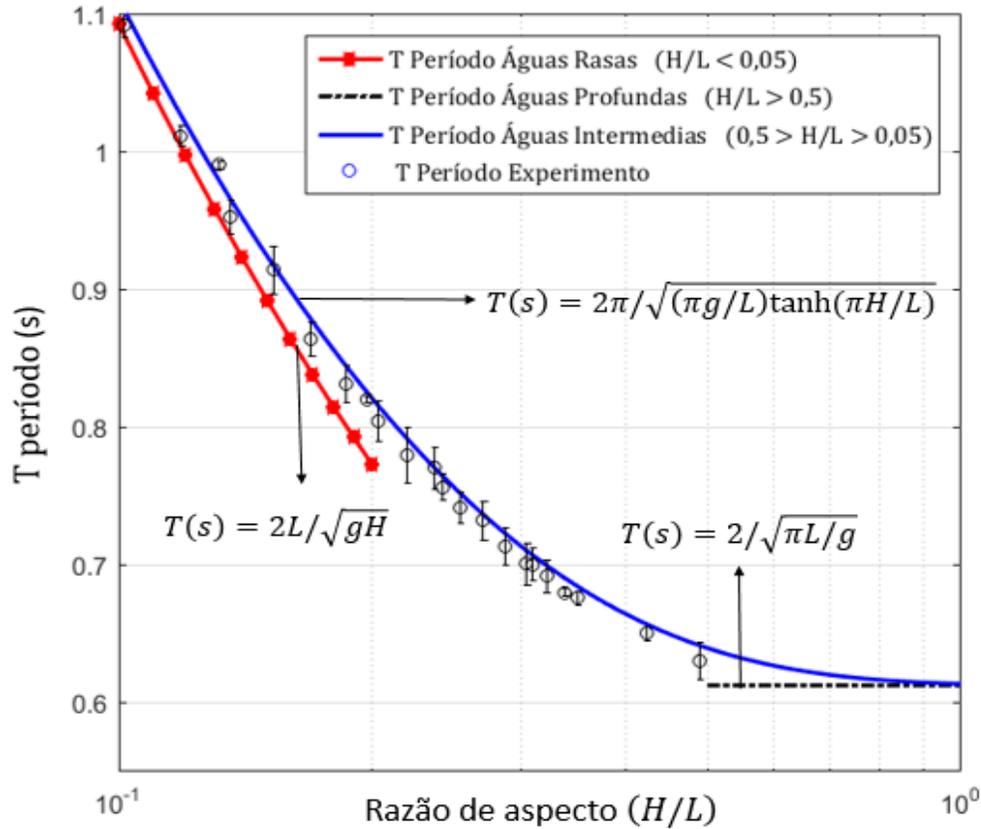


Figura 5.15 – Período *sloshing* vs. razão de aspecto para diferentes soluções de profundidade das águas no tanque.

### 5.3.2 Bancada pêndulo de Cooker (P.d.C)

A Figura 5.16 mostra a evolução do período fundamental de oscilação do experimento pêndulo de Cooker, em função da razão de aspecto para diferentes comprimento de pêndulo, comparado com a solução analítica acoplada (4.16) e o modelo de massa equivalente (4.19). O modelo equivalente foi discretizado com 10 pêndulos. O tanque retangular foi preenchido com 11 alturas do líquido  $H$ .  $H = [30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80]cm$ .

$(H/L = [0,103; 0,121; 0,138; 0,155; 0,172; 0,190; 0,207; 0,224; 0,241; 0,259; 0,276])$ .

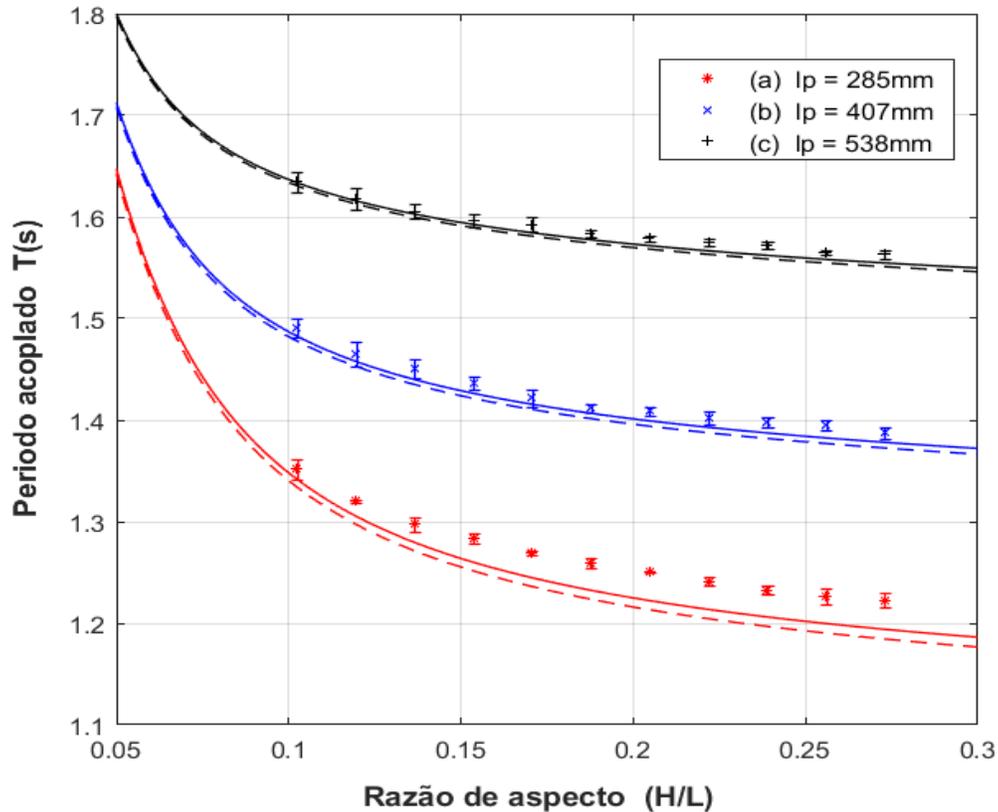


Figura 5.16 – Evolução do período de oscilação experimental do *P.d.C* como função da razão de aspecto para diferentes comprimentos de pêndulo (a)0,285m; (b)0,407m; (c)0,538m.

Linha contínua solução analítica de Cooker (1994), Linha tracejada modelo massa equivalente.

A solução analítica do pêndulo de Cooker (linha contínua) e o modelo mecânico equivalente (linha de tracejada) são comparados com os dados experimentais. Analisando a Figura 5.16, observa-se que os resultados analíticos para o modelo do pêndulo de Cooker, o modelo mecânico equivalente e os resultados experimentais apresentam boa concordância. Os valores dos períodos são maiores para os comprimentos mais longos dos pêndulos, onde inclusive a concordância de resultados são maiores. Para os pêndulos mais curtos, temos períodos menores e maior dispersão dos resultados, em particular para maiores razões de aspecto. Em seguida, o erro relativo porcentual do modelo mecânico equivalente  $E_{M.Eq}(\%)$  e do experimento (pêndulo de Cooker)  $E_{exp}(\%)$  em relação à solução analítica equação (4.16), foram obtidos pelas equações (5.11) e (5.12) respectivamente:

$$E_{M.Eq}(\%) = \frac{|T_{M.Eq} - T_{P.d.C}|}{T_{P.d.C}} 100\% \quad (5.11)$$

$$E_{Exp}(\%) = \frac{|T_{Exp} - T_{P.d.C}|}{T_{P.d.C}} 100\% \quad (5.12)$$

A seguir, as Tabelas 5.2 a 5.4 mostram os resultados quantitativos dos períodos acoplados solução analítica do pêndulo de Cooker  $T_{P.d.C}$ , solução modelo mecânico equivalente  $T_{M.Eq}$  e experimento  $T_{Exp}$  em função da razão de aspecto  $H/L$  para os três comprimentos de pêndulo estudados.

Tabela 5.2 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para  $l_p = 285mm$

$H/L$	$T_{P.d.C}$ (s)	$T_{M.Eq}$ (s)	$T_{Exp}$ (s)	$E(\%)_{M.Eq}$	$E(\%)_{Exp}$
0,103	1,341	1,334	1,352	0,522	0,820
0,121	1,306	1,298	1,320	0,613	1,072
0,138	1,280	1,271	1,297	0,703	1,328
0,155	1,260	1,252	1,283	0,635	1,825
0,172	1,245	1,236	1,269	0,723	1,928
0,190	1,233	1,224	1,259	0,730	2,109
0,207	1,222	1,213	1,250	0,736	2,291
0,224	1,214	1,205	1,241	0,741	2,224
0,241	1,206	1,197	1,232	0,746	2,156
0,259	1,200	1,190	1,226	0,833	2,167
0,276	1,194	1,184	1,223	0,838	2,429

Tabela 5.3 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para  $l_p = 407mm$ 

$H/L$	$T_{P.d.C}$ (s)	$T_{M.Eq}$ (s)	$T_{Exp}$ (s)	$E(\%)_{M.Eq}$	$E(\%)_{Exp}$
0,103	1,482	1,478	1,491	0,270	0,607
0,121	1,458	1,453	1,465	0,343	0,480
0,138	1,440	1,435	1,450	0,347	0,694
0,155	1,426	1,421	1,436	0,351	0,701
0,172	1,416	1,411	1,422	0,353	0,424
0,190	1,407	1,402	1,412	0,355	0,355
0,207	1,399	1,394	1,409	0,357	0,715
0,224	1,393	1,387	1,402	0,431	0,646
0,241	1,387	1,382	1,398	0,360	0,793
0,259	1,382	1,377	1,395	0,362	0,941
0,276	1,378	1,372	1,387	0,435	0,653

Tabela 5.4 – Período acoplado vs. Razão de aspecto para  $l_p = 538mm$ 

$H/L$	$T_{P.d.C}$ (s)	$T_{M.Eq}$ (s)	$T_{Exp}$ (s)	$E(\%)_{M.Eq}$	$E(\%)_{Exp}$
0,103	1,634	1,631	1,635	0,184	0,061
0,121	1,616	1,613	1,618	0,186	0,124
0,138	1,603	1,600	1,605	0,187	0,125
0,155	1,593	1,589	1,596	0,251	0,188
0,172	1,584	1,581	1,593	0,189	0,568
0,190	1,578	1,574	1,583	0,253	0,317
0,207	1,572	1,568	1,579	0,254	0,445
0,224	1,567	1,563	1,575	0,255	0,511
0,241	1,562	1,559	1,572	0,192	0,640
0,259	1,558	1,555	1,566	0,193	0,513
0,276	1,555	1,551	1,563	0,257	0,514

Nas Tabelas 5.2 a 5.4 apresentam-se 3 diferentes resultados de período acoplado em função de 11 razões de aspecto (nível de líquido) para três comprimentos de pêndulo. Para os três casos observam-se erros menores que 3%, sendo que os maiores erros estão relacionados para o comprimento de pêndulo menor  $l_p = 285mm$  aproximadamente de 2,4%. Nos três casos estudados pode-se observar a tendência do erro ser maior em razões de aspecto maiores.

Uma vez, as comparações teóricas e experimentais do período fundamental antissimétrico de ondas de superfície livre (*sloshing*) em tanques de geometria retangular foram estudadas com sucesso. Na Figura 5.17 apresenta-se a forma que assume a superfície livre para este período fundamental, mediante a comparação da expressão analítica equação (3.41.b) do capítulo de modelagem matemática, e análise experimental.

A expressão analítica da forma (ou elevação) desta onda de água livre se interessa com o formato desta elevação no modo fundamental de oscilação, cuja amplitude de onda é dada pela constante de  $D$ .

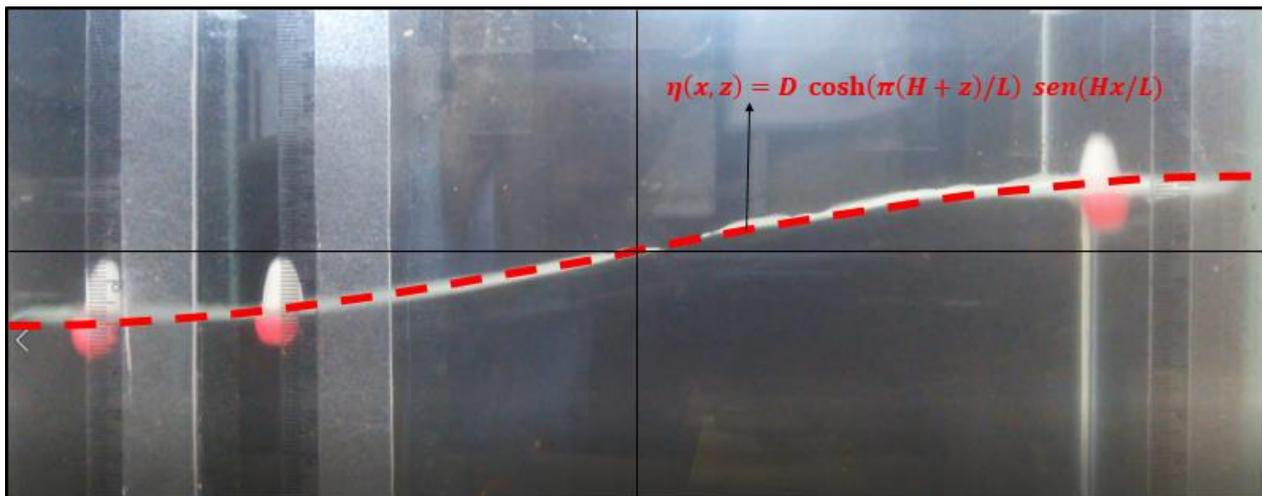


Figura 5.17 – Comparação experimental e analítica da forma de superfície livre antissimétrica na bancada *sloshing* em tanque retangular.

Com estes resultados fica consolidado o estudo comparativo analítico-experimental de ondas de superfície livre em tanques retangulares.

Conforme estes modelos mecânicos são validados experimentalmente, parte-se para o capítulo de otimização paramétrica e posteriores recomendações de projeto de Absorvedores Líquidos Sintonizados.

## 6. OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA *SLOSHING* ACOPLADO ESTRUTURA

Neste capítulo apresenta-se a técnica de otimização por mapa de respostas, nesta técnica obtém-se qualitativa e quantitativamente valores de amplitude de resposta mínima, com estes valores é possível se obter através das expressões de razão de massa e razão de sintonização configurações geométricas ótimas do ALS.

### 6.1 Propriedades do ALS

A Figura 6.1 mostra as dimensões de um tanque de geometria retangular, onde  $L$ ,  $W$  e  $H$  representam o comprimento do tanque na direção da excitação, a largura (perpendicular a excitação) e a profundidade do líquido, respectivamente. A frequência fundamental do *sloshing*, para o líquido no interior do tanque pode ser estimada usando a teoria linear de onda como  $\omega_n = \sqrt{(\pi g/L)\tanh(\pi H/L)}$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. (ABRAMSON, 1966; DODGE, 2000; IBRAHIM, 2005).

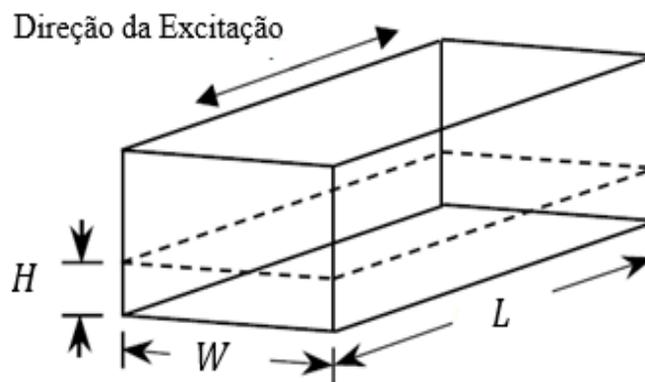


Figura 6.1 – Parâmetros do ALS de geometria retangular.

### 6.2 Parâmetros adimensionais do ALS

Nesta seção serão apresentados os parâmetros adimensionais relevantes para o problema em questão, sendo estes fundamentais para a análise e discussão dos resultados obtidos. Os parâmetros adimensionais que governam o problema de controle de vibrações são a razão de sintonização  $\gamma = \omega_1/\omega_p$ , em que  $\omega_1$  é a frequência natural do ALS e  $\omega_p$  é a frequência fundamental da estrutura-principal. Outro parâmetro significativo que afeta a resposta do sistema estrutura - ALS

é a razão de massa  $\mu$  definida por  $\mu = m_1/m_p$ , onde  $m_1$  é a massa efetiva do ALS (massa de água que participa do movimento do líquido *sloshing* no tanque), e  $m_p$  é a massa da estrutura- principal no modo de vibração a ser controlado. (A massa efetiva  $m_1$  é uma porcentagem de  $m_f$ , dita porcentagem é dada pela expressão  $8(L/H)\tanh(\pi H/L)/\pi^3$ , apresentada na Tabela 3.2 parâmetros equivalentes de *sloshing*).

Um outro parâmetro chave que influencia no desempenho de um sistema estrutura - ALS é a razão de amortecimento viscoso do fluido  $\xi_1$ . Warburton (1982) estabeleceu uma expressão para a determinação de amortecimento viscoso ótimo para um AMS como uma função da razão de massa  $\mu$ . A principal fonte de amortecimento do movimento *sloshing* ao interior de um tanque sem dispositivos de amortecimento adicional (*baffles, screens*, fundo de profundidade variável), surge da dissipação viscosa na camada limite do fluido no contorno nas paredes do tanque, e da mistura de ar e água (bolhas) na superfície, originado pela agitação do fluido.

Assumindo-se a teoria linear, o amortecimento viscoso do líquido devido ao *sloshing*, no interior de um tanque retangular sem dispositivos adicionais de perda de energia, foi estimada por Sun (1991) para ser  $\xi_1 = (1/2H)\sqrt{2\nu/\omega_1}(1 + H/W)$ , onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do líquido. Neste caso água  $\nu = 1.0020 \times 10^{-3}$ . Por último, tem-se o parâmetro denominado de razão de frequência de excitação  $\beta$ , dado por  $\beta = \Omega/\omega_p$ , em que  $\Omega$  é a frequência de excitação.

### 6.3 Modelo adimensional

Nesta seção, adiciona-se ao modelo mecânico equivalente do problema de Cooker equação (4.30) (validado em vibração livre por resultados experimentais e analíticos), a matriz de amortecimento, coeficiente de amortecimento da estrutura-principal correspondente ao modo de vibração a ser controlado  $c_p$  e coeficiente de amortecimento do fluido  $c_1$ , Dessa forma, a equação de movimento na forma matricial torna-se:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1)l_p^2 & m_1l_1l_p \\ m_1l_1l_p & m_1l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_p & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1)l_p g & 0 \\ 0 & m_1l_1 g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Considerando que o amortecimento da estrutura e do fluido são desacoplados, pode-se substituir  $c_p$  por  $2\xi_p m_p l_p^2 \sqrt{g/l_p}$  e  $c_1$  por  $2\xi_1 m_1 l_1^2 \sqrt{g/l_1}$ , onde  $\xi_p$  representa a razão de

amortecimento da estrutura e  $\xi_1$  a razão de amortecimento do fluido (para o modo fundamental de *sloshing*). Como  $m_g = m_p + m_0$  e  $m_0 + m_1 = m_f$ , a equação (6.1) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} (m_p + m_f)l_p^2 & m_1 l_1 l_p \\ m_1 l_1 l_p & m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_p m_p l_p^2 \omega_p & 0 \\ 0 & 2\xi_1 m_1 l_1^2 \omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_p + m_f)l_p g & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

O modelo matemático apresentado na equação (6.2) é esquematizado na Figura 6.2 a seguir, na qual indica-se os parâmetros adimensionais analisados por varredura na técnica de otimização de mapa de respostas.

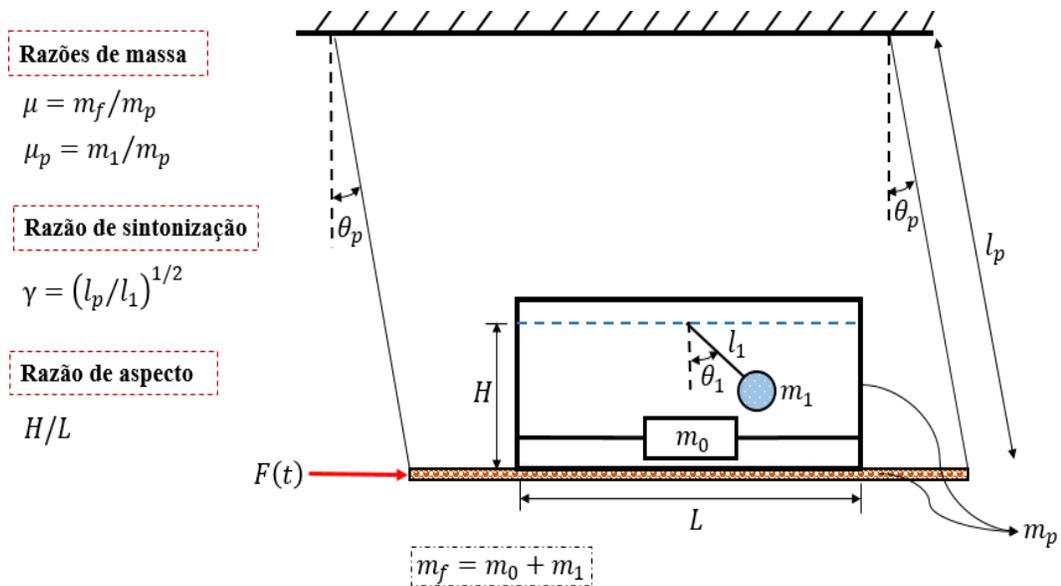


Figura 6.2 – Modelo pêndulo duplo.

Para um sistema com  $n + 1$  graus de liberdade a equação matricial de movimento com uma excitação externa é dada pela equação (6.3)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (m_p + m_f)l_p^2 & m_1 l_1 l_p & m_2 l_2 l_p & \cdots & m_n l_n l_p \\ m_1 l_1 l_p & m_1 l_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ m_2 l_2 l_p & 0 & m_2 l_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n l_n l_p & 0 & 0 & \cdots & m_n l_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} 2\xi_p m_p l_p^2 \omega_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_1 m_1 l_1^2 \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_2 m_2 l_2^2 \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\xi_n m_n l_n^2 \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{Bmatrix} \quad (6.3) \\
+ & \begin{bmatrix} (m_p + m_f)l_p g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n l_n g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Para a construção do mapa de respostas explicado em detalhe a seguir na seção 6.4, definem-se os parâmetros adimensionais mostrados na Figura 6.2, estes parâmetros adimensionais encontram-se no modelo quando se realizam manipulações algébricas. Para o modelo analisado, ao dividir a equação (6.2) (equação de movimento do sistema) pelo termo  $(m_p l_1^2)$ , obtém-se inicialmente uma relação de comprimentos de pêndulo  $l_p/l_1$ , a raiz quadrada desta relação chega numa expressão análoga da razão de sintonização  $\gamma = \sqrt{(\pi g/L) \tanh(\pi H/L)} / \sqrt{g/l_p} = (l_p/l_1)^{1/2}$ . Posteriormente foram identificadas duas razões de massa, a primeira razão de massa  $\mu_p = m_1/m_p$  relaciona a massa do líquido *sloshing* no modo fundamental  $m_1$  com a massa do pêndulo  $m_p$ . Uma segunda razão de massa é  $\mu = m_f/m_p$  surge no trabalho de Sousa Neto (2018) e relaciona toda a massa de fluido no interior do tanque  $m_f$  (incluindo a massa fixa do fundo) com a massa do pêndulo. Esta segunda razão de massa possibilita a inclusão do parâmetro adimensional razão de aspecto  $H/L$  na análise, como indica-se a continuação, A partir da relação de massas  $m_1/m_f$  conforme apresentado na Tabela 3.2 cuja expressão matemática é igual a  $\tanh[\pi(H/L)]/\pi^3(H/L)$ , é possível

mediante artifício algébrico (ao multiplicar pela expressão  $m_p/m_p$  de valor unitário) como indica-se na equação (6.4)

$$\frac{m_1 m_p}{m_f m_p} = \frac{m_1 m_p}{m_p m_f} = \frac{\mu_p}{\mu} = \frac{8 \tanh[\pi(H/L)]}{\pi^3(H/L)} \quad (6.4)$$

chegar nas razões de massa  $\mu_p$  e  $\mu$  mencionadas acima, e estabelecer  $\mu_p$  em função de  $\mu$  e  $H/L$  como,

$$\mu_p = 8\mu \tanh(\pi H/L) / \pi^3(H/L) \quad (6.5)$$

Por último tem-se as razões de amortecimento do fluido e da estrutura, respectivamente,  $\xi_1$ ,  $\xi_p$  e a frequência natural do ALS igual a  $\omega_1 = \sqrt{g/l_1}$ .

Substituindo as considerações anteriores no modelo equação (6.2) obtêm-se as equações adimensionalizadas do sistema:

$$(1 + \mu)\gamma \ddot{\theta}_p(t) + \mu_p \gamma^{1/2} \ddot{\theta}_1(t) + 2\xi_p \gamma \omega_p \dot{\theta}_p(t) + (1 + \mu)\gamma^{1/2} \omega_1^2 \theta_p(t) = \frac{F(t)}{m_p l_1^2} \quad (6.6)$$

e,

$$\mu_p \gamma^{1/2} \ddot{\theta}_p(t) + \mu_p \ddot{\theta}_1(t) + 2\xi_1 \mu_p \omega_1 \dot{\theta}_1(t) + \mu_p \omega_1^2 \theta_1(t) = 0 \quad (6.7)$$

A equação do modelo na forma matricial adimensional

$$\begin{bmatrix} (1 + \mu)\gamma & \mu_p \gamma^{1/2} \\ \mu_p \gamma^{1/2} & \mu_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_p \gamma \omega_p & 0 \\ 0 & 2\xi_1 \mu_p \omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 + \mu)\gamma^{1/2} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_p \omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Incluindo o amortecimento, a expressão para a solução no domínio da frequência da equação matricial de movimento (6.8) com a excitação  $F(t)$  é

$$[K + i\Omega C - \Omega^2 M][\vec{X}] = [\vec{F}(t)] \quad (6.9)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez adimensional da equação (6.8),

$\vec{X}$  é o vetor de amplitude de resposta para  $\theta_p$  e  $\theta_1$  igual a  $[H_{\theta_p}; H_{\theta_1}]$  e  $\vec{F}$  é o vetor de excitação igual

a [1; 0], o valor unitário destaca uma excitação unitária do tipo ruído branco; Desta forma a matriz de impedância dinâmica como visto no capítulo 4, torna-se  $K(\Omega) = [K + i\Omega C - \Omega^2 M]$ , e é descrita como:

$$K(\Omega) = \begin{bmatrix} (1 + \mu)\gamma^{1/2}\omega_1^2 + 2i\xi_p\gamma\omega_p\Omega - \Omega^2(1 + \mu)\gamma & -\Omega^2\mu_p\gamma^{1/2} \\ -\Omega^2\mu_p\gamma^{1/2} & \mu_p\omega_1^2 + 2i\xi_1\mu_p\omega_1\Omega - \Omega^2\mu_p \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Resolvendo-se o sistema de equações lineares, pela regra de Cramer, obtemos as funções de amplitude de resposta  $H_{\theta p}(\Omega)$  e  $H_{\theta 1}(\Omega)$  no domínio da frequência.

$$H_{\theta p}(\Omega) = \frac{\Omega^2 B_{\theta p 2} + i\Omega B_{\theta p 1} + B_{\theta p 0}}{\Omega^4 A_4 + i\Omega^3 A_3 + \omega^2 A_2 + i\Omega A_1 + A_0} \quad (6.11)$$

$$H_{\theta 1}(\Omega) = \frac{\Omega^2 B_{\theta 1 2} + i\Omega B_{\theta 1 1} + B_{\theta 1 0}}{\Omega^4 A_4 + i\Omega^3 A_3 + \Omega^2 A_2 + i\Omega A_1 + A_0} \quad (6.12)$$

sendo:

$$B_{\theta p 0} = \mu_p \omega_1^2; \quad B_{\theta p 1} = 2\xi_1 \mu_p \omega_1; \quad B_{\theta p 2} = -\mu_p \quad (\text{Estrutura - pêndulo})$$

$$B_{\theta 1 0} = 0; \quad B_{\theta 1 1} = 0; \quad B_{\theta 1 2} = \gamma^{1/2} \mu_p \quad (\text{Sloshing equivalente - pêndulo})$$

$$A_0 = \gamma^{1/2} \mu_p \omega_1^4 + \gamma^{1/2} \mu_p \mu \omega_1^4$$

$$A_1 = 2\xi_1 \gamma^{1/2} \mu_p \omega_1^3 + 2\xi_1 \gamma^{1/2} \mu_p \mu \omega_1^3 + 2\xi_p \gamma^{1/2} \mu_p \omega_1^2 \omega_p$$

$$A_2 = -\gamma \mu_p \omega_1^2 - \gamma^{1/2} \mu_p \omega_1^2 - \gamma^{1/2} \mu_p \mu \omega_1^2 - \gamma \mu_p \mu \omega_1^2 - 4\gamma^{1/2} \mu_p \xi_1 \xi_p \omega_1 \omega_p$$

$$A_3 = -2\xi_1 \gamma \mu_p \omega_1 - 2\xi_p \gamma^{1/2} \mu_p \omega_p - 2\xi_1 \gamma \mu_p \mu \omega_1$$

$$A_4 = \gamma \mu_p - \gamma \mu_p^2 + \gamma \mu_p \mu$$

## 6.4 Mapas de respostas

Para o modelo estudado (pêndulo duplo) definem-se parâmetros adimensionais  $\mu$ ,  $\mu_p$ ,  $H/L$ ,  $\gamma$  e  $\xi_1$ , e objetiva-se analisar a sensibilidade ou influência destes, na resposta dinâmica do sistema. Para esta finalidade determinou-se uma função objetivo que avalia todos os parâmetros do sistema em relação de uma única saída, esta saída é a amplitude de resposta em frequência  $H_{\theta_p}(\Omega)$ , a qual mostra-se como um ótimo indicador de vibrações excessivas. Para reduzir os picos de resposta em frequência do pêndulo principal procuram-se configurações ótimas do ALS (modelo equivalente de *sloshing* tipo pêndulo) que ao interagir com as propriedades do pêndulo principal mitiguem as suas amplitudes de resposta.

A técnica de otimização por mapa de respostas, opera como uma análise por varredura de parâmetros adimensionais, gerando como solução gráfica do tipo superfície ou mapa, este mapa apresenta informações qualitativa e quantitativa das combinações de parâmetros que minimizam a amplitude de resposta, os quais são identificados visualmente como conjunto de pontos de menor amplitude e que conformam vales ou lócus geométricos dentro do espaço solução. As primeiras verificações deste estudo procuram as dimensões do ALS com geometria  $H$ ,  $L$  e  $W$  ótima para controlar inicialmente os pêndulos estudados experimentalmente no Capítulo 5. Estes pêndulos numa primeira abordagem representam conceitualmente a estrutura principal.

Na implementação do mapa de respostas, a função de resposta em frequência equação (6.11) do pêndulo principal (ou estrutura principal) contém dentro sua expressão matemática a razão de sintonização  $\gamma$ , a razão de massa líquida total,  $\mu$  e discreta,  $\mu_p$ , a razão de amortecimento do líquido *sloshing*  $\xi_1$  e as frequências naturais desacopladas do sistema pêndulo principal  $\omega_p$  e *sloshing* pêndulo  $\omega_1$ .

O mapa de respostas é confeccionado como a relação entre a razão de sintonização  $\gamma$ , a razão de massa  $\mu$  e a razão de aspecto  $H/L$  em função da amplitude de resposta máxima  $\max(H_{\theta_p}(\Omega))$ . Na implementação emprega-se o logaritmo natural máximo absoluto da amplitude da resposta em frequência do pêndulo principal  $\ln(\max|H_{\theta_p}(\Omega)|)$ , esta função inicialmente foi trabalhada por Colherinhas (2016) na otimização de um sistema absorvedor de massa sintonizada AMS no formato tipo pêndulo.

Estas amplitudes contêm os valores máximos das *FRFs* obtidas por análise harmônica através da varredura de combinações de  $\gamma$  e  $\mu$ . Os valores fixados no programa são a razão de aspecto e as razões de amortecimento viscoso da estrutura e do fluido, sendo para esses valores que será realizada a variação paramétrica. Expressões como a frequência natural desacoplada do pêndulo *sloshing*,  $\omega_1 = \sqrt{g/l_1}$ , são tratadas na implementação como  $\omega_1 = \gamma\sqrt{g/l_p}$  sendo  $\gamma$  o parâmetro a ser estudado por varredura.

Na Figura 6.3 apresenta-se a implementação no *MATLAB* da equação (6.11) responsável pelos mapas de resposta mostrados a seguir, sobre os quais será feita a variação paramétrica e se estimará qualitativa e quantitativamente as respostas de menor valor. Sendo na linha (1)  $\xi_1$ ,  $\xi_p$  e  $H/L$  os valores fixados sobre os que será feita a varredura dos vetores  $\vec{\gamma}$  e  $\vec{\mu}$  linhas (2) e (3). Na linha (4)  $H$  é uma matriz de zeros de tamanho igual ao domínio a ser estudado que aloca os valores das amplitudes máximas. Linhas (5) e (6) geram a superfície de combinações  $\vec{\gamma}$  e  $\vec{\mu}$ , linha (7) calcula equação (6.11) para cada combinação; finalmente a linha (9) plota o mapa.

```

-----
(1)   $\xi_1, \xi_p, H/L$ 
(2)   $\gamma = \sqrt{(0.001:0.01/2:2.25)}$ ;
(3)   $\mu = 0.001:0.01/2:0.5$ ;
(4)   $H = \text{zeros}(\text{length}(\gamma), \text{length}(\mu))$ 
(5)   $\text{for } i = 1:\text{length}(\gamma)$ 
(6)   $\left[ \begin{array}{l} \text{for } j = 1:\text{length}(\mu) \\ \quad H(i,j) = \max |H_{\theta_p}(\gamma(i), \mu(j))| \\ \quad \text{end} \end{array} \right]$ 
(7)   $\left[ \begin{array}{l} \text{end} \end{array} \right]$ 
(8)   $[X, Y] = \text{meshgrid}(\gamma, \mu)$ 
(9)   $\text{surf}(X, Y, \ln(H'))$ 
-----

```

Figura 6.3 – Implementação computacional do mapa de respostas.

Na Figura 6.4 pode-se observar que cada ponto  $(\gamma, \mu)$  sobre os mapas de resposta, correspondem num pico máximo da *FRF* obtida usando os valores  $\gamma$  e  $\mu$  respectivos, os parâmetros fixos a serem estudados, para as superfícies apresentadas na Figura 6.3, são  $\xi_p = 0$  e  $\xi_1 = 0,05$ . Foram marcados 3 pontos aleatórios  $(0,1049; 0,066; 6,349)$ ,  $(0,867; 0,246; -0,693)$  e  $(0,419; 0,276; 2,284)$  sobre a superfície, do lado plotou-se o gráfico da *FRF*, mostrando que o pico máximo de cada *FRF* foi o valor marcado nas superfícies de respostas respectivas.

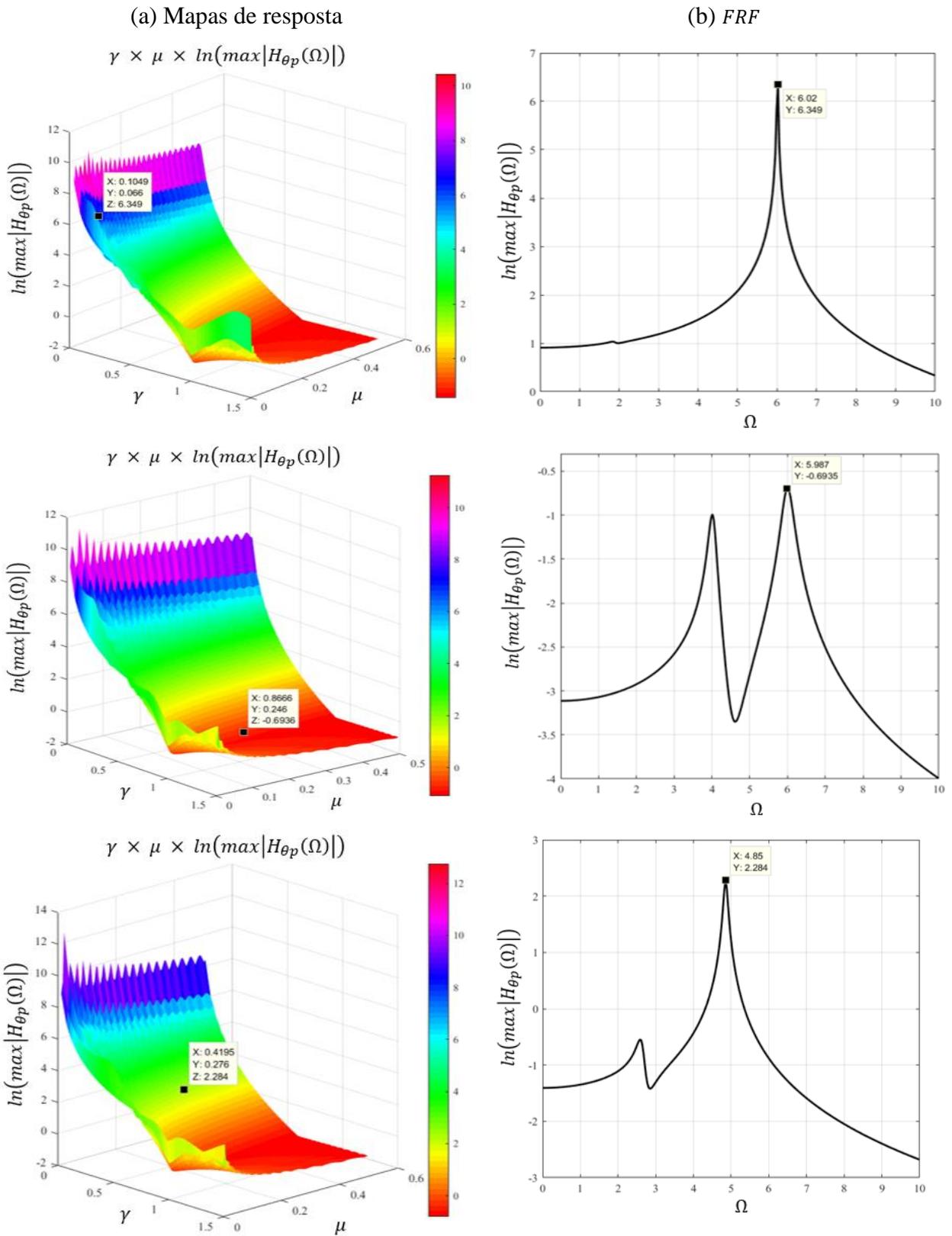


Figura 6.4 – Técnica de otimização (a) Mapa de respostas, (b) FRF em função de  $\gamma$  e  $\mu$ .

Desta forma, qualitativa e quantitativamente consegue-se definir os pontos  $(\gamma, \mu)$  de menor amplitude, a Figura 6.5 identifica mediante uma linha hachurada de cor branca, o vale ou locus geométrico, que seria um conjunto de pontos solução. Na Figura 6.5 identifica-se uma espinha acentuada ou uma localização geométrica de pontos mínimos locais, bem no início do vale de menores amplitudes ou parte mais baixa da superfície, a sua vez, esta linha curva (— \* —) de cor branca divide o mapa em dois, maiores e menores amplitudes, esta espinha inicia para um valor de sintonização igual a 1, para todas as variações de interesse.

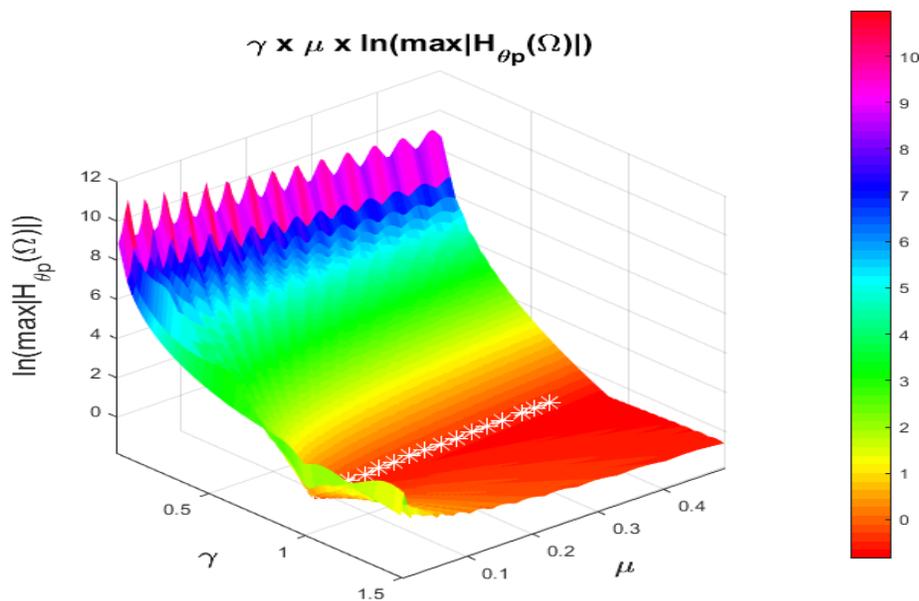


Figura 6.5 – Mapa de respostas indicando linha curva (— \* —) de valores com amplitude mínima.

Desta forma, inicia-se a análise paramétrica com a qual objetiva estudar os parâmetros que governam o sistema e determinar os parâmetros que são mais sensíveis nas mudanças da resposta. Inicialmente configura-se uma estrutura com amortecimento zero, para entender melhor o papel do amortecimento viscoso do fluido no fenômeno.

#### 6.4.1 Análise do mapa de respostas sem amortecimento $\xi_p = \xi_1 = 0$

A Figura 6.6 apresenta um caso de mapa de resposta sem amortecimento, nota-se a grande sensibilidade do sistema ante este parâmetro, a superfície é inconclusiva, o amortecimento do fluido indica ser um parâmetro que governa este tipo de modelos.

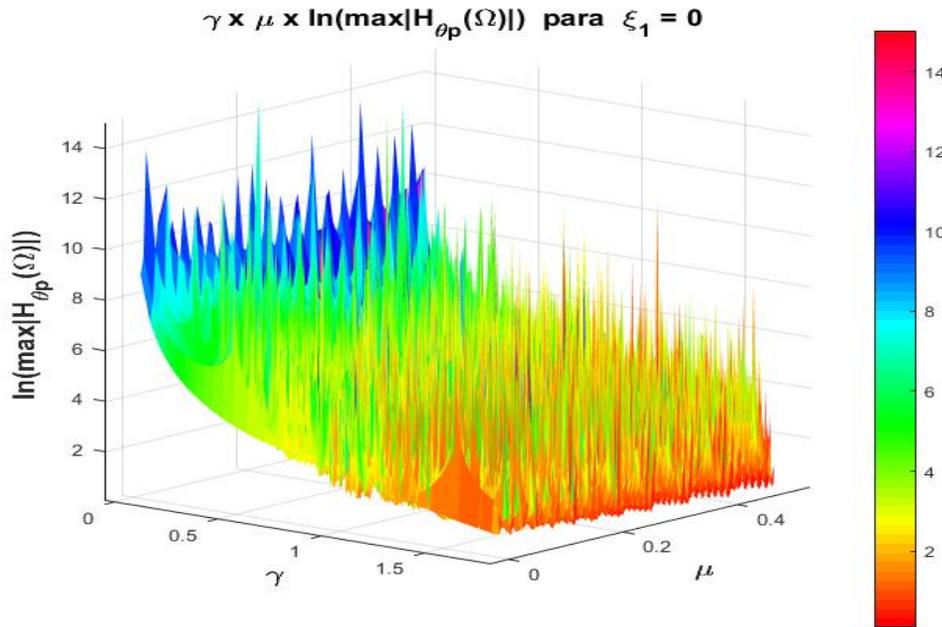


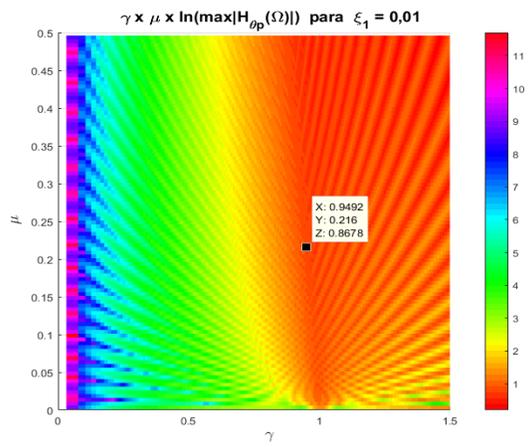
Figura 6.6 – Mapa de respostas sem adição de amortecimento. Inspirado em (SOUSA NETO, 2018).

Sem amortecimento, tem-se picos de resposta com amplitudes aleatórias. Resultado similar pode-se observar no trabalho de Sousa Neto (2018), constatando assim que o amortecimento da superfície livre é fundamental para obter resultados ponderáveis. A seguir configura-se uma análise da influência da razão de amortecimento e razão aspecto nas soluções.

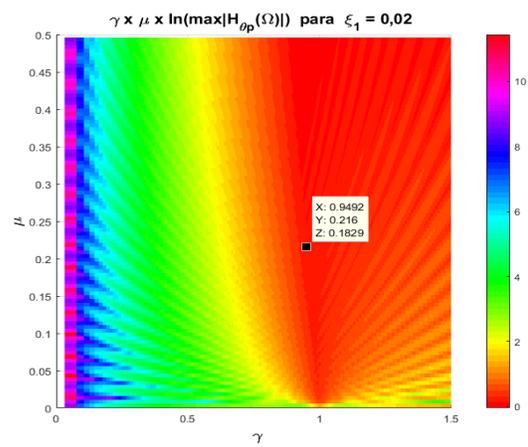
#### 6.4.2 Influência do amortecimento do fluido

Tomando como base uma razão de aspecto  $H/L$  de 0,35, amortecimento da estrutura  $\xi_p = 0$  e a razão de amortecimento do fluido variando entre 1% e 60%. As Figuras 6.7 e 6.8 analisam um mesmo ponto no plano  $\gamma, \mu$ . Observa-se, como para as primeiras 7 das 12 razões de amortecimento analisadas  $\xi_1 = [0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6]$ , isto é, entre 1% e 10% o formato do gráfico conserva-se inalterável, configura-se uma espinha ou uma linha curva de valores mínimos acentuados e limita o início do vale de amplitudes mínimas. Para este intervalo de valores  $\xi_1$ , as amplitudes de resposta são proporcionalmente menores com o incremento do amortecimento; Já para razões de amortecimento entre 10% e 60% o gráfico apresenta-se como um plano, sem vales e as amplitudes de resposta são maiores, proporcionalmente com o incremento do amortecimento.

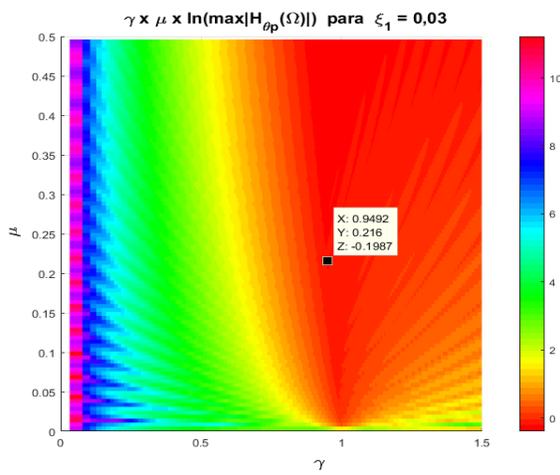
a)



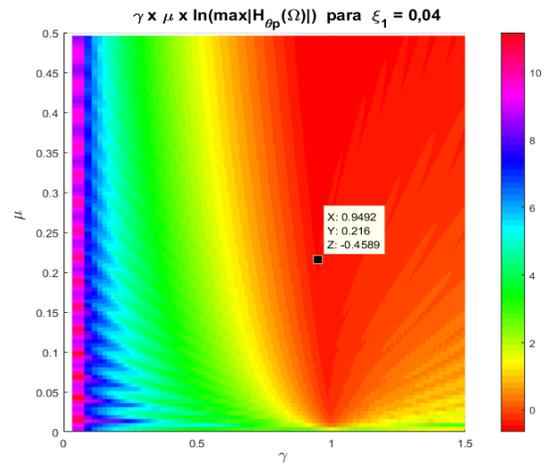
b)



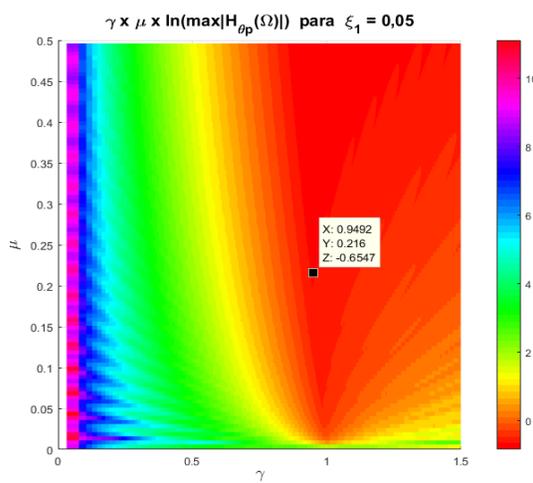
c)



d)



e)



f)

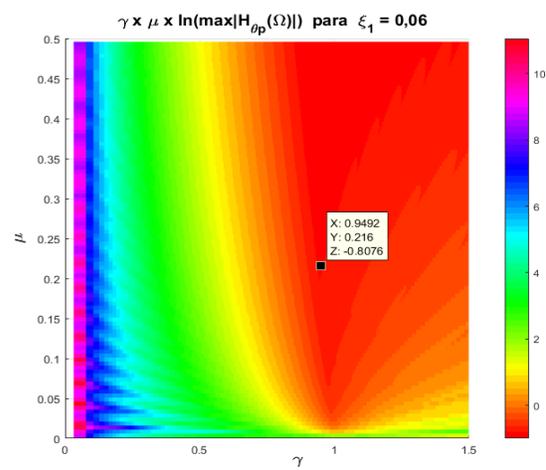
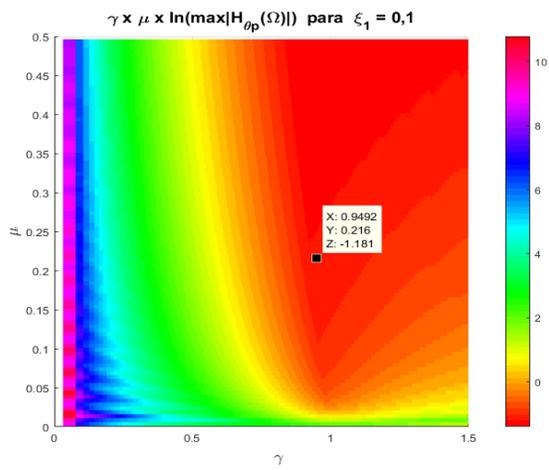
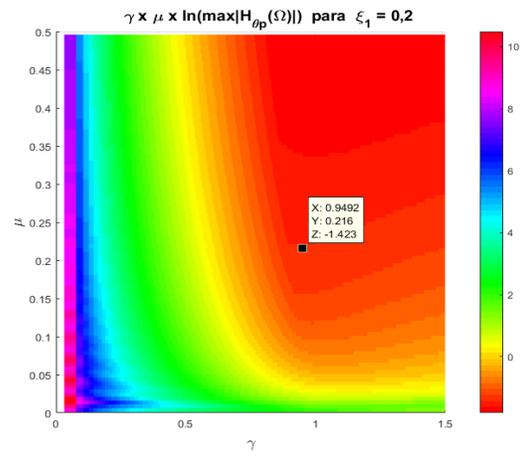


Figura 6.7 – As figuras de (a) até (f) configuram o intervalo  $\xi_1$  de 0,01 até 0,06.

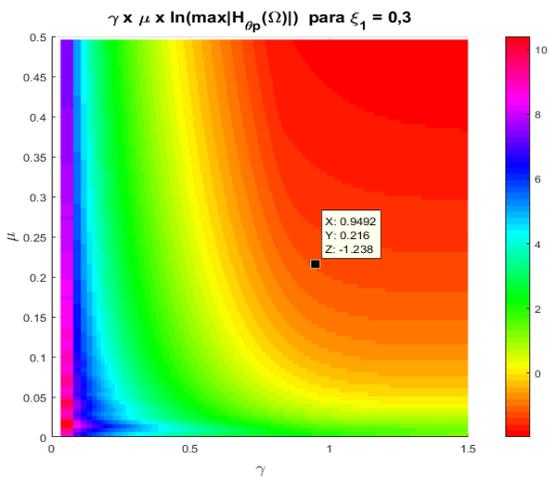
**g)**



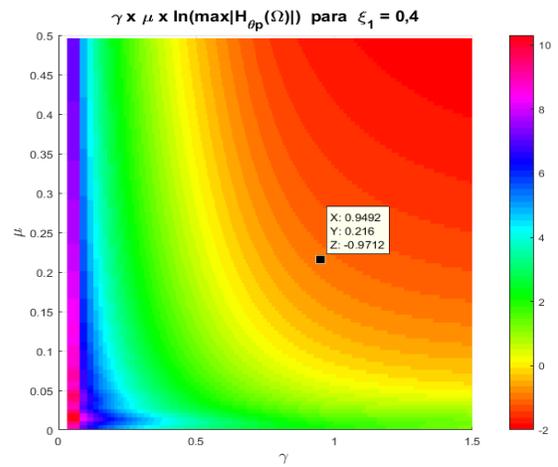
**h)**



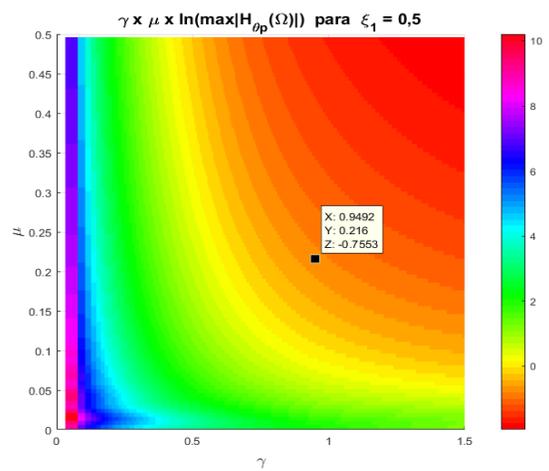
**i)**



**j)**



**k)**



**l)**

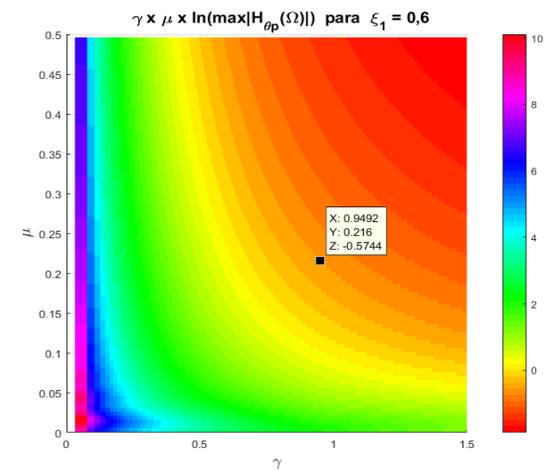


Figura 6.8 – As figuras de (g) até (l) configuram o intervalo  $\xi_1$  de 0, 1 até 0,6.

Como conclusão da análise qualitativa das Figuras 6.7 e 6.8 acima apresentadas, percebe-se um comportamento padrão do local geométrico das soluções ótimas para razões de amortecimento no intervalo  $(0,01 \leq \xi_1 < 0,1)$  o qual satisfaz as expectativas da adimensionalização (isto é, o formato do mapa de respostas não apresenta mudanças). Para valores maiores de  $(0,1 < \xi_1 \leq 0,6)$  os resultados são inconclusivos, o mapa de respostas apresenta-se como uma superfície quase plana, sem se conseguir a identificação de valores mínimos.

Nas Figuras 6.9 e 6.10 configura-se uma análise com a ferramenta apresentada neste capítulo e é estudada a sensibilidade da amplitude de resposta  $H_{\theta_p}$  do modelo (pêndulo duplo ou estrutura pêndulo + ALS equivalente), em relação a razão de amortecimento viscoso do fluido e razão de aspecto.

O modelo (equação 6.11) foi alimentado com os dados experimentais dos três pêndulos  $l_p = [258,407,538]mm$  apresentados nas bancadas pêndulo de Cooker (*P. d. C*) Capítulo 5.

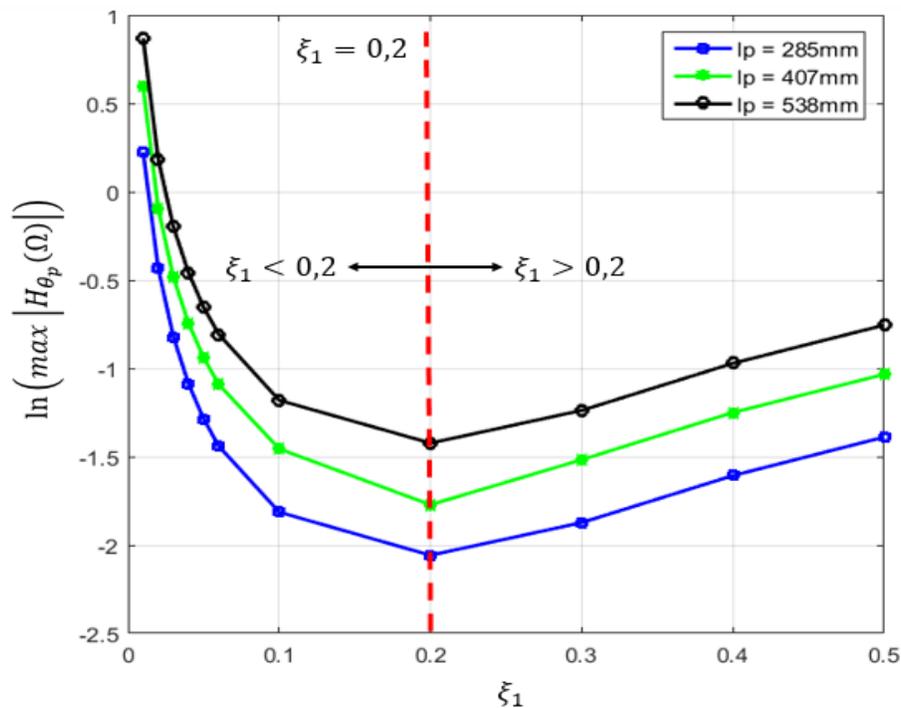


Figura 6.9 – Variação da razão de amortecimento do fluido vs. amplitude do sistema principal.

Na tabela 6.1 apresenta-se os valores numéricos desta simulação.

Tabela 6.1 – Variação da razão de amortecimento do fluido vs. amplitude do sistema principal.

$\xi_1$	$\ln(\max  H_{\theta_p}(\Omega) )$		
	$l_p = 285 \text{ mm}$	$l_p = 407 \text{ mm}$	$l_p = 538 \text{ mm}$
0,01	0,223	-0,5942	0,8678
0,02	-0,435	-0,0545	0,1829
0,03	-0,822	-0,9393	-0,1987
0,04	-1,088	-0,7446	-0,4589
0,05	-1,286	-0,9393	-0,6547
0,06	-1,44	-1,091	-0,8076
0,1	-1,44	-1,456	-1,181
0,2	-2,058	-1,772	-1,423
0,3	-1,607	-1,517	-1,238
0,4	-1,44	-1,25	-0,9712
0,5	-1,389	-1,034	-0,7553

Na Figura 6.9 observou-se como os três pêndulos reduzem sua amplitude de resposta para razões de amortecimento do fluido  $\xi_1 \leq 0,2$ . Para razões de amortecimento do fluido  $\xi_1 > 0,2$  o efeito do líquido no tanque amplifica a resposta dinâmica, gerando um efeito contrário para o qual é utilizado. Pode-se inferir que ter um fluido muito viscoso operando como uma pasta gera maior massa morta, e é inconveniente, cada comprimento  $l_p$  de pêndulo contextualiza uma frequência fundamental de estrutura principal diferente. O comportamento geral para os três casos é similar independente de serem três casos diferentes.

### 6.4.3 Influência da variação da razão de aspecto

Na Figura 6.10 os três pêndulos analisados apresentam uma redução de amplitude de resposta utilizando razões de aspecto  $H/L < 0,5$ , Para  $H/L > 0,5$  a resposta do sistema parece amplificar em maior proporção do que reduziu.

O valor de razão de aspecto  $H/L = 0,5$  segundo indicado na Figura 6.10 mostra-se como um valor crítico deste parâmetro em função da redução de amplitude, e é este valor que divide o comportamento do sistema de redução da amplificação.

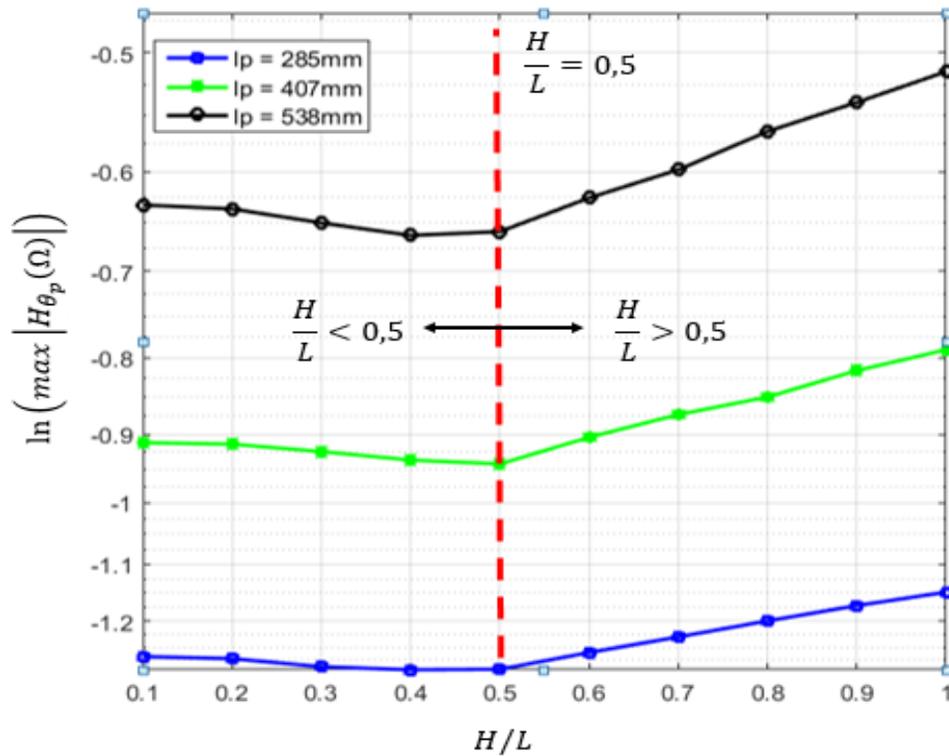


Figura 6.10 – Variação da razão de aspecto vs. Amplitude de resposta com  $\xi_1 = 0,05$ .

A sensibilidade da amplitude de resposta para a variação do parâmetro de razão de aspecto  $H/L$ , mostra-se mais significativa para o pêndulo de maior comprimento (frequência fundamental menor), a menor influência da variação deste parâmetro ( $H/L$ ), foi observada para o pêndulo de menor comprimento (frequência fundamental maior); Os três comprimentos de pêndulos amplificam a resposta em proporção semelhante para razões de aspecto maiores que 0,5.

Com isto pode-se concluir que tem um valor na razão de aspecto que gera um efeito prejudicial na redução da amplitude de resposta, e que o parâmetro que apresenta maior sensibilidade no modelo é o amortecimento viscoso do fluido, pequenas mudanças geram maiores variações na resposta do sistema principal. A tabela 6.2 apresenta os valores numéricos desta simulação.

Tabela 6.2 – Variação da razão de preenchimento vs. amplitude do sistema principal

$\ln(\max  H_{\theta_p}(\Omega) )$			
$H/L$	$l_p = 285 \text{ mm}$	$l_p = 407 \text{ mm}$	$l_p = 538 \text{ mm}$
0,1	-1,268	-0,912	-0,632
0,2	-1,272	-0,914	-0,636
0,3	-1,288	-0,924	-0,65
0,4	-1,294	-0,937	-0,662
0,5	-1,293	-0,942	-0,658
0,6	-1,26	-0,904	-0,625
0,7	-1,23	-0,873	-0,598
0,8	-1,2	-0,85	-0,564
0,9	-1,172	-0,816	-0,539
1,0	-1,148	-0,79	-0,514

A relação do  $l_p$  com a estrutura real edifício alto (estudado neste trabalho), está na frequência natural, já que com modelos experimentais e analíticos tipo pêndulo pode-se replicar frequências fundamentais deste tipo de estruturas.

## 6.5 Construção do mapa de respostas ótimo

Desta forma, com os estudos preliminares apresentados, objetiva-se a elaboração de um mapa de respostas ótimo do tipo ábaco, no qual possam ser estudados um intervalo de casos de projetos de edifícios altos reais num mesmo domínio comum (plano de razão de sintonização  $\gamma$  e razão de massa  $\mu$ ).

A fim de obter curvas de otimização do problema, variou-se a razão de aspecto  $H/L$  em 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 com fatores de amortecimento fixos em  $\xi_p = \xi_1 = 0,05$ .

Em seguida, confeccionou-se o lugar geométrico das menores amplitudes no plano  $(\gamma, \mu)$ . A Figura 6.11 faz parte dos escopos do presente capítulo e busca a partir da identificação das menores amplitudes de resposta direcionar a análise para recomendações de projeto de *ALS*. Podendo chegar na determinação de dimensões de reservatórios que se integrem adequadamente a plantas arquitetônicas de edifícios reais.

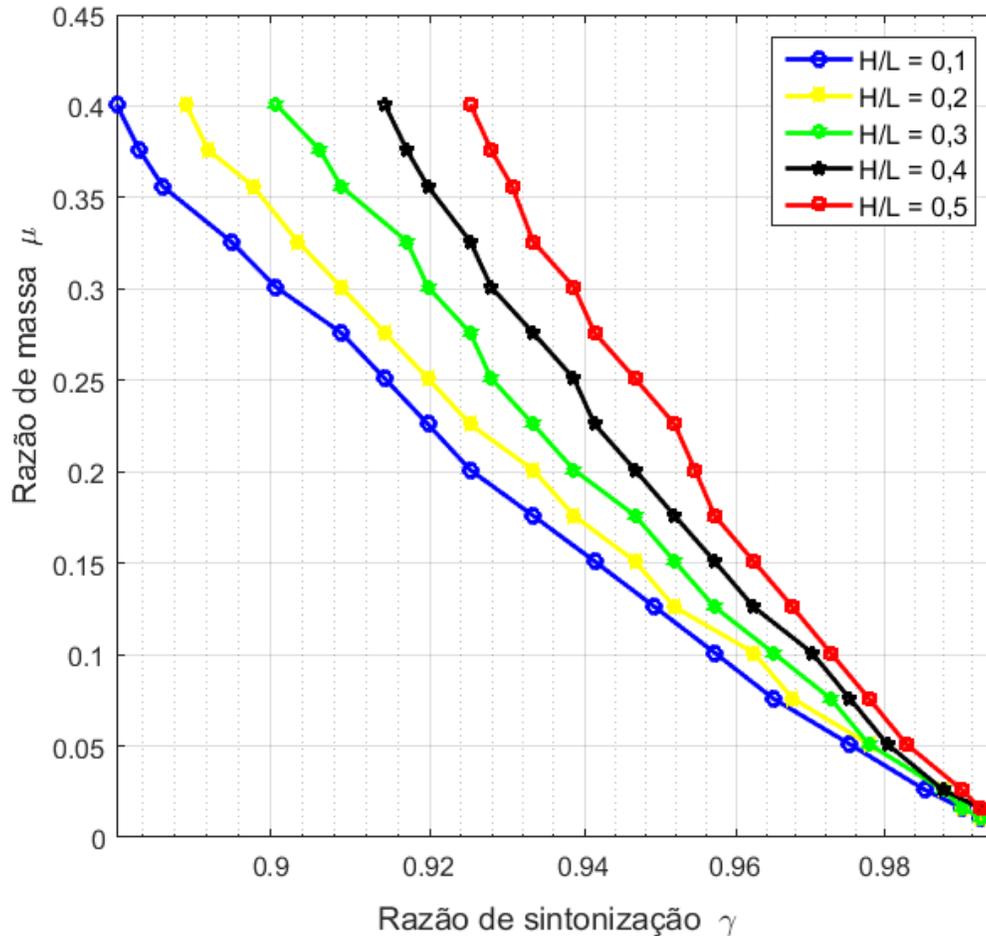


Figura 6.11 – Curvas de menor amplitude para várias razões de aspecto  $H/L$  no mapa de respostas

Na Figura 6.11, as trajetórias para os diferentes  $H/L$  apresentam uma tendência lineal algumas mudanças bruscas acontecem devido ao número de elementos (baixa discretização) nos vetores varredura  $\vec{\gamma}$  e  $\vec{\mu}$  que geram o plano de estudo, ou plano de razão de sintonização e razão de massas.

A seguir, determina-se mediante a ferramenta de ajuste de curva do *MATLAB*, a equação (6.13) que aproxima as trajetórias da Figura 6.11, as quais como apresentado conceitualmente na Figura 6.5, detalham os pontos de menor amplitude de resposta no plano  $(\gamma, \mu)$ .

$$\mu\left(\frac{H}{L}, \gamma\right) = \left(6,65 \frac{H}{L} + 1,985\right) (1 - \gamma) \quad (6.13)$$

## 6.6 Determinação do ALS ótimo

Para a determinação da configuração ótima do ALS retangular Figura 6.1, obtêm-se as abcissas  $\gamma$  e ordenadas  $\mu$  que conformam as trajetórias de amplitudes mínimas do sistema principal identificadas sobre o mapa de respostas na Figura 6.11. Assim, conhecendo valores para  $\gamma$  e  $\mu$  obtidos das funções de ajuste, substituindo-os nas suas respectivas definições matemáticas,  $\gamma = \omega_1/\omega_p$  e  $\mu = m_f/m_p$ , utilizando-se as expressões para  $l_1$  e  $m_f$  apresentadas no Capítulo 3 e efetuando a respectiva manipulação algébrica, chega-se em vetores solução para as variáveis incógnitas  $L, H$  e  $W$ . A Figura 6.12 apresenta um esquema de como utilizar o ábaco de respostas ótimo.

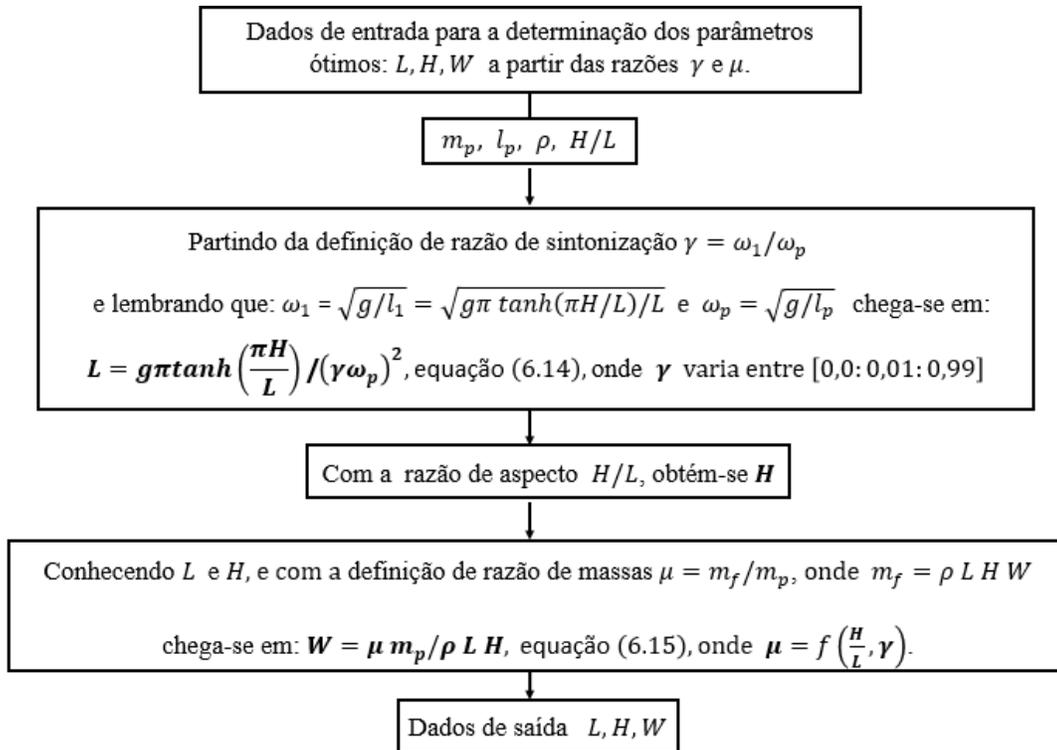


Figura 6.12 – Esquema para utilização do ábaco de resposta ótima Figura 6.11.

Como caso de exemplo, pretende-se conhecer as dimensões ótimas de um ALS retangular para controlar as vibrações de um pêndulo com  $l_p = 538 \text{ mm}$  ( $\omega_p = 4,2638 \text{ rad/s}$ ) e  $m_p = 2454 \text{ gr}$  como o apresentado nos ensaios experimentais, (ver capítulo 5, seção 5.1.2) . Supondo a frequência natural do pêndulo da bancada experimental como a frequência fundamental de um

edifício alto que pretende-se controlar, temos assim um caso de projeto de *ALS*. Mediante os resultados apresentados neste capítulo pode-se projetar ou estimar um *ALS* retangular com dimensões ótimas, que possa reduzir a amplitude de vibração do sistema desejado.

Partindo da frequência natural  $\omega_p = 4,2638 \text{ rad/s}$  ( $l_p = 0,538 \text{ m}$ ), assumindo um valor de razão de aspecto  $H/L = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5]$ , um valor  $\tilde{\gamma}$  ou vetor  $\vec{\gamma}$  de valores de razão de sintonização, na equação (6.14), obtém-se como resultado um valor  $\tilde{L}$  ou vetor  $\vec{L}$  de comprimento de *ALS* ótimo.

Ao assumir um  $H/L = 0,1$ , obteve-se  $\tilde{H} = 0,1\tilde{L}$  ou  $\vec{H} = 0,1\vec{L}$  para o caso de estudo. Com valores de altura do líquido  $H$  e comprimento de *ALS*,  $L$  e usando a equação (6.15) conforme Figura 6.12, determinam-se dados  $\tilde{W}$  ou  $\vec{W}$ . Na tabela 6.3 apresentam-se os resultados do procedimento.

Tabela 6.3 – Configurações geométricas de *ALS* ótimo

Caso de exemplo: Bancada pêndulo de Cooker  $l_p = 538 \text{ mm}$  e  $m_p = 2454 \text{ gr}$

$L \text{ (m)}$	$H \text{ (m)}$	$W \text{ (m)}$
0,664	0,066	0,022
0,649	0,065	0,021
0,635	0,063	0,019
0,621	0,062	0,017
0,607	0,061	0,015
0,594	0,059	0,014
0,582	0,058	0,012
0,570	0,057	0,010
0,558	0,056	0,008
0,546	0,055	0,006
0,535	0,054	0,004
0,525	0,052	0,002

Os valores na Tabela 6.3 representam diferentes possíveis configurações geométricas ótimas de *ALS*. Como pode-se observar, os valores para  $W$  são pequenos e difíceis de se realizar na prática. No entanto, este foi só um resultado dentre as muitas possibilidades que podem ser obtidas utilizando diferentes razões de aspecto e diferentes dados de projeto de estruturas reais. Como foi

justificado anteriormente, a análise feita até aqui envolve apenas os dados para um modelo experimental estudado.

Uma possível razão para ter obtido valores indesejados em relação à  $W$  é o valor da massa principal  $m_p$  plataforma pêndulo trifilar de madeira + aquário retangular de vidro no experimento do Capítulo 5 ser muito leve.

Na Figura 6.13 mostra-se a redução da amplitude de resposta do pêndulo principal do modelo equivalente pêndulo duplo estudado com a configuração geométrica de *ALS* escolhida com linhas tracejadas vermelhas, como indica-se na Tabela 6.3.

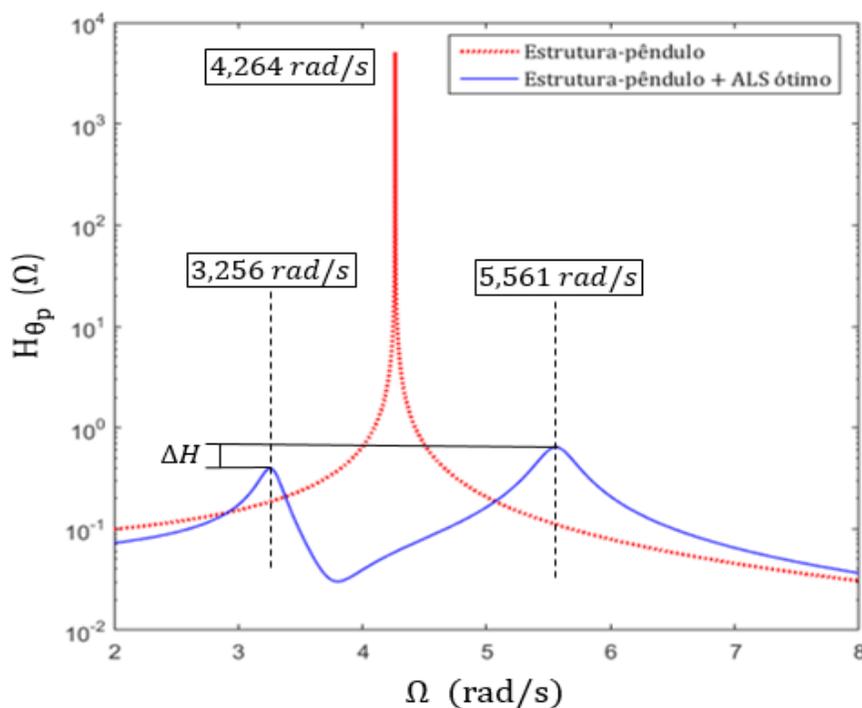


Figura 6.13 – *FRF* do pêndulo trifilar da bancada experimental com *ALS* ótimo obtido segundo Mapa de Respostas.

Os resultados podem ser considerados bons, quando obtidos por um modelo simples representando um tanque retangular parcialmente preenchido com água, sem dispositivos adicionais de perda de energia.  $\Delta H$  Indica a diferença de alturas, entre os picos de resposta do sistema principal controlado, o que pode-se assumir como falta de precisão na sintonização. Um aspecto que pode gerar esta falta de sintonização, é o fato de ter realizado a dedução dos parâmetros geométricos do *ALS* com funções de ajuste que não aproximam de forma exata os valores mínimos no mapa da respostas

ou ábaco de resposta da Figura 6.11. Observa-se como o parâmetro adimensional de razão de sintonização  $\gamma$  está relacionado com o parâmetro geométrico de comprimento  $L$ , e o parâmetro de razão de massa  $\mu$  está relacionado com o parâmetro geométrico de largura  $W$ .

Para um melhor entendimento das contribuições a metodologia de projeto de absorvedores líquidos sintonizados – ALS; a seguir apresenta-se um detalhamento profundo da abordagem metodológica. A pesquisa desenvolvida neste trabalho iniciou com o estudo da modelagem matemática do fenômeno de onda de superfície livre em reservatórios finitos parcialmente preenchidos com líquidos, também conhecido como fenômeno *sloshing*.

Numa primeira abordagem em análise de vibração livre (*VL*) obtém-se as expressões para frequência natural  $\omega_n$  e a elevação ou forma modal  $\eta$  da superfície livre. Isto a partir de uma função potencial que representa o campo de velocidades do líquido no interior do reservatório e que satisfaz as condições de contorno. Em seguida, numa segunda abordagem estudou-se a vibração forçada (*VF*) do *sloshing* com o qual determina-se a força hidrodinâmica  $F_{Amp}$  na parede do reservatório e conseqüentemente consegue-se obter parâmetros mecânicos equivalentes ( $k_1, m_1, m_0, l_1$ ) de sistemas discretos massa-mola e pêndulo que reproduzem confiavelmente o efeito dinâmico do líquido ou onda de superfície *sloshing* no interior do reservatório parcialmente preenchido.

Na Figura 6.14 apresenta-se o estudo do fenômeno *sloshing* por modelos mecânicos equivalentes tipo massa-mola e pêndulo, validados por uma técnica experimental simples baseada em sensor de vibração boia como elemento flutuante de superfície livre, e captura de movimento por vídeo, que chegou com boa precisão nos resultados.

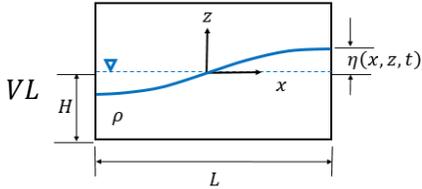
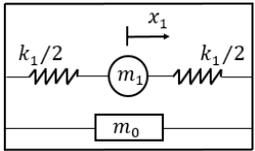
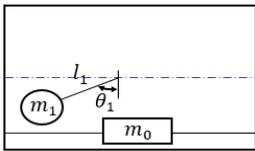
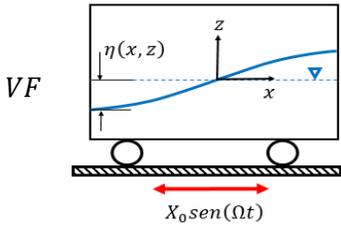
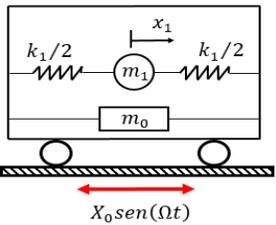
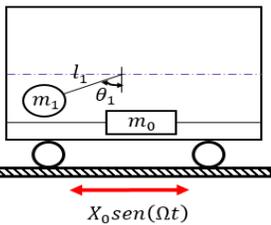
TIPO DE ANÁLISE	MODELO CONTÍNUO	MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES		RESULTADOS
		MASSA - MOLA	PÊNDULO	
$VL$				$\omega_n$ $\eta$
$VF$				$F_{Amp}$ $F_{x0}$
<b>Parâmetros modais do modelo mecânico equivalente <math>m_0, m_1, k_1, l_1 = f(\rho, H, L, W)</math></b>				

Figura 6.14 – Modelos mecânicos equivalentes do fenômeno *sloshing*.

Em posse de modelos mecânicos equivalentes ou modelos discretos de *sloshing* previamente validados experimentalmente no presente trabalho, parte-se para o estudo do comportamento dinâmico da oscilação de um pêndulo acoplado a um reservatório com água conforme indica-se na Figura 6.15. Este problema foi estudado por Cooker (1994), motivado pela observação do efeito da onda de superfície do líquido na mitigação do movimento de um pêndulo.

Nas Figuras 6.14 e 6.15,  $\omega_n$  é a frequência natural de *sloshing*,  $\eta$  é a forma ou elevação da superfície livre (*sloshing*),  $F_{Amp}$  é a força hidrodinâmica do sistema *sloshing* contínuo,  $F_{x0}$  é a força hidrodinâmica do sistema *sloshing* discreto,  $\omega_{n,\theta_p}$  é a frequência natural pêndulo principal,  $H_{\theta_p}(\Omega)$  é a amplitude de resposta em frequência do pêndulo principal,  $\omega_1$  é a frequência desacoplada do *sloshing* no primeiro modo de vibração com um pêndulo equivalente,  $\omega_p$  frequência desacoplada do pêndulo principal no primeiro modo de vibração,  $\gamma$  é a razão de sintonização,  $\mu$  é a razão de massas,  $H/L$  é a razão de aspecto.

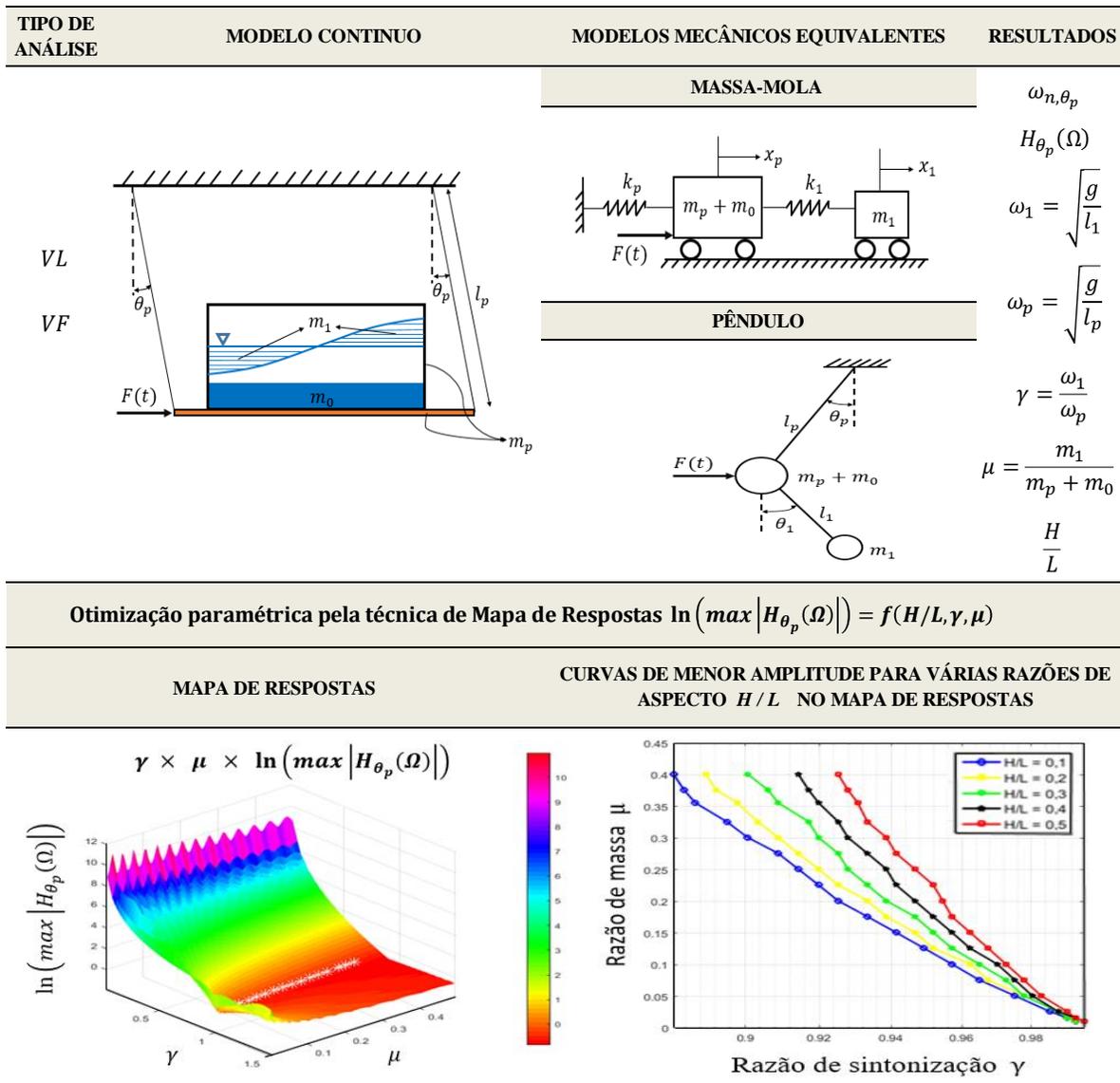


Figura 6.15 – Modelos para estudo de pendulo com reservatório acoplado.

O problema do pêndulo de Cooker (1994) possibilitou conceituar o pêndulo como estrutura principal ou edifício alto a ser controlado, e o tanque parcialmente preenchido com líquido operar como um absorvedor líquido sintonizado ALS. Como apresentado na Figura 6.15, o pêndulo de Cooker é modelado pela técnica de modelo mecânico equivalente de *sloshing* no formato de pêndulo duplo, o qual, uma vez validado experimental, abre o panorama para o tratamento de parâmetros adimensionais de grande importância a luz do controle estrutural, e possibilita a definição de uma função objetivo definida como o logaritmo natural máximo absoluto da amplitude de resposta em frequência do sistema principal.

Esta função objetivo ao ser representada graficamente, oferece uma solução por varredura das combinações possíveis de parâmetros que configuram um projeto ótimo de ALS, com valores de amplitude de resposta mínima para o sistema.

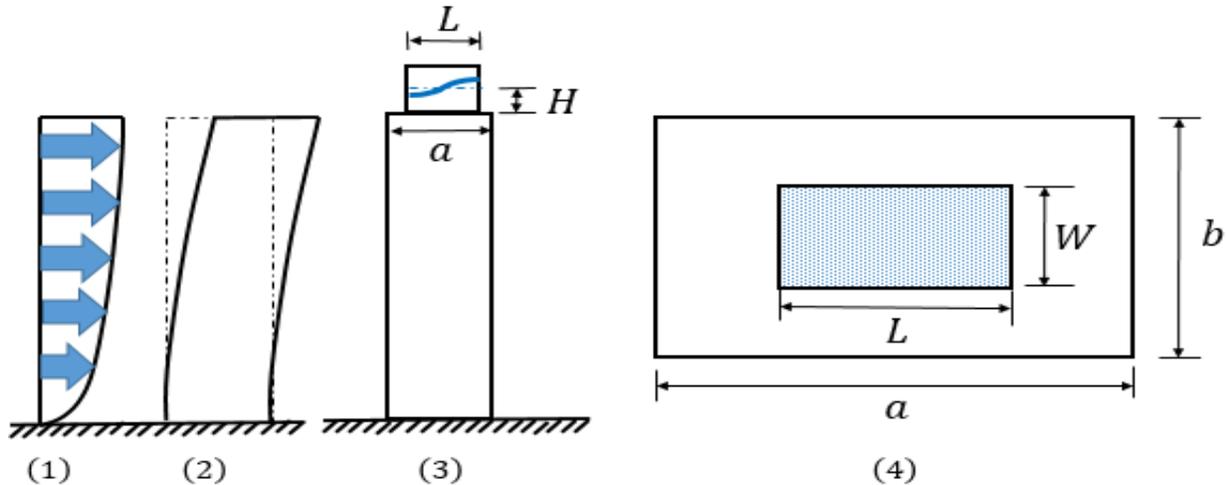
Esta solução gráfica definida como mapa de respostas permite identificar qualitativa e quantitativamente um vale ou lócus geométrico de menor amplitude numa superfície solução. Após determinadas as curvas de menor amplitude para várias razões de aspecto como aprecia-se na parte inferior direita da Figura 6.15, parte-se para a apresentação de recomendações de projeto de ALS seguindo o roteiro apresentado na Figura 6.16. Desta forma o procedimento descrito acima, otimiza o sistema pêndulo duplo pelo método de mapa de respostas e propõe recomendações de projeto.

As recomendações de projeto na Figura 6.16 apresentam medidas  $H, L, W$  de ALS ótimos obtidas a partir das combinações de parâmetros adimensionais  $(\gamma, \mu)$ . Conhecendo a expressão matemática que define cada parâmetro adimensional e os valores dos pares ordenados sobre as curvas de amplitude mínima no mapa de respostas é possível mediante um procedimento algébrico encontrar dimensões geométricas ótimas. Estas dimensões precisam satisfazer as dimensões em planta do topo do edifício analisado.

Nas Figuras 6.16 e 6.17 apresentam-se inicialmente as considerações básicas para as quais funcionam as prescrições de projeto. Segundo estas, o ALS controla somente o modo de vibração fundamental do edifício, opera quando o seu comprimento é paralelo a direção da excitação. Seguindo destas premissas, encontra-se um roteiro de cálculo para obtenção de valores geométricos ótimos de ALS partindo do valor da massa do edifício que deseja-se controlar, do valor da frequência natural fundamental e de um valor assumido de razão de aspecto. Por último na Figura 6.17 esquematiza-se a posição que o ALS adotaria na planta do topo da estrutura, segundo o sentido da excitação que está sendo atendida.

## RECOMENDAÇÕES DE PROJETO

### Direção da excitação paralela ao lado $L$ do ALS



- (1) Direção da excitação.
- (2) Primeiro modo de vibração da estrutura (flexão em torno da direção de menor inércia do edifício).
- (3) Direção do ALS para controlar vibrações no sentido da excitação.
- (4) Localização do ALS conforme planta do edifício e direção da excitação.

### Determinação das dimensões do ALS ótimo ( $L, H, W$ ) conhecendo:

- 1) Um valor assumido de razão de aspecto  $H/L$  entre 0,1 e 0,5
- 2) O valor da frequência natural fundamental do edifício  $\omega_p = (g/l_p)^{1/2}$
- 3) O valor da massa modal do edifício  $m_p$
- 4) O valor da massa específica do líquido  $\rho$

Partindo da definição de razão de sintonização  $\gamma = \omega_1/\omega_p$  tem-se que:

$$L = g \pi \tanh(\pi H/L) / (\gamma \omega_p)^2$$

Com a razão de aspecto  $H/L$ , obtém-se  $H$

Conhecendo  $L$  e  $H$ , e com a definição  $\mu = m_f/m_p$  onde  $m_f = \rho L H W$ , chega-se em:

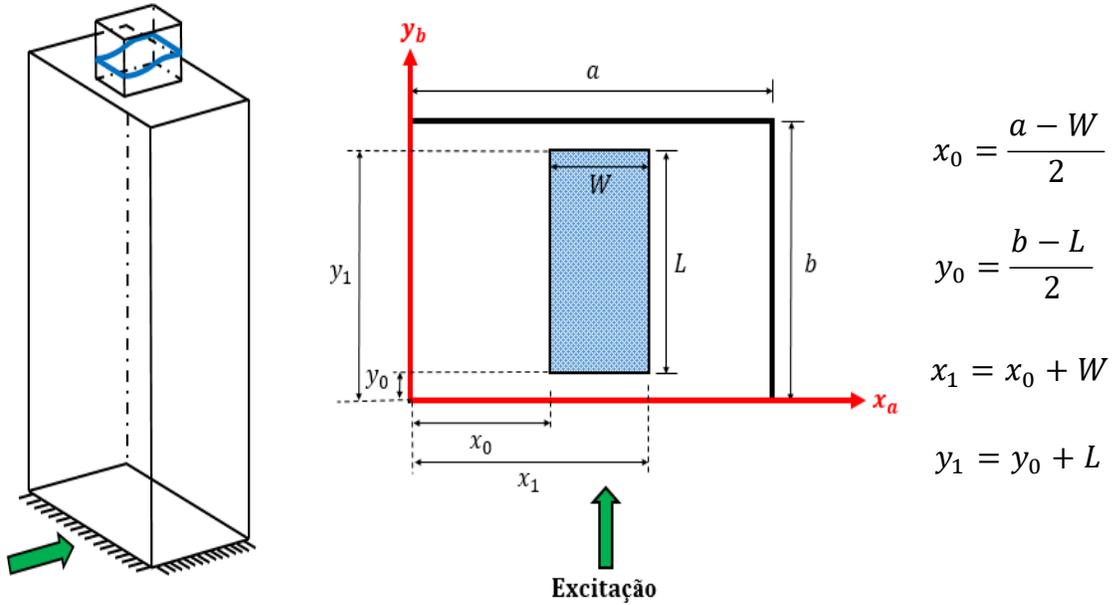
$$W = \mu m_p / \rho L H$$

Resultado do processo:  $L, H, W$

Figura 6.16 – Recomendações de projeto.

## RECOMENDAÇÕES DE PROJETO

### Localização ALS ótimo no topo edifício conforme planta e direção da excitação



$$x_0 = \frac{a - W}{2}$$

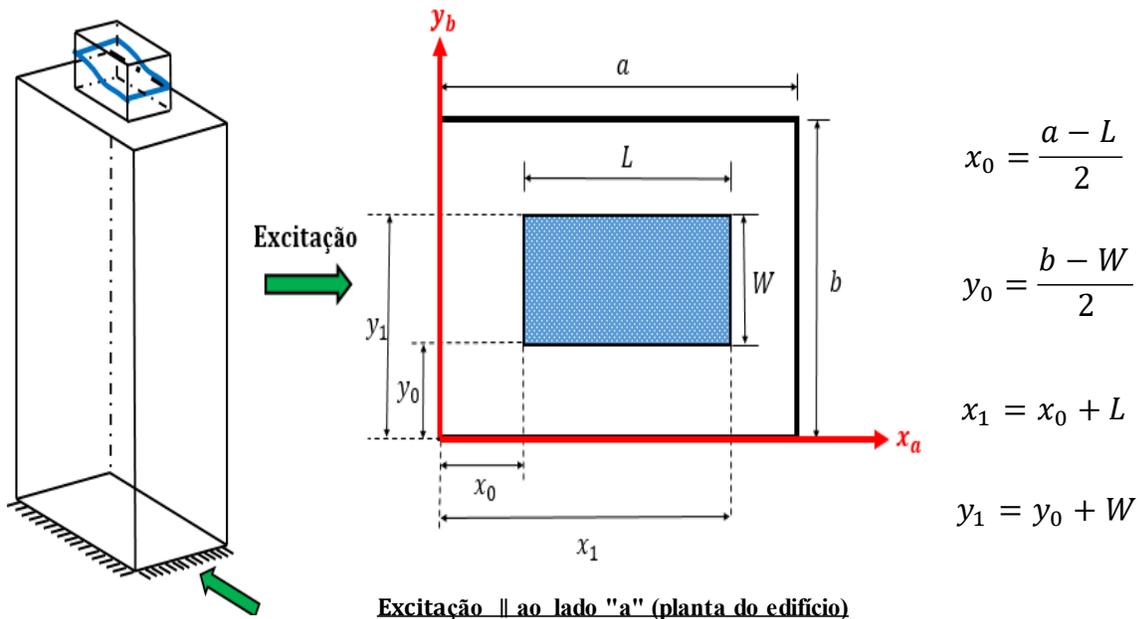
$$y_0 = \frac{b - L}{2}$$

$$x_1 = x_0 + W$$

$$y_1 = y_0 + L$$

**Excitação  $\perp$  ao lado "a" (planta do edifício)**

### Localização ALS ótimo no topo edifício conforme planta e direção da excitação



$$x_0 = \frac{a - L}{2}$$

$$y_0 = \frac{b - W}{2}$$

$$x_1 = x_0 + L$$

$$y_1 = y_0 + W$$

**Excitação  $\parallel$  ao lado "a" (planta do edifício)**

Figura 6.17 – Localização ALS.

A abordagem metodológica desta pesquisa apresenta um procedimento sequencial de modelagem analítica de sistemas desacoplados e acoplados e suas respectivas validações por análise experimental. Uma vez confirmada a precisão dos modelos analisados, contorna-se uma formulação robusta onde inferências obtidas de modelos teóricos consolidam a prescrição de soluções a projetos reais. Como resultado final um roteiro para projeto ótimo de absorvedores líquidos sintonizados - ALS é estabelecido. Para a validação deste roteiro de projeto de ALS no item 6.7 a seguir, estuda-se como caso de aplicação, um edifício da literatura (Pórtico 3D), linearizado a 1 GdL equivalente. Isto com o objetivo de projetar as medidas ótimas de um ALS de geometria retangular. Soluções da resposta dinâmica apresentam-se no domínio da frequência e do tempo.

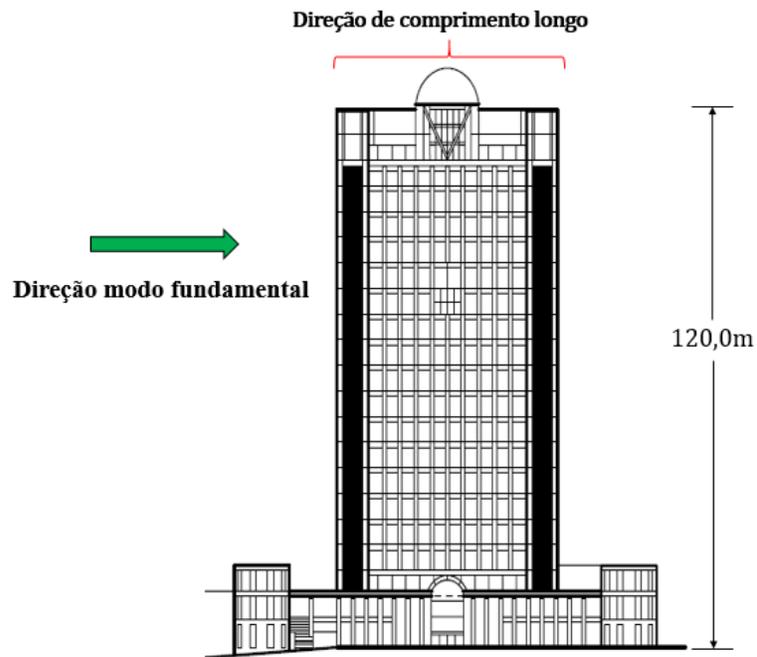
### 6.7 Caso de estudo edifício torre *Liberty* em Tóquio Japão

O edifício torre *Liberty* em Tóquio - Japão analisado por Arakawa e Yamoto (2004), com 120 m de altura e planta retangular como mostra a Figura 6.18, foi reduzido a um grau de liberdade (1GdL) por intermédio da análise modal (SOONG e DARGUSH, 1997). Partindo da inferência que o pêndulo duplo funciona como um modelo simplificado de um edifício alto equipado com um ALS no topo, pretende-se realizar uma aplicação de projeto de ALS para os parâmetros reais do edifício torre *Liberty* apresentados na Tabela 6.4 em função dos dados para o modo fundamental de vibração na direção de maior comprimento da estrutura.

Tabela 6.4 – Frequência e massa para o modo fundamental de vibração.

<b>Modo</b>	<b>Frequência natural (rad/s)</b>	<b>Massa modal (kg)</b>
N° 1	2,5321	692500,00

a) Vista perfil



b) Planta piso

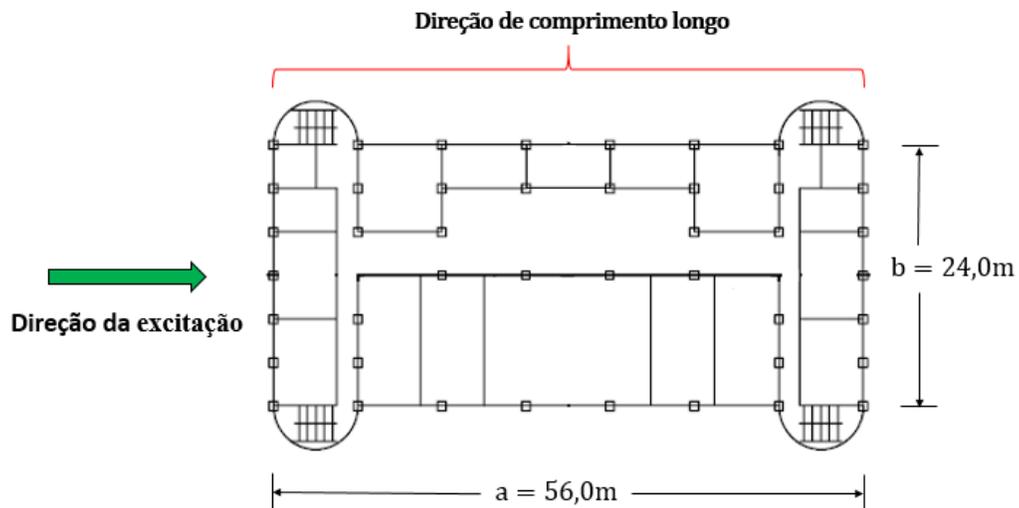


Figura 6.18 – Caso de estudo edifício Torre Liberty: a) Vista perfil, b) Planta piso.

Na técnica de otimização paramétrica por mapa de respostas apresentada neste trabalho, estudam-se os parâmetros  $(\gamma, \mu)$  que conformam os caminhos ou vales de menor amplitude de resposta da estrutura, se chegando mediante estes, as recomendações de projeto ou seja, medidas de tanque retangular ótimo.

Como apresentado anteriormente, o mapa de respostas é a solução de um modelo de pêndulo duplo em função da varredura de parâmetros adimensionais (razão de sintonização, razão de massa e razão de aspecto). Isto determina um mapa de respostas de natureza adimensional que conserva as trajetórias de menor amplitude estrutural sobre sua superfície; Funcionando para dados de entrada de projeto, como são frequência natural do edifício, massa modal do primeiro modo de vibração a controlar e a planta do edifício (dimensões). Como será observado mais adiante, existem soluções de projeto de ALS, as quais são do ponto de vista construtivo inviáveis, pois os parâmetros de solução são controlados pela configuração geométrica em planta do edifício.

Em função do mencionado acima, apresenta-se no fluxograma da Figura 6.19, a sequência de passos para o projeto ótimo de absorvedores líquidos sintonizados.

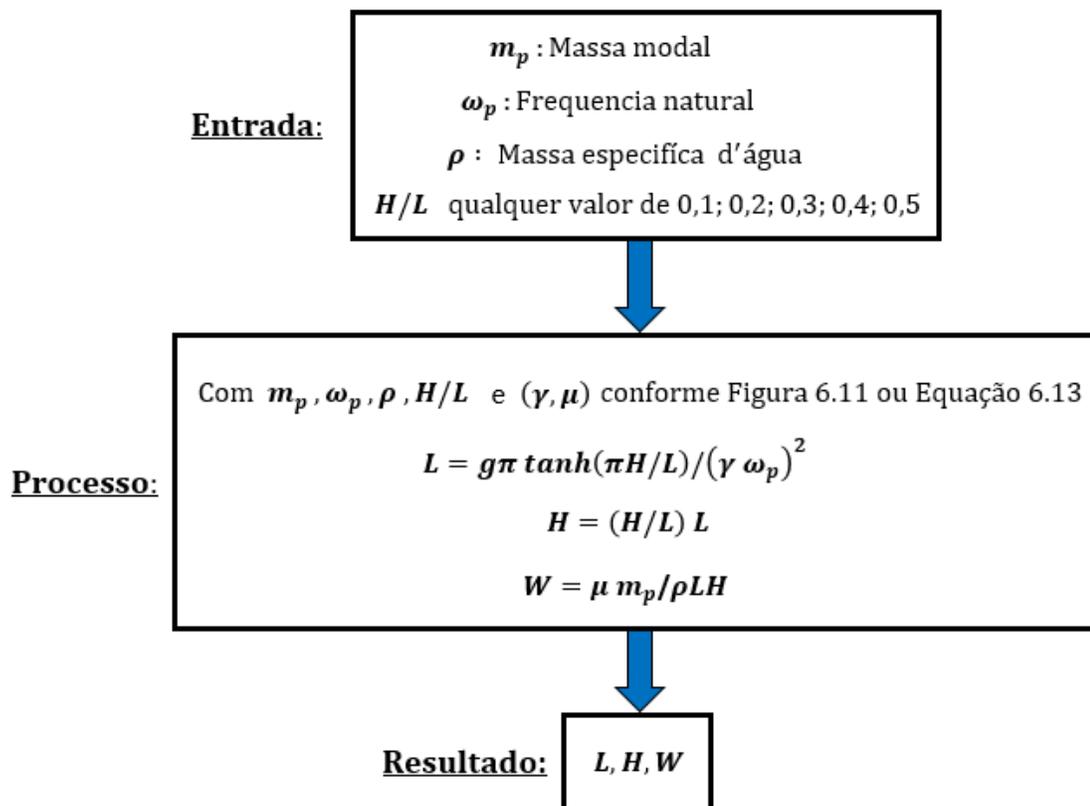


Figura 6.19 – Fluxograma de projeto de Absorvedores Líquidos Sintonizados - ALS.

Conforme apresentado no fluxograma da Figura 6.19 os dados de entrada para o projeto de ALS para o edifício torre *Liberty* são:  $m_p = 692500,0 \text{ kg}$ ,  $\omega_p = 2,5321 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $H/L = 0,1; 0,3; 0,5$  (valores assumidos entre 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5). Partindo destes dados mais a escolha de um valor  $(\gamma, \mu)$ , chega-se em dimensões para tanque retangular.

Como visto, as dimensões do ALS dependem dos parâmetros razão de massa, razão de sintonização e razão de aspecto. Se bem é certo que o mapa solução apresenta combinações ótimas diversas, com a existência de vários mínimos do tipo mínimo do mínimo. Estes valores podem não ser de interesse em relação à os outros parâmetros. Sendo que o valor da combinação mínimo do mínimo pode dar uma relação de massa que não tem sentido físico. Estes projetos limitam-se a razões de massas de 10% ou 20%.

Observa-se como a partir das curvas otimizadas da Figura 6.11 ou Equação 6.13 escolhe-se um valor  $(\gamma, \mu)$  que vai depender das restrições geométricas da planta do edifício. Respectivamente a razão de sintonização e a razão de massa regulam o comprimento e a profundidade do ALS. Que são a sua vez controlados pelo comprimento e largura da planta do edifício.

A seguir nas tabelas 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam-se as dimensões solução  $L$ ,  $H$  e  $W$  do ALS de geometria retangular para o caso de estudo.

Tabela 6.5 – Medidas ótimas de ALS para  $H/L = 0,1$

$\gamma$	$\mu$	$L \text{ (m)}$	$H \text{ (m)}$	$W \text{ (m)}$
0,993	0,011	1,48	0,15	34,95
0,9905	0,016	1,49	0,15	50,32
0,9854	0,026	1,50	0,15	80,10
0,9752	0,051	1,53	0,15	150,72
0,9649	0,076	1,57	0,16	215,27
0,9571	0,101	1,59	0,16	276,94
0,9492	0,126	1,62	0,16	334,22
0,9413	0,151	1,65	0,16	387,36
0,9333	0,176	1,67	0,17	436,34
0,9252	0,201	1,70	0,17	481,25

Tabela 6.6 – Medidas ótimas de ALS para  $H/L = 0,3$ 

$\gamma$	$\mu$	$L (m)$	$H (m)$	$W (m)$
0,993	0,011	3,58	1,07	1,99
0,9905	0,016	3,60	1,08	2,86
0,9879	0,026	3,62	1,08	4,60
0,9778	0,051	3,69	1,11	8,67
0,9726	0,076	3,73	1,12	12,64
0,9649	0,101	3,79	1,14	16,28
0,9571	0,126	3,85	1,16	19,66
0,9518	0,151	3,90	1,17	23,04
0,9466	0,176	3,94	1,18	26,27
0,9386	0,201	4,01	1,20	29,00

Tabela 6.7 – Medidas ótimas de ALS para  $H/L = 0,5$ 

$\gamma$	$\mu$	$L (m)$	$H (m)$	$W (m)$
0,9955	0,011	4,44	2,22	0,78
0,993	0,016	4,46	2,23	1,12
0,9905	0,026	4,48	2,24	1,80
0,9829	0,051	4,55	2,27	3,42
0,9778	0,076	4,60	2,30	5,00
0,9726	0,101	4,65	2,32	6,50
0,9675	0,126	4,70	2,35	7,94
0,9623	0,151	4,75	2,37	9,31
0,9571	0,176	4,80	2,40	10,62
0,9545	0,201	4,82	2,41	12,00

Segundo a Figura 6.18, a configuração geométrica da planta do edifício tem como lado de maior comprimento  $a = 56 m$  e de largura  $b = 24 m$ . Ao se limitar o projeto, a razões de massa não maiores de 0,2, quando analisa-se uma razão de aspecto  $H/L = 0,1$  as dimensões de profundidade do ALS são maiores do que a largura da planta do edifício, conforme é observado na Tabela 6.5. Isto indica que para o edifício em questão é preciso utilizar razões de aspecto maiores a

0,1. A luz da Figura 6.17 determina-se a localização do ALS projetado, no topo da estrutura. Para uma razão de aspecto  $H/L = 0,5$  a dimensão escolhida do tanque segundo a tabela 6.8 foi  $L = 4,48$  m,  $H = 2,24$  m e  $W = 1,80$  m.

As coordenadas da localização do ALS assumindo a planta do edifício como um plano coordenado, segundo mostrado na Figura 6.20 são:

$$x_0 = (a - L)/2 = (56,0 - 4,48)/2 = 25,76 \text{ m} \quad x_1 = x_0 + L = 25,76 \text{ m} + 4,48 \text{ m} = 30,24 \text{ m}$$

$$y_0 = (b - W)/2 = (24,0 - 1,80)/2 = 11,10 \text{ m} \quad y_1 = y_0 + W = 11,10 \text{ m} + 1,80 \text{ m} = 12,90 \text{ m}$$

$$(x_0; y_0) = (25,76 \text{ m}; 11,10 \text{ m}) \quad (x_1; y_1) = (30,24 \text{ m}; 12,90 \text{ m})$$

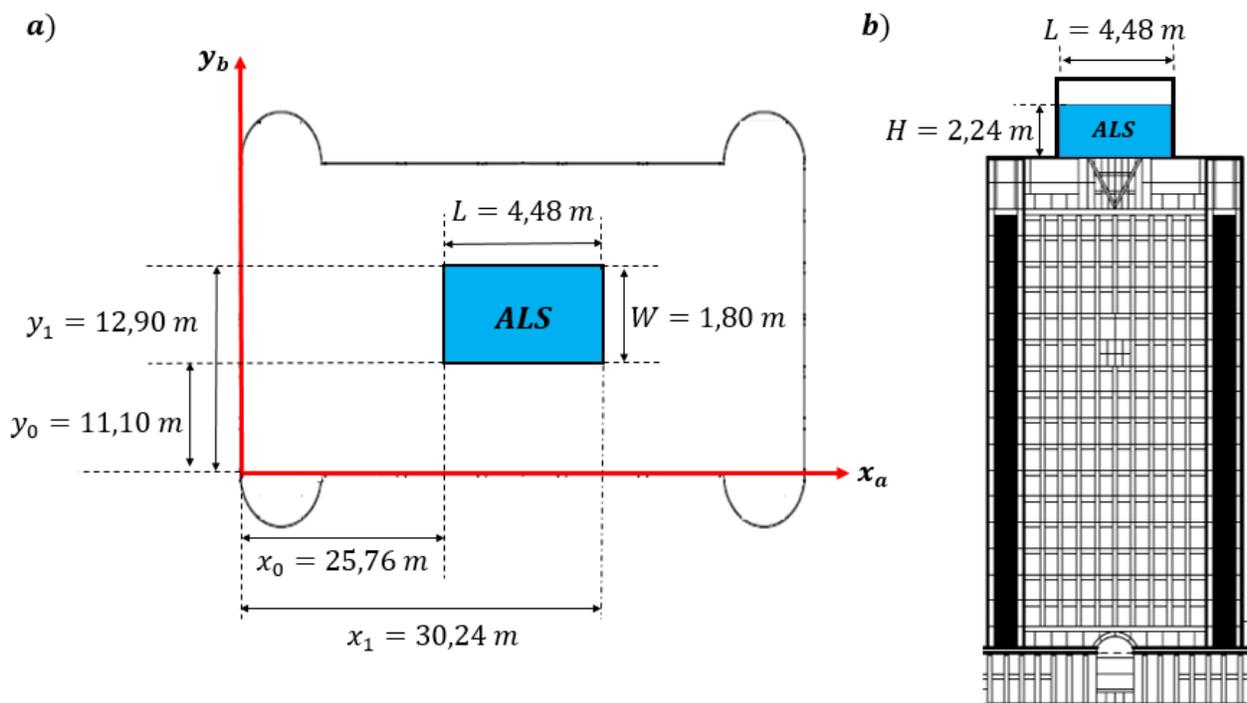


Figura 6.20 – Ilustração esquemática em planta e em altura da localização do ALS ótimo.

Uma vez escolhida a configuração geométrica do ALS na Figura 6.20 como o dispositivo de controle passivo para o edifício torre *Liberty*. Nas Figuras 6.21 e 6.22 a seguir, configura-se uma análise da resposta dinâmica, no domínio da frequência e do tempo respectivamente. A força

harmônica aplicada continuamente no tempo foi  $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega_p t)$  em  $N$ , sendo  $F_0 = 10^3 N$ ,  $\omega_p$  é a frequência natural da estrutura.

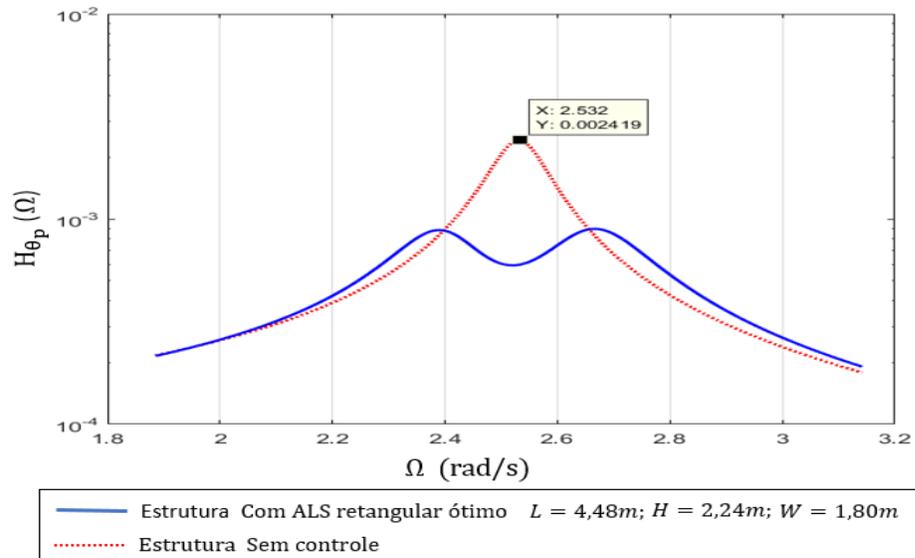


Figura 6.21 – Resposta em frequência da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .

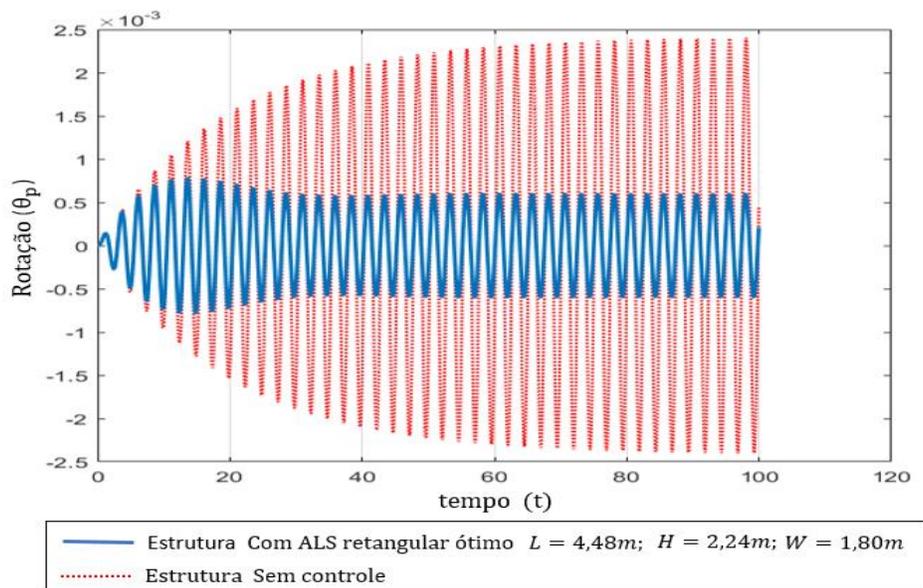


Figura 6.22 – Rotação da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .

Os resultados numéricos das Figuras 6.21 e 6.22 modelam o comportamento do sistema simplificado pêndulo duplo (edifício-ALS) com razão de amortecimento para estrutura igual a  $\xi_p = 0,02$  e para o fluido igual a  $\xi_1 = 0,05$ . Em ambas soluções observa-se uma redução da oscilação, com o qual pode-se apreciar a efetividade do ALS escolhido no controle dinâmico desta estrutura.

Nas Figuras 6.23 e 6.24 apresentadas a seguir, implementa-se o estudo para determinar qual a geometria do ALS ótimo, que é fatível de construir e que apresente maior controle estrutural. Conclui-se que para razões de aspecto de  $H/L = 0,1$  as geometrias do ALS têm profundidades maiores que a largura do edifício. Os resultados a seguir foram feitos para quatro diferentes configurações geometrias de ALS para a mesma razão de aspecto de  $H/L = 0,5$ . (Tabela 6.7).

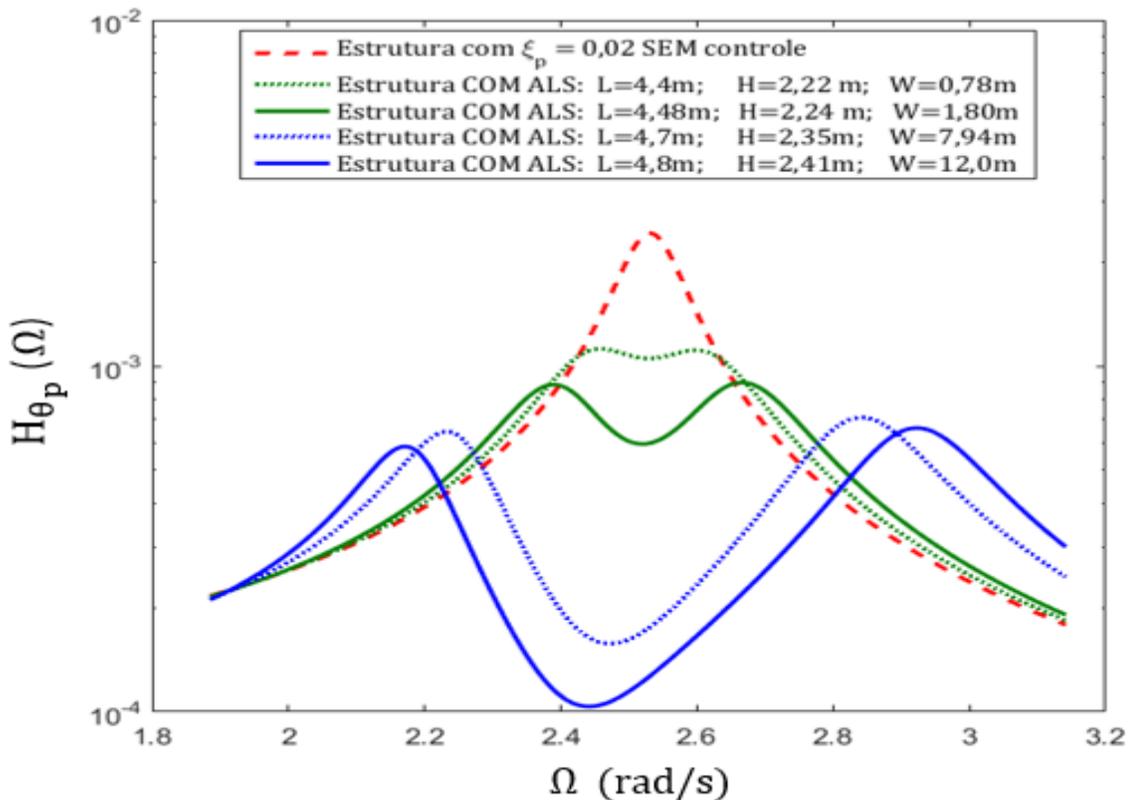


Figura 6.23 – Resposta em frequência da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .

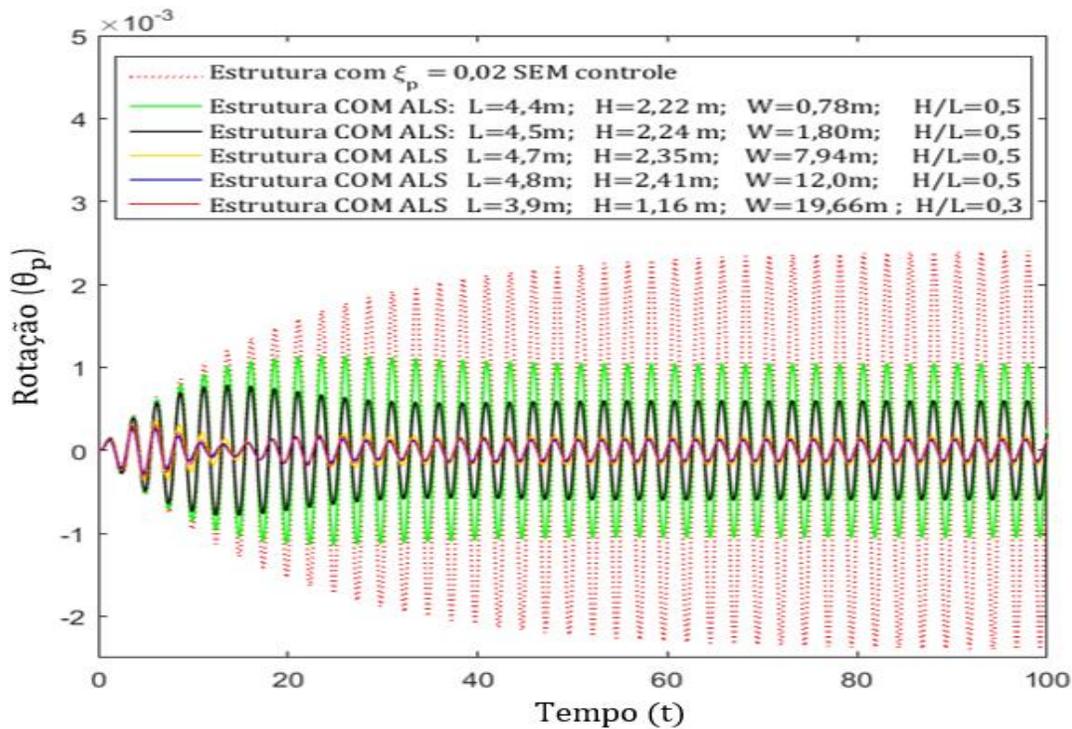


Figura 6.24 – Rotação da estrutura submetida a uma força harmônica, com parâmetros  $\xi_p = 0,02$  e  $\xi_1 = 0,05$ .

Os resultados obtidos para ambas as soluções na frequência e no tempo Figura 6.23 e 6.24 respectivamente são conclusivos na afirmação que as quatro geometrias de ALS analisadas operam de forma efetiva ao diminuir a oscilação do sistema, mas que os ALSs que apresentam uma geometria com maior profundidade  $W$  reduzem com maior efetividade a oscilação.

Na Figura 6.23 a linha sólida em cor verde e na Figura 6.24 a linha sólida em cor preta representam o ALS adotado para as soluções apresentadas nas Figuras 6.20, 6.21 e 6.22. Embora, esta configuração é efetiva, observa-se que existem outras configurações geométricas de ALSs com maior profundidade  $W$  que reduzem a oscilação com maior eficácia, como é o caso do ALS com linha sólida em cor azul nas Figuras 6.23 e 6.24. O resultado desta simulação numérica abre uma nova compreensão sobre a influência da profundidade  $W$  na resposta ótima, e precisa-se de novos estudos com diferentes abordagens para dita verificação.

Este procedimento avança o estado da arte de ALS, ao disponibilizar uma abordagem validada através de análise experimental simplificada e precisa de um problema complexo, permitindo um entendimento maior das variáveis que dominam o fenômeno.

## 7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho teve como objetivo estudar a descrição de problemas de *sloshing* por parâmetros de massa equivalentes. Mediante comparação com resultados experimentais e solução analítica, para um tanque retangular desacoplado e acoplado a um pêndulo. Os modelos discretos equivalentes são validados para resultados do período fundamental de oscilação em função da razão de aspecto  $H/L$ , onde  $H$  é a profundidade do líquido e  $L$  é o comprimento do reservatório. Os estudos foram feitos para vibração livre se objetivando a caracterização de parâmetros dinâmicos.

Inicialmente, valida-se a metodologia experimental para determinação dos parâmetros modais do líquido *sloshing* utilizando como sensor de vibrações um elemento flutuante tipo boia e a técnica de captura de movimento por vídeo. A seguir implementa-se a mesma técnica para determinar parâmetros modais para o sistema tanque acoplado a oscilação de um pêndulo.

Finalmente, para o modelo equivalente pêndulo-tanque validado por resultados experimentais e analíticos, foi realizada uma otimização paramétrica pela técnica de mapa de respostas, mediante a qual chega-se na determinação de trajetórias de menor amplitude da resposta dinâmica do sistema principal e em seguida em recomendações de projeto de absorvedores líquidos sintonizados (ALS) mediante a determinação de medidas geométricas ótimas.

### 7.1 Conclusões gerais das análises numéricas e experimentais

#### 7.1.1 *Sloshing* em tanque retangular

Como mencionado anteriormente a modelagem matemática do fenômeno *sloshing* apresenta uma formulação complexa, para a qual precisa-se de boas habilidades matemáticas inclusive para trabalhar no regime linear. A solução para o período fundamental de oscilação do *sloshing* foi abordado para três tipos de soluções: águas rasas, águas intermediárias e águas profundas.

O aparato experimental baseado em boia flutuante utilizado como mira do nível dinâmico do líquido em conjunto com a técnica de computação visual para a captura do fluxo de movimento por vídeo criam uma ferramenta efetiva que apresenta uma concordância razoável, com as soluções analíticas clássicas. O período experimental caracteriza os resultados para teoria de águas intermediárias. O elemento flutuante (boia) apresenta rotação e fricção sobre o eixo vertical (fio de nylon) o qual gera um efeito de atraso para acompanhar com total precisão os movimentos *sloshing*.

Mesmo sobre a boia que é considerada uma partícula de fluido sobre a superfície, marca-se um ponto de referência para ser identificado pelo *CVMob*. Com a oscilação da onda de superfície, o eixo pelo qual desloca-se a boia, apresenta perda de tensão e a força de arrasto do líquido pode incorrer que os deslocamentos da boia não aconteçam sobre um eixo ideal completamente vertical, tudo isto é mencionado de forma qualitativa, mais que pode ajudar a compreender as limitações do experimento.

As análises das respostas temporais da boia foram reduzidas, excluindo os intervalos iniciais de tempo em que os efeitos de quebra de onda acontecem, se interessando só na resposta da onda permanente. A análise de *backbone* apresenta um claro comportamento linear, embora existam irregularidades na captura dos sinais. Erros menores a 2% para cada razão de aspecto estudada, mostram a efetividade da técnica experimental, outro aspecto importante a ser relatado é a relação custo versus benefício das bancadas experimentais criadas em relação a bancadas experimentais mais sofisticadas observadas na literatura. Não foram encontradas técnicas experimentais com elemento flutuante boia e técnica captura por fluxo de imagens para estudar parâmetros modais de absorvedores líquidos sintonizados.

### **7.1.2 *Sloshing* acoplado estrutura**

Para a segunda parte os resultados experimentais validam o modelo equivalente proposto ao problema de Cooker. Para representar o fluido, são utilizados modelos discretos até com 10 pêndulos equivalentes os quais mostram uma boa precisão, com erros menores de 2%. Essa diferença pode ser explicada pela aproximação do líquido por um sistema de pêndulo equivalente. Estudos complementares e novos resultados experimentais são necessários para verificar essa divergência. Para as bancadas experimentais *sloshing* puro e *sloshing* acoplado estrutura, as maiores divergências com as soluções analíticas apresentam-se para as maiores razões de aspecto (profundidades do líquido maiores).

### **7.1.3 Otimização paramétrica pela técnica de mapa de resposta**

Como resultado importante do modelo acoplado *sloshing*-pêndulo observa-se uma forte dependência com relação ao amortecimento viscoso do líquido contido no reservatório. Podendo ser conclusivo que os parâmetros que regulam o controle de vibrações com ALS são a viscosidade do fluido e a geometria do reservatório. Uma vez que a viscosidade do fluido é definida matematicamente como função da razão de aspecto, da temperatura e dos contaminantes (partículas) sobre a superfície

livre. Observou-se a partir de resultados experimentais como a razão de amortecimento do fluido é pequena. Embora possa ser incrementada modificando a geometria do fundo do reservatório e a inclusão de obstáculos (*baffles*). O mapa de respostas de natureza adimensional conserva as trajetórias de menor amplitude para diferentes dados de entrada ou casos de estudo massa principal da estrutura, frequência natural e massa específica do fluido utilizado.

Embora várias soluções ótimas com diversos mínimos locais, podem ser obtidos desta solução gráfica, critérios como o mínimo do mínimo pode não ser de interesse neste tipo de problema, pois podem apresentar razões de massa pouco interessantes à luz da teoria de controle passivo de vibrações onde limitam-se razões de massa a 20% no máximo.

#### **7.1.4 Recomendações de projeto de ALS**

Observou-se como os parâmetros adimensionais que configuram as trajetórias de menor amplitude da estrutura no mapa de respostas, são limitados por condições geométricas da planta do edifício em estudo. Ressalta-se como, a razão de sintonização regula o comprimento, e a razão de massa regula a profundidade no projeto de ALS. A luz da análise numérica pode-se concluir que ALSs projetados para controlar vibrações transversais operam com maior efetividade quanto maior é a sua profundidade.

## **7.2 Sugestões para trabalhos futuros**

Este trabalho de natureza conceitual, com contribuições na modelagem analítica e análise experimental, abre várias sugestões para o aprofundamento dos resultados obtidos. A nível experimental o aparato bancada *sloshing* merece um investimento significativo na boia de flutuação, tentando otimizar seu tamanho e a forma de como se desloca na vertical. A técnica de aquisição de dados por captura do movimento de vídeo, pode ser aprimorada com câmeras digitais de melhor definição.

Na bancada pêndulo de Cooker, pode-se aproveitar os benefícios do pêndulo trifilar, podem ser estudados o grau de torção no movimento da superfície livre e do sistema *sloshing*-pêndulo. Isto a sua vez pode ser utilizado para a criação de um mapa de resposta que inclua efeitos de torção. Maiores estudos experimentais devem ser feitos para a caracterização do amortecimento viscoso do fluido, comparando-o a resultados de modelos numéricos ou analíticos.

Uma vez concluída a importância do amortecimento viscoso do fluido, no problema de controle de vibrações com ALS, um estudo focado na determinação do amortecimento ótimo tem de ser o escopo para trabalhos futuros.

Outras sugestões para futuras pesquisas são:

- Verificação experimental dos parâmetros obtidos pela técnica de mapa de respostas;
- Implementar um algoritmo em redes neurais capaz de aprender técnicas de combinação de parâmetros para ALS partindo dos dados obtidos do mapas de resposta;
- Verificar através de um modelo numérico de um edifício real as recomendações de projeto de ALS apresentadas neste trabalho;
- Estudar modelos mecânicos equivalentes de *sloshing* mais complexos, isto é envolvendo mais graus de liberdade, e a inclusão de efeitos não lineares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMSON, H. N. The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers with Applications to Space Vehicle Technology. Scientific and Technical Information Division - National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C, 1966.

ALI, M.; KYOUNG, S. M. Structural Developments in Tall Buildings: Current Trends and Future Prospects. *Architectural Science Review*. 50.3, p. 205-223, 2007.

ALKMIN, M.H. Controle de Vibrações em Turbina Eólica Utilizando Absorvedor Passivo de Coluna de Líquido Sintonizado. Graduação (Engenharia Mecânica) - Faculdade de Tecnologia Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

ARAKAWA, T; YAMOTO. K. Frequencies and Damping Ratios of a High Rise Building Based on Microtremor Measurement. 13th World Conference on Earthquake Engineering Vancouver, B.C., Canada, Paper No. 48, 2004.

ARDAKANI, A.; BRIDGES, T.J.; TURNER, M.R. Resonance in a Model for Cooker's Sloshing Experiment. *European Journal of Mechanics*, v. 36, p. 25-38, 2012.

AVILA, S.M. Controle Híbrido para Atenuação de Vibrações em Edifícios. Tese de doutorado em Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

AVILA, S.M.; MORAIS, M.V.; BARCELOS, M.; SHZU, M.A.; SILVA, R.C. Vibration Control of The Set Tower and Wind Turbine Under the Wind Influence. *Proceedings of COBEM - 20th International Congress of Mechanical Engineering*, Gramado, 2009.

BATTAGLIA, L.; CRUCHAGAC, M.; STORTI, MARIO.; D'ELÍA, J.; AEDOC, J.N.; REINOSO,R. Numerical Modelling of 3D Sloshing Experiments in Rectangular in Rectangular Tanks. *Applied Mathematical Modelling*, v. 59, p. 357-378, 2018.

CASTILLO, E.F., CRUCHAGA, M.A. Experimental Vibration Analysis for a 3D Scaled Model of a Three-floor Steel Structure. *Latin American Journal of Solid and Structures*, v. 9, p. 597-613, 2012.

CARNEIRO JR, D. P. Comportamento do Sloshing em Ambiente de Microgravidade. Tese de Doutorado Departamento de Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

COLHERINHAS, G.B. Ferramenta de Otimização via Algoritmos Genéticos com Aplicações em Engenharia. Dissertação (Mestrado em Ciências Mecânicas) – Faculdade de Tecnologia Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

COLWELL, S.; BASU, B. Tuned Liquid Column Dampers in Offshore Wind Turbines for Structural Control. *Engineering Structures*, p. 358-368, 2009.

CONNOR, J. Introduction to Structural Motion Control. Pearson Education, Inc, 2003.

CONSTANTINOU, M.C.; SOONG, T.T.; DARGUSH, G.F. Passive Energy Dissipation Systems for Structural Design and Retrofit. The Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, 1998.

COOKER, M.J. Water Waves in a Suspended Container. School of Mathematics. University of East, Norwich NR4 7tj, UK, 1994.

CRANDALL, S.H.; MARK, W.D. Random Vibration in Mechanical Systems. Academic Press, New York, 1973.

CRUZ, C. H.B.; FRAGNITO, H.L.; COSTA, I.F.; MELLO, B.A. Guia para Física Experimental-Caderno de Laboratório, Gráficos e Erros, Unicamp, 1997.

CUI, D.; YAN, S; GUO, X; GAO, R. X. Parametric Resonance of Liquid Sloshing in Partially Filled Spacecraft Tanks During the Powered-flight Phase of Rocket. Aerospace Science and Technology, p.93-105, 2014.

D'ALESSANDRO, V. Modelling of Tank Vehicle Dynamics by Fluid Sloshing Coupled Simulation, Doctoral Programme in Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering, Polytechnic Di Milano, 2011.

DI MATTEO, A.; LACONO, F. LO.; NAVARRA, G.; PIRROTTA, A. Direct Evaluation of the Equivalent Linear Damping for TLCD systems in Random Vibration for Pre-Design Purposes, International Journal of Non-linear Mechanics, v. 63, p. 19-30. 2014.

DI MATTEO, A; LACONO, F. LO.; NAVARRA, G.; PIRROTTA, A. Experimental Validation of a Direct Pre-design Formula for TLCD, Engineering Structures, v. 75, p. 528-538. 2015a.

DI MATTEO, A.; LACONO, F. LO.; NAVARRA, G.; PIRROTTA, A. Innovative modelling of Tuned Liquid Column Damper Motion, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 23 (1-3), p. 229-244. 2015b.

DEN HARTOG J.P. Mechanical Vibrations. McGraw-Hill, New York, 1956.

DODGE, F.T. The New Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers. Update of NASA SP-106, Southwest Research Institute. San Antonio, Texas, 2000.

ESPINOZA, G.; CARRILLOA, C.; SUAZOA, A. Analysis of a Tuned Liquid Column Damper in Non-Linear Structures Subjected to Seismic Excitations, Latin American Journal of Solid and Structure, v. 15(7), 2018.

FREITAS, M.R.; PEDROSO, L.J. Rotinas Computacionais em Python para o Estudo do Comportamento de Amortecedores de Líquido Sintonizado na Atenuação de Vibrações em Estruturas. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2(26), p. 128-135. 2017.

FREITAS, M.R.; PEDROSO, L. J. A Comparative Analysis of TLCD Equipped Shear Buildings Under Loads. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, v. 5(1), p.40-45. 2019.

FUJINO, Y.; PACHECO, B.M.; CHAISERI, P.; SUN, L.M. Parametric Studies on Tuned Liquid Damper (TLD) Using Circular Containers by Free-Oscillation Experiments. *Structural Engineering - Earthquake Engineering*, Japan Society of Civil Engineers, v. 398, p. 117-187, 1988.

GRAHAM, E.W.; RODRIGUEZ, A.M. The Characteristics of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics, *ASME J. Applied Mechanics*, 19, p. 381-388, 1952.

HOUSNER, G.W.; BERGMAN, L.A.; CAUGHEY, T. K.; CHASSIAKOS, A.G.; CLAUS, R.O.; MASRI, S.F.; SKELTON, R.E.; SOONG, T.T.; SPENCER, B.F.; YAO, J. T.P. Structural Control: Past, Present, and Future. *Journal of Engineering Mechanics*, p. 897-971, 1997.

<http://cvmob.souceforge.net>

IBRAHIM, R.A. *Liquid Sloshing Dynamics, Theory and Application*. Cambridge University Press, 2005.

IBRAHIM, R.A. Recent Advances in Vibro-Impact Dynamics and Collision of Ocean Vessels, *Journal of Sound and Vibration*, v. 333(23), p. 5900-5916, 2014.

KANG, J.; OH, H. Stability of Fluid Motion in a Vehicle Subject to Harmonic Excitations. in *Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 2006.

KAREEM, A.; SUN, W.J. Stochastic Response of Structures with Fluid-containing Appendages. *Journal of Sound and Vibration*, v. 119(3), p. 389–408, 1987.

KAREEM, A. *Liquid Tuned Mass Dampers: Past, Present and Future*, Proceedings of The Seventh U.S. National Conference on Wind Engineering, v.1. Los Angeles, 1993.

KAREEM, A.; KIJEWski, T.; TAMURA, Y. Mitigation of Motions of Tall Buildings with Specific Examples of Recent Applications. *Wind and Structures: An International Journal*, v.2 (3), p. 201-251, 1999.

LACKNER, M.A.; ROTEA, M. A. *Passive Structural Control of Offshore Wind Turbines*. Wind Energy, John Wiley & Sons, Ltd., v. 14(3), p. 373-388, 2011.

LE MEHAUTE, B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Springer – Verlag New York Inc, 1976.

LI, Y.; GONG, Y. Equivalent Mechanical Models of Sloshing Fluid in Arbitrary-Section aqueducts. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. v. 41, p. 1069-1087, 2012.

LI, Y.; WANG. A Supplementary, Exact Solution of an Equivalent Mechanical Model for a Sloshing Fluid in a Rectangular Tank. *Journal of fluid and structures*, p. 147-151, 2011.

LIMA, Q. R. Identificação de Parâmetros pelo Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. Relatório Técnico de Pesquisa. DEM - Departamento de Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

LOVE, J. S.; TAIT, M. J. Equivalent Linearized Mechanical Model for Tuned Liquid Dampers of Arbitrary Tank Shape, *Journal of Fluids Engineering*. ASME, v. 133(6), p. 61105-61109. 2011.

LOVE, J. S.; TAIT, M. J. Equivalent mechanical model for Tuned Liquid Dampers of Complex Tank Geometry Coupled to a 2D Structure, *Journal of Fluids Engineering*. ASME, v. 133(6), p. 61105-61109. 2013.

MALEKGHASEMI. H. Experimental and Analytical Investigations of Rectangular Tuned Liquid Dampers (TLDs). Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2011.

MATLAB. Matrix Laboratory – R2015b. MathWorks – MATLAB and Simulink for Technical Computing. Massachusetts, U.S.A, 2015.

MCMARA, R. J. Tuned Mass Dampers for Buildings, *Journal of Structural Division*, ASCE, v. 103(9), p.1785-1789, 1977.

MENDES, M. V.; FREITAS, M. R.; PEDROSO, J. L. Efeitos da Interação Solo-Estrutura na Análise Sísmica de Edificações com Amortecedor de Coluna Líquida Sintonizada, XXXVIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Lima, Perú, 2018.

MENDES, M. V.; Análise Sísmica de Edifícios com Interação Solo-Estrutura e Atenuadores de Coluna Líquida Pressurizada. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília, Brasília, 152p. 2018.

MENDIS, P.; NGO, T.; HARITOS, N.; HIRA, B.; SAMALI, B.; CHEUNG, J. Wind Loading on tall Buildings. *EJSE Special Issue: Loading on Structures*, vol. 3, p. 41-54, 2007.

MODI, V.J., and SETO, M.L., Suppression of Flow-Induced Oscillations using Sloshing Liquid Dampers: Analysis and Experiments, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* p. 611-625, 1997.

MORAIS, M. V. Modelização Numérica pelo Método dos Elementos Finitos em Problemas de Interação Fluido-Estrutura. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília, Brasília, 2000.

MURTAGH P. J.; BASU B.; BRODERICK B.M. Along-Wind of a Wind Turbine Tower With Blade Coupling Subjected to Rotationally Sampled Wind Loading. *Engineering Structures*, vol. 27, p. 1209-1219, 2008.

NICKAWDE, C.; HARISH P.M.; ANANTHKRISHNAN, N. Stability Analysis of a Multibody System Model for Coupled Slosh-Vehicle Dynamics. *Journal Sound and Vibrations*, p. 275, 1069-1083, 2004.

NNAMANI, N. Strategies for Mitigating Wind-Induced Motion in Tall Buildings Through Aerodynamic and Damping Modifications, 2012.

NOJI, T.; YOSHIDA, H.; TATSUMI, E.; KOSAKA, H.; HAGIUDA, H. Study on Vibration Control Damper Utilizing Sloshing of Water. *Journal of Wind Engineering*, v.37, p. 557-566, 1988.

NOLTE, C. One Rincon Tower Features Water Tank on Top to Counteract Wind. *The San Francisco Chronicle*. Retrieved December 29, 2007.

NOVO, T.; VARUM, H.; DIAS, F.T., RODRIGUES, H.; SILVA, M.J.F.; COSTA, A. C.; GUERREIRO, L. Tuned Liquid Dampers Simulation for Earthquake Response Control of Buildings. *Bulletin of Earthquake Engineering*, Lisboa, p.1-10, 2014.

PARK, J.; IM, S.; SUNG, H. J.; PARK, J.S. PIV Measurements of Flow Around an Arbitrarily Moving Free Surface. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p.1-16, 2015.

PEDROSO, L. J. Interação Fluido-Estrutura. In: Notas de Curso e Apostila Didática, Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC – Universidade de Brasília – FT/ENC vs. 01, Brasília DF, 1992.

PEDROSO, L. J. Analytical Solutions for the Study of the Acoustic Behaviour of Cavities with Rigid and Flexible Walls – An Approach for Dams-Reservoir Interaction – Part II. Relatório de estudos de Pós-doutorado, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division. 2000.

PEDROSO, L. J. Controle de Vibrações em Estruturas com a Utilização de TLCD's In: Notas de Curso e Apostila Didática de Dinâmica das Estruturas II, Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC – Universidade de Brasília – FT/ENC vs. 01, Brasília DF, 2016.

PEÑA, N.; CREDIDIO, B.C., CORREA, L.P.N; FRANÇA, L.G.S.; CUNHA, M. V.C.; VIEIRA, J.P.B.; MIRANDA, J.GV. Free Instrument for Measurements of Motion. *Rev. Bras. Ensino Fís*, São Paulo, vol 35, n 5, 2013.

PEÑA, L.A.P. Resposta Dinâmica de Edificações Adjacentes Acopladas: Considerações sobre a interação solo- estrutura. Tese de Doutorado – Estruturas e Construção Civil, Faculdade de Engenharia civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

RAMOS, C.M. Controle de Vibrações em Estruturas de Engenharia civil. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2007.

RAO, S. S. *Mechanicals Vibrations*. Fifth Edition. Prentice Hall. PEARSON, p. 842, 2010.

ROBINSON, J.; GAMBLE, S.; MYSLIMAJ, B. Supplemental Damping and Using Tuned Sloshing Dampers Structure, Magazine, p. 1-5, 2007.

SHIMISU T.; HAYAMA, S. Nonlinear Response of Sloshing Based on the Shallow water Wave Theory, The Japan Society of Mechanical Engineers, No. 86-0385A, 1986.

SHUM, K.M.; XU, Y.L.; GUO, W.H. Wind-Induced Vibration Control of Long Span Cable-Stayed Bridges using Multiple Pressurized Tuned Liquid Column Dampers. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, v. 96(2), p.166-192. 2008.

SPENCER JR, B.F.; NAGARAJAIAH, S. State of the Art Structural Control, Journal of Structural Engineering, v. 129 (7), p. 845-856, 2003.

SOONG T.T.; DARGUSH G.F. Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering. John Wiley and Sons, Chichester, 1997.

SORKHABI, A.; MALEKGHASEMI, H.; MERCAN, O. Dynamic Behaviour and Performance Evaluation of Tuned Liquid Dampers (TLDs) Using Real-Time Hybrid Simulation. Structures Congress 2012, p. 2153-2162, 2012.

SORKHABI, A.A; MALEKGHASMI, H.; GHAEMMAGHAMI, A.; MERCAN. O. Experimental Investigations of Tuned Liquid Damper-Structure Interactions in Resonance Considering Multiple Parameters, Journal of Sound and Vibration, v.388, p. 141-153. 2017.

SOUSA NETO, A. F. Otimização de Parâmetros Dinâmicos Discretos em TLD Acoplado a Estrutura, Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2018.

SUN, L, M.; FUJINO, Y.; PACHECO, M.; ISOBE, M. Nonlinear Waves and Dynamic Pressure in Rectangular Tuned Liquid Damper (TLD). Structural Engineering/Earthquake Engineering Vol.6. No. 2, p. 251s-262s, 1989.

SUN, L, M. Semi-Analytical modeling of Tuned Liquid Damper (TLD) with Emphasis on Damping of Liquid Sloshing. PhD Thesis, University of Tokyo, Japan, 1991.

SUN, L. M., FUJINO, Y., PACHECO, M.; CHAISERI, P. Modelling of Tuned Liquid Damper (TLD). Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics p. 41-44, 1992.

SUN, L.M.; FUJINO, Y.; CHASERI, P.; PACHECO, B. M. The Properties of Tuned Liquid Dampers Using a TMD Analogy. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, p. 24, 967-976, 1995.

TAIT, M.J.; EL DAMATY, A.A.; ISYUMOV, N. The Dynamic Properties of a Tuned Liquid Damper using an Equivalent Amplitude Dependent Tuned Mass Damper. Structural Specialty Conference of the Canadian Society for Civil Engineering, Québec, Canada, 2002.

TAIT, M.J. Modelling and Preliminary Design of a Structure-TLD System. *Engineering Structures* p.2644–2655, 2008.

TANG, B.; BRENNAN, M. J.; GATTI, G.; FERGUSON, N.S. Experimental Characterization of a Nonlinear Vibration Absorber Using Free Vibration. *Journal of Sound and Vibration* 3.67, p. 159-169, 2016

XUE, S. D.; KO, J.M.; XU, Y.L. Experimental Study on Performance of Tuned Liquid Column Damper in Suppressing Pitching Vibration of Structures, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.10 (5), p. 386-396. 1999.

YU, J.K.; WAKAHARA, T.; REED D. A Non-Linear Numerical Model of The Tuned Liquid Damper. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 28, p. 671-686, 1999.

YUE, B. Study on the Chaotic Dynamics in Attitude Maneuver of Liquid Filled Flexible Spacecraft. *AIAA* 49. 2090 – 2099, 2011.

WARBURTON, G. B. Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 381 – 401, 1982. .

ZHANG, Z.; NIELSEN, S.R. K.; BASU, B.; LI, J. Nonlinear modelling of Tuned Liquid Dampers (TLDs) in Rotating Wind Turbine Blades for Damping Edgewise Vibrations, *Journal of Fluids and Structures*, v. 59, p. 252-269, 2015.

ZHANG, Z.; STAINO, A.; BASU, B.; NIELSEN, S.R.K.. Performance Evaluation of Full-Scale Tuned Liquid Dampers (TLDs) for Vibration Control of Large Wind Turbines using Real-Time Hybrid Testing, *Engineering Structures*, v. 126, p. 417-431, 2016.

ZULUAGA, A.L. Controle de Vibrações em Edifícios Submetidos à Ação de Cargas Dinâmicas utilizando Amortecedor de Massa Sintonizado na Forma de Pêndulo. *Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.*