



**MÉTODO SEM MALHA LOCAL – SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE EM MECÂNICA DA
FRATURA LINEAR ELÁSTICA**

TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MÉTODO SEM MALHA LOCAL – SUBTRAÇÃO DA
SINGULARIDADE EM MECÂNICA DA FRATURA LINEAR
ELÁSTICA**

TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

ORIENTADOR: ARTUR PORTELA

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.TD-4A/19

BRASÍLIA/DF: JUNHO - 2019

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MÉTODO SEM MALHA – SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE EM
MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA**

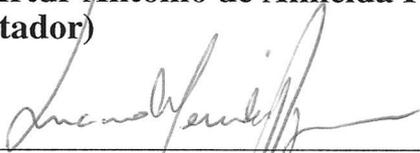
TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

**TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

APROVADO POR:



**Prof. Artur Antônio de Almeida Portela, PhD (ENC-UnB)
(Orientador)**



**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC-UnB)
(Examinador Interno)**



**Prof. Éder Lima de Albuquerque, PhD (ENM-UnB)
(Examinador Externo)**



**Prof. Miguel Enrique Parra Muñoz, DSc (ENC-IESB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 12 DE JUNHO DE 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, TIAGO S.

Método sem malha local – Subtração da singularidade em mecânica da fratura linear elástica. [Distrito Federal] 2019.

xxii, 129p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2019). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método sem malha local

2.Teorema do Trabalho local

3.Mecânica da fratura

4.Campo elástico generalizado

5.Fator de intensidade de tensão

6.Subtração da singularidade

I.ENC/FT/UnB

II.Título (Doutor)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, T. S. (2019). Método sem malha local – Subtração da singularidade em mecânica da fratura linear elástica. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-4A/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 129p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Tiago da Silva Oliveira.

TÍTULO: Método sem malha local – Subtração da singularidade em mecânica da fratura linear elástica.

GRAU: Doutor

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa Tese de Doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Tiago da Silva Oliveira
QSE 01 Casa 23 Taguatinga Sul
72.025-010 Brasília – DF – Brasil.

It's only natural for living creatures to fight to protect their own lives. But what makes us human is that we fight for others.

– Phoenix Wright

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me colocado neste caminho e junto a mim pessoas maravilhosas.

À toda minha família, principalmente aos meus pais, Helena N. Silva e Leonardo A. Oliveira; ao meu irmão, Rafael S. Oliveira, meus maiores exemplos, por todo o apoio, confiança, paciência e dedicação que tiveram comigo desde o início desta grande jornada. Em especial, gostaria de agradecer também a minha prima Renata M. Silva pelo apoio e pela revisão ortográfica desta tese. Obrigado por todos os ensinamentos e por tudo que vocês sempre fizeram por mim, me ajudando não importando onde eu estivesse, não importando qual fosse o obstáculo.

Ao meu orientador e amigo Prof.^o Artur Portela pela excelente orientação e paciência, superando comigo os desafios de se conduzir uma pesquisa e de publicar nossas descobertas em periódicos internacionais. Sem este esforço conjunto este trabalho jamais teria se tornado possível. Espero que algum dia essa pesquisa, de alguma forma, possa ajudar a engenharia a alcançar novos patamares e contribuir para a melhoria do mundo. Agradeço, também, aos meus companheiros de tese Elvis Santana, Wilber Velez e Thiago Araujo por todo o auxílio nos momentos de dificuldades enfrentados ao longo desta pesquisa e por compartilharem seus conhecimentos e experiências comigo.

Aos demais professores e funcionários do PECC - *Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, expressei meu agradecimento pelos conhecimentos e experiências transmitidos no decorrer do curso.

Agradeço ao professor Miguel E. Genovese e ao meu grande amigo Vismay Mod por me guiarem com paciência e dedicação nos caminhos da Engenharia Civil e da modelagem computacional. Obrigado pelo apoio, confiança e pelos ensinamentos durante todo meu período acadêmico. Seus conselhos contribuíram para as minhas conquistas.

Finalmente, agradeço aos amigos por todos os momentos de estudo, alegrias, tristezas e companheirismo. Em especial a Lilian S. Alves, Victor H. A. Pacheco, Jonathas S. Oliveira, Gabriel L. Foleiss, Pedro G. P. Leite, Elthon Rodrigues, Julia Oliveira, Polyana Ribeiro, Renata Marissa e meu afilhado Arthur A. Oliveira; bem como aos meus companheiros de mestrado Aurélio C. Feliciano, Thalles Faria, Gabriel Oliveira, Glediston N. Costa Jr. e ao meu companheiro de doutorado Renato Maia; que contribuíram de forma significativa para a realização deste trabalho. Tenho consciência de que tomei horas preciosas de seu tempo e agradeço por estarem ao meu lado sempre que precisei. Esta jornada não seria a mesma sem vocês, pois vocês tornaram esta caminhada prazerosa e gratificante.

Obrigado a todos que acreditaram em mim e me incentivaram e ajudaram na realização deste sonho.

RESUMO

MÉTODO SEM MALHA LOCAL – SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE EM MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Autor: Tiago da Silva Oliveira

Orientador: Artur Portela

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, junho de 2019

Essa pesquisa discorre sobre a formulação do método sem malha local, aplicada à solução de problemas bidimensionais no âmbito da mecânica da fratura linear elástica. O método sem malha local, denominado *Generalized-Strain Mesh-Free formulation* (GSMF), é baseado no método dos resíduos ponderados e resulta na forma fraca local, que nada mais é do que o teorema do trabalho advindo da teoria das estruturas. Em uma região local arbitrária, o teorema do trabalho estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões estaticamente admissível e um campo de deformações cinematicamente admissível, resultando em uma formulação totalmente livre de integração numérica e com apenas termos de contorno com a aproximação do campo elástico pelo método dos mínimos quadrados móveis (MQM). Aplicações do método sem malha local, necessitam de uma discretização nodal, que requer a especificação de dois parâmetros de discretização: o tamanho do suporte compacto e o tamanho do domínio de colocação, respectivamente. Na presente pesquisa, esses parâmetros são definidos automaticamente por meio de uma otimização multiobjetiva utilizando algoritmos genéticos. Esse é um dos grandes destaques da presente pesquisa. As aplicações em mecânica da fratura linear elástica com GSMF são realizadas utilizando-se a técnica da subtração da singularidade, ou *Singularity Subtraction Technique* (SST), que regulariza o campo elástico antes da solução numérica, assim introduzindo o fator de intensidade de tensão, ou *Stress Intensity Factor* (SIF), como variáveis primárias do problema. Sendo assim, o modelo numérico realiza o cálculo do SIF diretamente, sem a necessidade de uma discretização nodal refinada para se obter resultados precisos, o que faz desta uma eficiente estratégia de modelagem. Quatro problemas foram analisados utilizando esses procedimentos, buscando mensurar a eficiência e a precisão do método proposto. Os resultados obtidos com a análise estão em perfeita concordância com as soluções analíticas. A acurácia e a eficiência das implementações descritas acima fazem do método sem malha local uma nova estratégia de modelagem confiável e robusta, no âmbito da teoria das estruturas.

ABSTRACT

A LOCAL MESH FREE METHOD WITH THE SINGULARITY SUBTRACTION TECHNIQUE IN LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS

Author: Tiago da Silva Oliveira

Supervisor: Artur Portela

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, june of 2019

This research is concerned with a local mesh free numerical model (GSMF) developed to solve two-dimensional problems in linear elastic fracture mechanics. The model formulation is based in the work theorem, kinematically formulated with a rigid-body displacement and generalized function. The discretization considers the approximation of the elastic field with moving least squares (MLS) and is completely integration free, with only boundary terms. Application of mesh free local numerical methods, to a nodal discretization, requires the specification of two discretization parameters which are the size of, respectively the compact support and the local integration domain, of each node. In this research, these parameters are automatically defined through a multi-objective optimization process, based on genetic algorithms. This is the novelty of the present numerical method. Linear elastic fracture mechanics applications of ILMF carry out the singularity subtraction technique (SST) which regularizes the elastic field, before the numerical solution, thus introducing the stress intensity factors (SIF) as additional primary unknowns of the problem. Hence, the numerical model performs a direct computation of the SIF and does not require a refined discretization to obtain accurate results which, therefore, is an efficient model strategy. Benchmark problems were solved, for an assessment of the accuracy and efficiency of these techniques.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE FIGURAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 OBJETIVOS	7
1.2.1 Objetivo geral	7
1.2.2 Objetivos específicos	7
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS	9
2.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO	10
2.3 EQUAÇÃO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	11
2.4 DISCRETIZAÇÃO INDIRETA COM FUNÇÕES GLOBAIS	13
2.4.1 Métodos de aproximação de domínio	13
2.4.2 Método de Galerkin	13
2.4.3 Método da Colocação	14
2.4.4 Método dos Mínimos Quadrados	15
2.5 TEOREMAS DE ENERGIA	15
2.5.1 Teorema do trabalho	15
2.5.2 Energia potencial total	17
2.6 MÉTODOS SEM MALHA	18
2.6.1 Definição	18
2.6.2 Funções de aproximação	19
2.6.3 Funções de forma	20
2.6.4 Funções ponderadoras	21
2.6.5 Suporte compacto	22
2.6.6 Domínio de definição	22
2.6.7 Imposição das condições de contorno essenciais	23
2.6.8 Avaliação das integrais	23
2.6.9 Métodos sem malha baseado na forma fraca global	24
2.6.10 Métodos sem malha baseados na forma fraca local	25
2.7 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	26

2.7.1	Modos de deslocamento na ponta da trinca	26
2.7.2	Campo elástico local	26
2.7.3	Fator de intensidade de tensão	33
2.7.4	Postulado fundamental	34
2.7.5	Campo elástico na ponta da trinca	34
2.8	INTRODUÇÃO à OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA	36
2.8.1	Otimização mono-objetiva	38
2.8.2	Otimização Multi-objetiva	38
2.8.3	Algoritmo Genético	41
3	FORMULAÇÃO DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL	44
3.1	MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS	44
3.1.1	Funções de Forma	45
3.1.2	Funções de Ponderação	47
3.1.3	Campo Elástico	48
3.2	FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO	50
3.3	CAMPO ELÁSTICO GENERALIZADO (GSMF)	53
3.4	COMPORTAMENTO DA FORMA FRACA LOCAL	58
4	MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	61
4.1	MÉTODO DA VISIBILIDADE, DA DIFRAÇÃO E DA TRANSPARÊNCIA	61
4.2	TÉCNICA DA SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE	63
4.2.1	Campo elástico original	64
4.2.2	Campo elástico regularizado	64
4.2.3	Solução particular singular de Williams	65
4.2.4	Análise com a formulação do campo elástico generalizado (GSMF)	67
4.2.5	Equações adicionais	69
5	OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO DOS MÉTODOS SEM MALHA	71
5.1	PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO	71
5.2	FUNÇÕES OBJETIVO	72
5.2.1	Parâmetro dos Mínimos Quadrados Móveis	72
5.2.2	Parâmetro do Domínio Local	73
5.3	FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO	74
5.4	OTIMIZAÇÃO AUTOMÁTICA DOS PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO	76
5.5	ASPECTOS ESPECÍFICOS DA IMPLEMENTAÇÃO NO MATLAB	78
6	METODOLOGIA	81

6.1	ASPECTOS GERAIS	81
6.2	PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL	81
6.3	ERRO RELATIVO	85
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	86
7.1	Otimização dos parâmetros adimensionais	86
7.1.1	Otimização baseada no erro relativo	89
7.1.2	Otimização baseada na conformidade estrutural	92
7.1.3	Otimização baseada no domínio local	97
7.1.4	Otimização automática dos parâmetros de discretização	99
7.2	Mecânica da fratura linear elástica	103
7.2.1	Placa com trinca de borda – Modo-I	103
7.2.2	Placa com trinca de borda – Modo-II	106
7.2.3	Placa com trinca de borda inclinada – Modo misto	108
7.2.4	Placa com uma trinca central inclinada – Modo misto	111
7.2.5	Placa com uma trinca interna de ângulo raso – Modo misto	114
8	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	118
8.1	CONCLUSÕES	118
8.1.1	Publicações	119
8.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	120
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129

LISTA DE TABELAS

2.1	Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005).	19
2.2	Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005).	21
7.1	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 52 nodes, referente a Figura 7.3a	90
7.2	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 165 nodes, referente a Figura 7.3b	90
7.3	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 585 nodes, referente a Figura 7.3c	90
7.4	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 52 nodes para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9a	95
7.5	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 165 nodes para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9b	95
7.6	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 585 nodes para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9c	96
7.7	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 52 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11a	99
7.8	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 165 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11b	101
7.9	Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 585 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11c	101
7.10	Placa retangular com uma trinca de borda única sob carregamento em modo-I. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Civelek e Erdogan (1982).	105

7.11	Placa retangular com uma trinca de borda única sob carregamento em modo-II. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir dos valores obtidos com o J-DBEM.	107
7.12	Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 30^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).	110
7.13	Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 30^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).	110
7.14	Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 60^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).	110
7.15	Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 60^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).	111
7.16	Placa retangular com uma trinca central inclinada de $\theta = 45^\circ$, para os valores de $K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).	113
7.17	Placa retangular com uma trinca central inclinada de $\theta = 45^\circ$, para os valores de $K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).	114

7.18	Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso, para os valores de $K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).	116
7.19	Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso, para os valores de $K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).	117

LISTA DE FIGURAS

2.1	Etapas da modelação matemática do problema físico. Adaptado de Portela e Charafi (2002).	10
2.2	Métodos de aproximação e discretização. Adaptado de Portela e Charafi (2002).	11
2.3	Diagrama de Tonti apresentando a ligação entre campos cinemáticos e estáticos.	16
2.4	Representação do domínio nos métodos sem malha e no Método dos Elementos Finitos (MEF).	19
2.5	Suporte compacto do ponto de interesse em I em diferentes modelos de métodos sem malha. Adaptado de Chen et al. (2006).	22
2.6	Uso de <i>background cells</i> em métodos sem malha baseados na forma fraca global. Adaptado de Liu e Gu (2005).	23
2.7	Domínio local Ω_S de um nó x . Adaptado de Atluri et al. (2004).	24
2.8	Modos de deslocamento da ponta da trinca básicos de um corpo trincado.	27
2.9	Geometria de um entalhe pontudo no sistema de coordenadas polares e cartesianas.	28
2.10	Representação da otimalidade de Pareto no espaço objetivo e as possíveis relações entre as soluções no espaço objetivo.	40
2.11	Diagrama da lógica computacional de um algoritmo genético simples.	42
3.1	Representação de uma discretização do domínio global Ω usando o método sem malha, com um contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, com uma distribuição nodal \mathbf{x}_i . Ω_s , representado como Ω_P , Ω_Q e Ω_R , é o suporte compacto do nó; Ω_x é o domínio de definição de um ponto qualquer \mathbf{x} e Ω_q é o domínio da forma fraca local ou domínio de quadratura do nó \mathbf{x}_i	45
3.2	Exemplo unidimensional da aproximação pelos MQM, onde $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$	45
3.3	Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para um nó $x = [1/2 \ 0]^T$	47
3.4	Representação do domínio global Ω , suas fronteiras natural Γ_t e essencial Γ_u e os subdomínios Ω_Q associados ao nó Q , com contorno interno $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$. Nós P e R, de forma similar, possuem domínios locais correspondentes a Ω_P e Ω_R	51
3.5	Esquema representando o deslocamento $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, dado pela equação (3.39), um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos pontos de colocação, da formulação do GSMF, para um domínio local arbitrário associado ao nó Q	55

3.6	Esquema representando o equilíbrio das forças de corpo e forças de superfície, da equação (3.45), pontualmente definidas nos pontos de colocação de um domínio local associado ao nó Q , da formulação do GSMF.	57
3.7	Domínio local interno Ω_Q , com dimensões $L \times L$, sob carregamento constante t , ao longo de cada lado do contorno Γ_Q ; a equação da forma fraca local da integração de contorno do RBDMF é idêntica as equações da forma fraca local do contorno de colocação do GSMF.	59
4.1	Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca, e um nó x_j , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da visibilidade.	62
4.2	Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da difração.	62
4.3	Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da transparência.	63
4.4	Componentes das forças de superfície de um campo elástico regularizado na ponta de uma trinca.	69
5.1	Fluxograma da rotina totalmente automatizada; a primeira etapa é apresentada na direita, enquanto que a segunda etapa é apresentada na esquerda.	77
6.1	Distribuição de pontos de colocação, no contorno de cada domínio local, para a integração da forma fraca local do GSMF.	82
6.2	Representação esquemática do domínio de colocação dos nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	84
7.1	Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária.	86
7.2	Distribuição regular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 52, 165 e 585 nós.	88
7.3	A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do erro relativo r_ϵ , do tempo de processamento (<i>CPU Time</i>) em segundos e do erro relativo r_u ; apenas os dois primeiros foram apresentados graficamente.	91
7.4	Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.	92
7.5	Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.	93
7.6	Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ϵ , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $13 \times 4 = 52$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$	93

7.7	Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ε , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$	94
7.8	Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ε , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $65 \times 9 = 585$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$	94
7.9	A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do indicador de conformidade C e do tempo de processamento ($CPU\ Time$) em segundos.	96
7.10	Erro relativo r_ε em função da relação A_q , entre o somatório das áreas dos domínios locais dos nós na discretização sem malha com a área do domínio global do problema, para $\alpha_s = 4.5$ fixo e número máximo de gerações de 100, 200, 400 e 800; para uma distribuição nodal com 165 nós.	98
7.11	A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do indicador de conformidade C , do tempo de processamento ($CPU\ Time$) em segundos e da relação A_q , para a rotina totalmente automatizada de otimização.	100
7.12	Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, utilizando a rotina totalmente automatizada de otimização.	102
7.13	Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, utilizando a rotina totalmente automatizada de otimização.	102
7.14	Placa retangular com uma única trinca de borda sob carregamento em modo-I ($h/w = 0.5$).	104
7.15	Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $10 \times 10 = 100$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.	104
7.16	Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo-I. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	105
7.17	Placa retangular com uma única trinca de borda sob carregamento em modo-II ($w = 2h$).	106
7.18	Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $16 \times 16 = 256$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.	107
7.19	Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo-II. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	108

7.20	Placa retangular com uma única trinca inclinada de borda sob tração remota.	109
7.21	Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $16 \times 16 = 256$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.	109
7.22	Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo misto. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	111
7.23	Placa retangular com uma trinca reta central inclinada sob carregamento uniforme \bar{t}	112
7.24	Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $7 \times 12 = 84$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.6$. A linha vermelha representa as faces da trinca.	113
7.25	Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.6$, sob carregamento uniforme. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	115
7.26	Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.6$, sob carregamento uniforme. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.	115
7.27	Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso sob carregamento uniforme \bar{t}	116
7.28	Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $7 \times 12 = 84$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.1$. A linha vermelha representa as faces da trinca.	117

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Símbolos do Alfabeto Grego

α_q	Fator adimensional do domínio local de integração/colocação
α_s	Fator adimensional do suporte local
α_i	Conjunto de coeficientes indeterminados
$\delta(x - x_i)$	Função delta de <i>Dirac</i>
Γ	Contorno
Γ_t	Contorno estático
Γ_u	Contorno cinemático
μ	modulo de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
Ω	Domínio
$\phi_i(\mathbf{x})$	Função de forma da aproximação com mínimos quadrados móveis
ϕ_i	Conjunto de funções linearmente independentes
σ	Campos de tensão
ε	Campo de deformações
ε^*	Campo de deformações cinematicamente admissível
σ_{ij}^R	Componentes regulares do campo de tensões
σ_{ij}^S	Componentes singulares do campo de tensões

Símbolos do Alfabeto Latino

\hat{u}_i	Parâmetros nodais
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Vetor de coeficientes
d_i	Distância entre um ponto qualquer x e o nó i
r_i	Tamanho do suporte compacto para o nó i

$w(\mathbf{x})$	Função peso
\mathbf{B}	Matriz dos operadores lineares
\mathbf{D}	Matriz constitutiva do material
\mathbf{J}^{-1}	inverso do Jacobiano
\mathbf{J}	Jacobiano
\mathbf{k}_m	Vetor contendo os fatores de intensidade de tensão (SIF)
\mathbf{n}	Matriz das componentes do vetor normal unitário
\mathbf{p}	Base polinomial
\mathbf{U}	Vetor contendo os deslocamentos nodais prescritos
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos
Ω_q	A área total da solução do problema.
a	Comprimento da trinca
A_{Ω_q}	A área do subdomínio de colocação de cada nó.
C	Conformidade estrutural (<i>compliance</i>)
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
g	Função com valor prescrito
h	Altura da placa
I	Momento de inércia da seção transversal
L	Operador diferencial linear
R	Resíduo de uma aproximação
R_Γ	Resíduo de uma aproximação do contorno
R_Ω	Resíduo de uma aproximação do domínio
r_ε	Erro relativo com base na norma da energia
r_u	Erro relativo com base na norma do deslocamento

r_{Ω_q}	Tamanho do domínio local de integração/colocação
r_{Ω_s}	Tamanho do suporte local
$u^h(\mathbf{x})$	Deslocamento aproximado
u_0	Solução exata
W	Função ponderadora arbitrária
W	Largura da placa
W_Γ	Função ponderadora arbitrária do contorno
W_Ω	Função ponderadora arbitrária do domínio
\mathbf{b}	Vetor forças de corpo
\mathbf{t}	Componentes das forças superficiais
\mathbf{u}^*	Campos de deslocamento admissível
$\bar{\mathbf{t}}$	Valores das forças superficiais prescritas
$\bar{\mathbf{u}}$	Valores dos deslocamentos prescritos
c_i	Distância do nó i até o nó mais próximo na vizinhança do mesmo
$H(d)$	Heaviside step function
K_{II}	Fator de intensidade de tensão (SIF) do Modo II - cisalhamento
K_I	Fator de intensidade de tensão (SIF) do Modo I - abertura
u_i^R	Componentes regulares do campo de deformações
u_i^S	Componentes singulares do campo de deformações
F	Matriz das componentes de Williams do deslocamento singular no contorno, dada uma ponta de trinca
G	Matriz das componentes de Williams das forças de superfície singulares no contorno, dada uma ponta de trinca

Abreviatura

AG	Algoritmo genético
BEM	Boundary Element Method

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

DBEM Dual Boundary Element Method

DEM Diffuse Element Method

EEM Eigenfunction Expansion Method

EFG Element-free Galerkin

ELSEVIER Editora holandesa de literatura médica e científica

FEM Finite Element Method

GA Genetic Algorithm

GFDM Generalized Finite Difference Method ou Método da diferença finita generalizada

GFEM Generalized Finite Element Method

GSMF Generalized-Strain Mesh-Free formulation ou formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local

HCE Hybrid Crack Tip Element

J-DBEM Dual Boundary Element Method with J-integral

LEFM Linear Elastic Fracture Mechanics

LPIM Local Point Interpolation Method

LRPIM Local Radial Point Interpolation Method

MATLAB Matrix Laboratory

MEC Método dos Elementos de Contorno

MEF Método dos Elementos Finitos

MFPM Meshless Finite Point Method

Mfree Meshfree ou Meshless Method

MLBIE Meshless Local Boundary Integral Equation

MLPG Meshless Local Petrov–Galerkin

MLPG-FVM Meshless Local Petrov-Galerkin Finite Volume Method

MLS Moving Least Square

MQM Método dos Mínimos Quadrados Móveis

PECC Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

PIM Point Interpolation Method

PUFEM Partition of Unity Finite Element Method

RBDMF Rigid-Body Displacement Mesh-Free formulation ou formulação de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local

RKPM Reproducing Kernel Particle Method

RPIM Radial Point Interpolation Method

SIF Stress Intensity Factor

SPH Smoothed Particle Hydrodynamics

XFEM Extended Finite Element Method

1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as considerações iniciais que motivam a presente pesquisa, juntamente com um breve histórico sobre os avanços mais recentes nos métodos sem malha e suas aplicações na mecânica da fratura linear elástica. Os objetivos gerais e específicos são apresentados no final do capítulo.

1.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No âmbito da Engenharia Civil, fratura é uma das várias formas de falha estrutural que uma determinada estrutura pode sofrer ao longo de sua vida útil, assim como flambagem, deformação plástica excessiva e fadiga. Geralmente ela é causada por uma trinca, que se faz presente de alguma forma em todas as estruturas, seja como resultado de defeitos de fabricação ou como dano localizado em função do uso; que cresce progressivamente ao longo do tempo. Sendo assim, com o contínuo crescimento da trinca, a resistência estrutural decresce até que se torne tão baixa que as cargas em regime de serviço não podem mais ser suportadas, conseqüentemente ocorrendo a fratura.

A mecânica da fratura linear elástica pode ser utilizada para descrever o comportamento de trincas em geral, que possuem uma tensão infinita na ponta, como demonstrado por Brahtz (1933) e posteriormente por Williams (1952), que investigaram a forma analítica dessas singularidades. O postuldo fundamental da mecânica da fratura linear elástica afirma que o comportamento da trinca é exclusivamente determinado pelo fator de intensidade de tensão, que quando definido na ponta da trinca, mede a força dessa singularidade. Por sua vez, o fator intensidade de tensão é função do carregamento aplicado e da geometria da estrutura trincada, desempenhando assim um papel fundamental nas aplicações presentes nessa pesquisa.

Em geral, os métodos de modelagem numérica têm sido utilizados para a resolução de problemas relacionados à mecânica da fratura devido à complexidade de sua geometria, que está constantemente mudando à medida que a trinca cresce. Além disso, a presença da singularidade no modelo numérico acrescenta consideráveis dificuldades em virtude da necessidade de representar simultaneamente essa singularidade e o campo de tensões finito no modelo em questão.

Um desses métodos mais populares, utilizado largamente por engenheiros estruturalistas, é

o famoso Método dos Elementos Finitos (MEF), onde uma malha de elementos finitos é associada ao domínio do problema em questão. O MEF tradicional tem sido largamente utilizado, tanto profissionalmente quanto academicamente, para a resolução de problemas relacionados a mecânica da fratura (Andújar et al., 2011). Apesar disso, uma das maiores limitações do método é a que a singularidade não pode ser capturada corretamente e dessa forma, o resultado nas proximidades da ponta da trinca não são confiáveis (Liu, 2009).

Alguns métodos foram desenvolvidos para tentar sanar esse problema, dentre eles o *Hybrid Crack Tip Element* (HCE) (Tong et al., 1973), que pode ser usado no cálculo dos fatores de intensidade de tensão como demonstrado por Karihaloo e Xiao (2001) e Xiao et al. (2004). O HCE representa a trinca como um super-elemento que inclui a ponta da trinca, sendo este compatível e podendo ser conectado com os outros elementos finitos ao redor. Outra abordagem desenvolvida por Caicedo e Portela (2017) remove completamente a singularidade antes da análise do campo elástico regularizado, apresentando resultados precisos e sem dificuldades de convergência.

Mesmo com essas melhorias, o MEF ainda possui outra grande desvantagem, sendo essa o alto custo operacional e computacional para se criar uma malha de elementos finitos em análises adaptativas, como o crescimento de trincas, que precisam ser constantemente modificadas a cada nova interação. Apesar de alguns métodos atenuarem esse problema, como demonstrado por Bittencourt et al. (1996) e Bouchard et al. (2003), ele ainda assim persiste.

Com a maior difusão e conseqüente popularidade do método, novas pesquisas surgiram para tentar sanar essas limitações, tais como o *Extendend Finite Element Method* (XFEM), ou Método dos Elementos Finitos Expandido (Belytschko e Black, 1999); e o *Generalized Finite Element Method* (GFEM), ou Métodos dos Elementos Finitos Generalizados (Strouboulis et al., 2000). Dentre esses novos métodos se destacam os métodos sem malha ou *Meshfree*, que dispensam o uso da malha em sua formulação (Liu e Gu, 2003).

O método sem malha é um método relativamente novo, usado para estabelecer um sistema de equações algébricas para todo o domínio de um determinado problema físico, sem o uso de uma malha pré-determinada para isso. Essa é uma das suas principais vantagens, já que acaba por dispensar a intervenção humana na construção de malhas com qualidade, descartando dessa forma inconveniências como remalhamento. Além disso, os métodos sem malha possuem um melhor fator de convergência do que o MEF tradicional (Onate et al., 1996). Esse método obteve um notável progresso ao longo desses últimos anos onde, em geral, suas formulações são baseadas no método dos resíduos ponderados (Fernalyson, 1972).

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), apresentado por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977), é um dos primeiros métodos sem malha para a resolução de problemas

na astrofísica. Libersky et al. (1993) foram os primeiros a aplicar SPH em mecânica dos sólidos. As principais desvantagens do SPH são os resultados imprecisos perto dos contornos e instabilidade nas tensões, primeiramente investigado por Swegle et al. (1995). O SPH é baseado na formulação na forma forte do método dos resíduos ponderados, com descrição lagrangeana.

O método da colocação também é baseado na formulação na forma forte do método dos resíduos ponderados. Os métodos de colocação sem malha foram publicados por Kansa (1990), Zhang et al. (2001), Liu et al. (2002b), Onate et al. (1996), Lee e Yoon (2004) e Jamil e Ng (2013). Os métodos de colocação dos métodos sem malha têm algumas vantagens atrativas sobre outros métodos sem malha, já que um algoritmo simples é implementado com eficiência computacional, sendo verdadeiramente sem malha. Apesar dessas vantagens, os métodos de colocação sem malha tendem à imprecisão, não são robustos e, o pior de tudo, são instáveis devido a má formação do sistema de equações. Onate et al. (2001) apresentaram uma técnica de estabilização, introduzindo novos termos nas equações que governam o domínio e nas condições de contorno de forças de superfície. Apesar desses termos artificiais superarem as dificuldades de estabilização, eles são apropriados apenas para alguns problemas em particular.

Outros métodos sem malha são baseados na formulação na forma fraca do método dos resíduos ponderados. Depois da discretização, a forma fraca torna-se uma característica chave das formulações usadas para encontrar o sistema de equações algébricas, por um processo de integração numérica usando malhas de fundo ou *background cells*, globalmente ou localmente construídas no domínio do problema. As pesquisas baseadas nos métodos sem malha na forma fraca cresceram significativamente após a publicação do *Diffuse Element Method* (DEM), apresentado por Nayroles et al. (1992).

O *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM), apresentado por Liu et al. (1995), e o *Element-Free Galerkin* (EFG), por Belytschko et al. (1994a), foram os primeiros métodos sem malha na forma fraca aplicados à mecânica dos sólidos. Em contraste ao EFG e ao RKPM, que utilizam a chamada base intrínseca, outros métodos foram desenvolvidos com o conceito de bases extrínsecas e conceitos de partição da unidade. Essa base extrínseca foi utilizada no *hp-Cloud Method*, apresentado por Duarte e Oden (1996). Melenk e Babuska (1996) apontaram as similaridades entre os métodos sem malha e o MEF, apresentando o *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), que é similar ao *hp-Cloud Method* e também inclui a aproximação por mínimos quadrados móveis, ou como é mais conhecido, *Moving Least Square* (MLS), ou método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM).

Todos esses métodos sem malha na forma fraca necessitam de *background cells* para realizar a integração numérica da equação dos resíduos ponderados no domínio global do problema.

Portanto, eles não são verdadeiramente sem malha. Para solucionar essa limitação, uma nova classe de métodos sem malha surgiu, baseados na forma fraca local dos resíduos ponderados, como o *Meshless Local Petrov–Galerkin* (MLPG), apresentado por Atluri e Zhu (1998) e Atluri e Shen (2002), o *Meshless Local Boundary Integral Equation* (MLBIE), apresentado por Zhu et al. (1998), o *Local Point Interpolation Method* (LPIM), apresentado por Liu e Gu (2001a) e o *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), apresentado por Liu et al. (2002a). Dentre eles, o MLPG se tornou mais popular, baseado na aproximação por mínimos quadrados móveis. A principal diferença entre o MLPG e os outros métodos sem malha global é que a forma fraca local é utilizada para integração em domínios locais com formato retangular (ao invés da forma fraca global) e assim, conseqüentemente, não necessita de *background cells*.

Quando comparado com métodos de malha, como o MEF e o MEC, os métodos sem malha possuem algumas desvantagens, entre elas o grande esforço computacional necessário para sua aplicação, grande parte provinda da integração numérica, que requer um número adicional de etapas para ser realizado; dificuldade de implementação nas condições de contorno essenciais e um esforço extra na realização de simulações contendo descontinuidades advindas da trinca.

A implementação do *Meshless Finite Volume Method*, por meio de uma abordagem mista com o MLPG, foi apresentada por Atluri et al. (2004), para a resolução de problemas elasto-estáticos. Nessa abordagem, tanto a deformação quanto o deslocamento são interpolados de forma independente em pontos aleatoriamente distribuídos no domínio, por meio de um esquema de interpolação local como o MQM. Assim, os valores nodais de deformação são expressados em termo dos valores nodais de deslocamento, por um simples processo de imposição direta da relação deformação-deslocamento nos pontos nodais. Essa formulação elimina o extensivo processo de diferenciação direta dos deslocamentos para o cálculo da deformação, resultando em um método computacionalmente bem eficiente.

Buscando melhorar ainda mais a eficiência computacional dos métodos sem malha, assim como a precisão, duas formulações foram apresentadas por Oliveira e Portela (2016), a formulação de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local ou *Rigid-Body Displacement Mesh-Free formulation* (RBDMF), onde a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca apenas com termos de contorno (ausência de forças de corpo); e a formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local ou *Generalized-Strain Mesh-Free formulation* (GSMF), onde a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca completamente livre de integração numérica.

A precisão e a eficiência dos métodos sem malha locais são determinadas por dois fatores adimensionais, sendo respectivamente o suporte compacto de cada nó e o tamanho do

domínio local de cada nó. O primeiro parâmetro está primariamente ligado à precisão do modelo, devido ao número total de nós utilizados na construção das funções de forma de cada nó da distribuição nodal, enquanto o segundo está intimamente ligado à eficiência do modelo, onde a forma fraca da equação dos resíduos ponderados é definida computando-se por quadratura numérica ou colocação.

Os parâmetros adimensionais dos métodos sem malha são muito importantes, e afetam diretamente a performance e a precisão de uma análise utilizando o método. Os dois parâmetros geralmente são arbitrariamente definidos e podem variar bastante, dependendo do método sem malha local utilizado, sendo esta a razão por sempre serem apresentados juntamente com novos métodos sem malha desenvolvidos. Moussaoui e Bouziane (2013) realizaram um estudo sobre os efeitos na precisão e na convergência de diferentes parâmetros adimensionais para o MLPG. A principal desvantagem em definir os parâmetros heurísticamente é que eles não são únicos, sendo assim, não podem ser implementados em procedimentos automatizados, necessitando sempre da solução analítica para sua obtenção.

Dessa forma, uma otimização utilizando algoritmo genético no MLPG foi apresentada por Baradaran e Mahmoodabadi (2009), para uma problema bidimensional de condução de calor, e por Bagheri et al. (2011), para um problema elasto-plástico tridimensional. Uma otimização similar foi proposta por Ebrahimnejad et al. (2015), adicionando uma técnica de refinamento adaptativo ao processo de otimização, usando o MLPG-FVM. Apesar desses autores terem sido bem sucedidos em suas propostas, suas tentativas levaram a um método com alto custo computacional e dependente da solução analítica do problema em questão.

Recentemente, diversos avanços têm sido feitos no campo dos métodos sem malha, principalmente sobre suas novas aplicações. Neste contexto, Liu et al. (1996) mostraram a habilidade dos métodos sem malha ao lidar com simulações complexas, como impacto, fratura e dinâmica dos fluidos. Bouillard e Suleau (1998) aplicaram com sucesso os métodos sem malha na resolução de problemas acústicos. Por sua vez, Bonet e Lok (1999) introduziram um gradiente de correção para preservar o momento linear e angular em simulações com dinâmica dos fluidos e Onate e Idelsohn (1998) apresentaram o *Meshless Finite Point Method* (MFPM), baseado na aproximação por mínimos quadrados ponderados com pontos de colocação aplicados ao transporte e fluxo de fluidos.

Embora recentemente o XFEM/GFEM esteja recebendo mais atenção que os métodos sem malha, esses continuam sendo uma forma eficiente e precisa para resolver problemas relacionados à mecânica da fratura, apesar de suas desvantagens. Os métodos sem malha foram empregados para a solução de diferentes tipos de problemas, como interação de múltiplas trincas (Muravin e Turkel, 2002), simulação de trincas em modelos tridimensionais (Dufloy, 2006) e trincas em materiais elasto-plásticos (Rao e Rahman,

2004), elevando o método a um novo patamar, tornando-o cada vez mais atrativo para cientistas e engenheiros.

Diferentes técnicas são utilizadas para simular descontinuidades nos métodos sem malha, como pode ser visto em Nguyen et al. (2008). Carpinteri et al. (2004) utilizam uma extensão virtual da trinca na direção da tangente na ponta da trinca, enquanto Wen e Aliabadi (2007) consideram funções base enriquecidas na interpolação por MQM. Fleming et al. (1997) e Gu e Zhang (2008) modificam a base intrínseca para considerar funções especiais, com conhecimento *a priori* da solução do problema. Essa técnica é similar àquelas empregadas no XFEM e sendo assim possui as mesmas limitações, tendo em vista que a área enriquecida tem que ser limitada, quando múltiplas trincas estão densamente distribuídas ou quando a ponta da trinca está próxima do contorno do problema. Uma nova abordagem foi apresentada por Rabczuk e Belytschko (2007), na qual a representação da topologia da trinca é necessária. Ainda nesse contexto, vale ressaltar a pesquisa de Bordas et al. (2008), no qual apenas um enriquecimento extrínseco descontínuo é necessário, sem qualquer enriquecimento próximo à ponta da trinca.

Muitas dessas limitações podem ser evitadas quando se considera uma abordagem que consiste em modificar as funções ponderadoras na ponta da trinca, como o método da visibilidade (Belytschko et al., 1994b), o método da difração (Belytschko et al., 1996) e o método da transparência (Organ et al., 1996). Um dos primeiros a ser desenvolvido foi o método da visibilidade, que é simples de ser implementado quando comparado com os outros, mas só apresenta soluções precisas quando uma densidade nodal muito alta é utilizada. Isso ocorre porque as funções ponderadoras e as funções de forma são descontínuas quando próximas à ponta da trinca e o tamanho da descontinuidade é função do espaçamento nodal. Embora o método da difração não possua essas limitações quanto à precisão, sua implementação resulta em uma alta complexidade computacional, especialmente para o caso de múltiplas trincas. O método da transparência apresenta resultados mais precisos que os demais, embora tenha uma restrição quanto à posição dos nós, limitando seu uso em análises de crescimento de trinca dinâmicas.

Sabendo disso, a presente pesquisa propõe estudar e desenvolver a formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local ou *Generalized-Strain Mesh-Free formulation* (GSMF), baseada no método dos resíduos ponderados e no teorema do trabalho, estendendo sua base teórica para a análise de problemas no âmbito da mecânica da fratura linear elástica, mais especificamente para encontrar os fatores de intensidade de tensão.

Primeiramente, os parâmetros de discretização dos métodos sem malha locais, α_s e α_q , são encontrados de forma totalmente automatizada realizando-se uma otimização multi-objetiva,

usando algoritmo genético. O processo de otimização é dividido em duas etapas, onde na primeira, o α_q é otimizado com uma função objetiva baseando-se na área do domínio local de colocação de cada nó, enquanto que na etapa subsequente, o α_s é otimizado baseando-se na minimização da energia potencial total da teoria das estruturas.

O cálculo direto do fator de intensidade de tensão (*Stress Intensity Factor* - SIF) é uma consequência natural do processo de regularização, introduzido antes da análise com o método sem malha, que utiliza uma solução singular particular para o problema da trinca, e introduz os fatores de intensidade de tensão como as variáveis primárias do problema. Nesse estudo, o termo singular da expansão de William, formulado para uma trinca semi-infinita, é usado para regularizar o campo elástico.

1.2 - OBJETIVOS

1.2.1 - Objetivo geral

O objetivo principal desta pesquisa é estabelecer uma nova abordagem utilizando a formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local (GSMF), fundamentada nos princípios energéticos da mecânica dos sólidos deformáveis e formulado localmente no domínio, para a resolução de problemas bidimensionais no âmbito da mecânica da fratura linear elástica. Espera-se contribuir para a validação desta classe de métodos numéricos, bem como estimular sua aplicação em novas áreas da engenharia, buscando assim solucionar os problemas comumente encontrados no MEF tradicional e em outros métodos sem malha.

No âmbito do programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), constata-se que as pesquisas em mecânica computacional se concentram, predominantemente, em métodos numéricos bem estabelecidos, como o MEF e o MEC, e suas variações. Assim, a investigação de métodos alternativos visa diversificar e ampliar o campo de atuação do PECC no cenário nacional e internacional.

1.2.2 - Objetivos específicos

Para os objetivos específicos deste trabalho, pretende-se:

- Apresentar a forma local do teorema do trabalho para problemas geometricamente lineares;

- Introduzir o método da visibilidade para simular descontinuidades nos métodos sem malha;
- Realizar o processo de regularização e introduzir a técnica da subtração da singularidade na formulação para o caso de uma única trinca;
- Estender o processo de regularização e implementar a técnica da subtração da singularidade para o caso de múltiplas trincas;
- Implementar computacionalmente as formulações propostas, utilizando rotinas programadas na linguagem MATLAB;
- Implementar algoritmo genético nas rotinas para otimizar os parâmetros adimensionais (α_s e α_q) dos métodos sem malha;
- Simular o comportamento de sólidos elásticos em duas dimensões com exemplos da literatura;
- Verificar a eficiência das formulações implementadas, avaliando os parâmetros que afetam seu desempenho.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma breve revisão teórica sobre os princípios fundamentais que suportam a análise linear elástica de problemas de crescimento de trinca. Tópicos de interesse referentes à modelagem numérica de sistemas físicos, métodos de aproximação pertinentes e principais métodos numéricos são apresentados, assim como tópicos relacionados à teoria da elasticidade, aos princípios energéticos e à mecânica da fratura.

No final do capítulo são apresentados os conceitos básicos sobre otimização utilizando algoritmo genético e as principais abordagens pertinentes a essa pesquisa. Os aspectos aqui conceituados são fundamentos da formulação, implementação e verificação dos algoritmos propostos nos capítulos seguintes.

2.1 - MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS

A modelagem numérica é uma ferramenta utilizada para solucionar sistemas físicos por meio de um processo interativo que envolve a definição de um modelo matemático equivalente, chamado de modelo de meio contínuo, correspondente ao sistema físico que pretende-se estudar.

A complexidade envolvida em considerar todos os parâmetros relativos a um determinado sistema físico levou engenheiros e cientistas a definir um sistema equivalente com apenas alguns parâmetros, essenciais para a compreensão desse sistema estudado, geralmente conhecido como variáveis de estado. A definição matemática desse sistema equivalente é o primeiro passo no processo de modelagem.

Em geral, esse sistema equivalente é definido por um conjunto de equações diferenciais baseadas na Teoria dos Meios Contínuos. As equações de equilíbrio e as relações constitutivas das variáveis de estado são impostas no domínio do problema. O sistema de equações diferenciais, válidas apenas no domínio do problema, é delimitado por um contorno e condições iniciais específicas, resultando na definição completa de um modelo diferencial de meio contínuo, matematicamente equivalente a um sistema físico. Esse modelo de meio contínuo pode ser descrito por modelos matemáticos de equilíbrio, de propagação ou vibração e de difusão (Portela e Charafi, 2002).

O modelo de meio contínuo possui infinitos graus de liberdade, já que as variáveis de campo são continuamente distribuídas em todo o domínio do problema. A solução exata

desse modelo é extremamente difícil, e em alguns casos, praticamente impossível de ser obtida, devido à complexidade geométrica desse domínio. Caso essa solução exata possa ser encontrada, ela é obtida analiticamente por meio de métodos matemáticos formais e bem estabelecidos, conhecidos como métodos exatos. Essa dificuldade na obtenção de soluções analíticas impulsionou o estudo de métodos de aproximação, que visam obter uma solução aproximada do problema sem recorrer à artifícios matemáticos mais complexos.

Com a aplicação do método dos resíduos ponderados e a discretização do domínio, um modelo discreto do problema é gerado, que permite que as variáveis de campo sejam definidas com um número finito de graus de liberdade e parâmetros, possibilitando sua resolução com ferramentas de análise numérica (Portela e Charafi, 2002). A Figura 2.1 mostra o processo de modelagem e suas principais características.

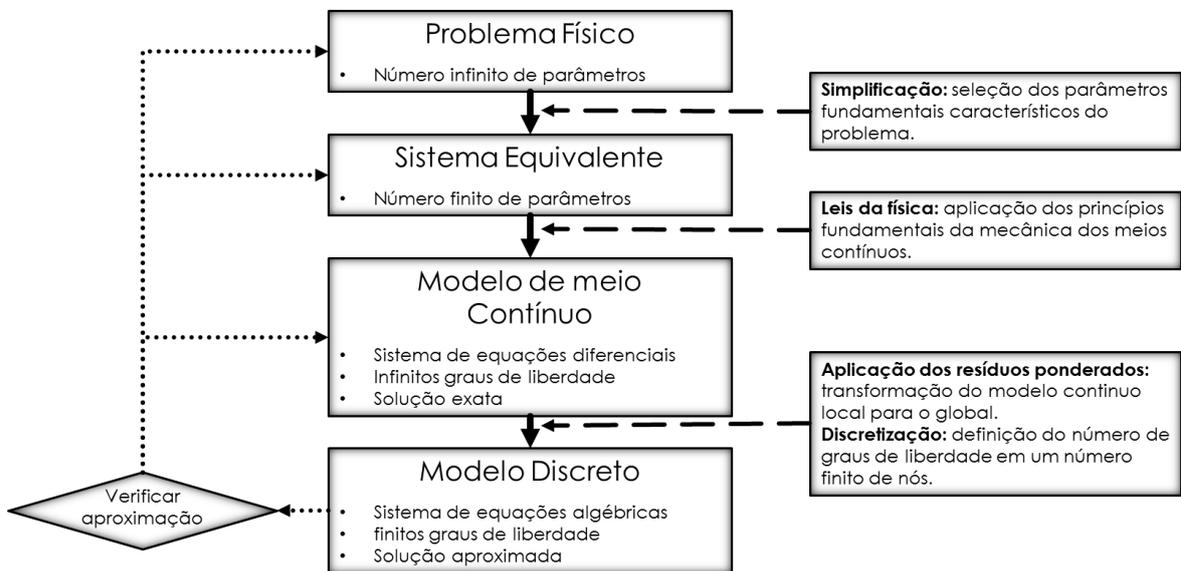


Figura 2.1 – Etapas da modelação matemática do problema físico. Adaptado de Portela e Charafi (2002).

2.2 - MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Os métodos de aproximação utilizados são baseados na Teoria dos Resíduos Ponderados e nas condições de admissibilidade presentes em todas as formulações que deram origem aos métodos de discretização diretos e indiretos. As funções ponderadoras podem ser escolhidas arbitrariamente quando em sua forma forte, originando os métodos de discretização indiretos; mas caso seja feita a integração por partes dos termos de domínio, as restrições de admissibilidade precisam ser impostas nesses termos de domínio, originando a forma fraca da equação e, posteriormente, os métodos de discretização direta. Um diagrama com essa relação entre as abordagens pode ser visto na Figura 2.2.

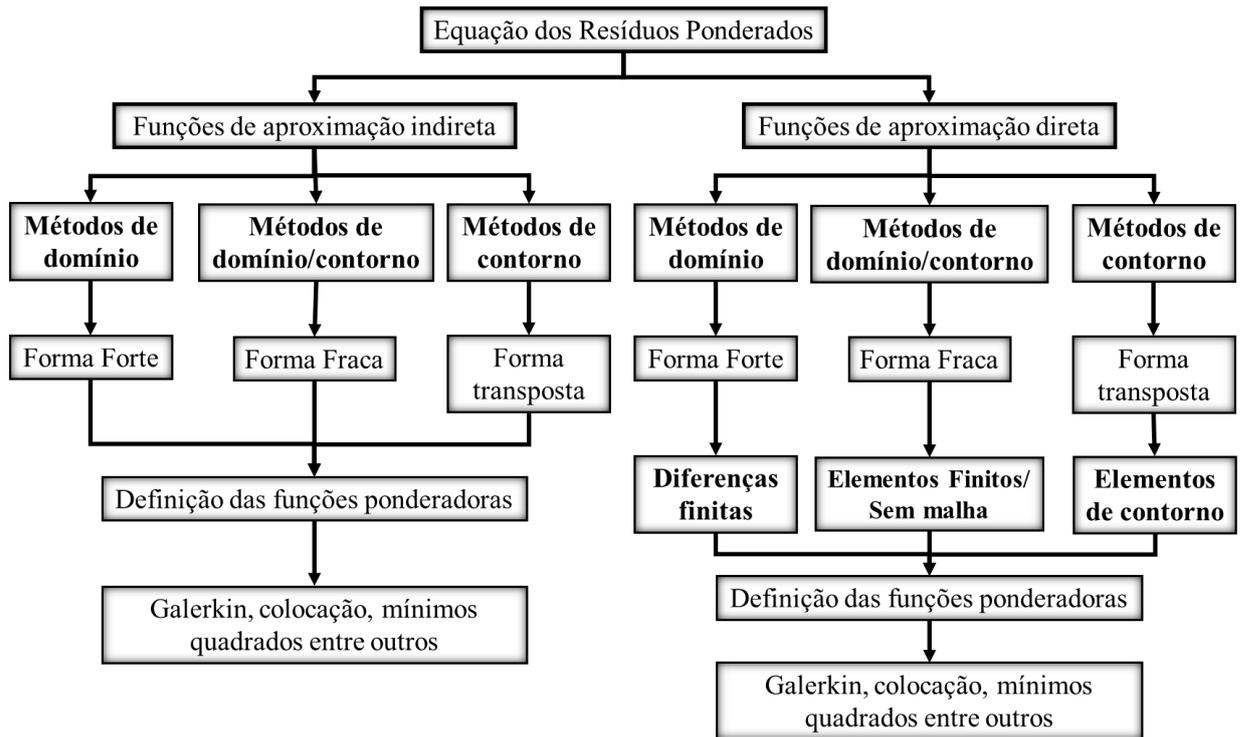


Figura 2.2 – Métodos de aproximação e discretização. Adaptado de Portela e Charafi (2002).

2.3 - EQUAÇÃO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Primeiramente, deve-se estabelecer formalmente a equação dos resíduos ponderados, cujos elementos são definidos em termos dos resíduos que a solução aproximada introduz nas equações diferenciais, sendo esses ponderados por funções arbitrárias e distribuídos no domínio e no respectivo contorno.

Uma terminologia genérica será considerada nessa seção em virtude da variedade de sistemas físicos que podem ser resolvidos por meio da equação dos resíduos ponderados. Posteriormente, no capítulo 3, esses termos serão redefinidos para sua aplicação na resolução de problemas de equilíbrio.

Seja Ω o domínio, com Γ sendo o contorno, formado pela soma $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Considere a equação diferencial no domínio:

$$\mathbf{K} u_0 - g = 0, \quad (2.1)$$

com as condições de contorno em Γ_1 e Γ_2 respectivamente:

$$\mathbf{C} u_0 - h = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D} u_0 - l = 0, \quad (2.3)$$

onde \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são operadores diferenciais lineares; g , h e l são funções com valores prescritos e u_0 a solução exata. A equação do resíduo ponderado se torna:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K} u_0 - g) W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{C} u_0 - h) W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{D} u_0 - l) W_{\Gamma_2} d\Gamma = 0, \quad (2.4)$$

onde W_{Ω} , W_{Γ_1} e W_{Γ_2} são funções ponderadoras arbitrárias. Considerando uma solução aproximada u sendo:

$$u_0 = u + E, \quad (2.5)$$

onde E é o erro aproximado. Substituindo equação (2.5) nas equações (2.1) a (2.3), os seguintes resíduos são gerados:

$$R_{\Omega} = \mathbf{K} u - g \neq 0, \quad (2.6)$$

$$R_{\Gamma_1} = \mathbf{C} u - h \neq 0, \quad (2.7)$$

$$R_{\Gamma_2} = \mathbf{D} u - l \neq 0. \quad (2.8)$$

Como os resíduos não são nulos, logo obtemos a equação:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1} W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} W_{\Gamma_2} d\Gamma \neq 0. \quad (2.9)$$

Considerando que quanto menores forem os resíduos, melhor será a aproximação, a resultante dos resíduos é considerada como equivalente a zero. Esse anulamento é obtido distribuindo-se os resíduos no domínio e no contorno, de acordo com as respectivas funções de ponderação. Em outras palavras, a soma das integrais dos resíduos ponderados se iguala a zero, dando assim origem à equação geral dos resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1} W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} W_{\Gamma_2} d\Gamma = 0. \quad (2.10)$$

2.4 - DISCRETIZAÇÃO INDIRETA COM FUNÇÕES GLOBAIS

Na discretização indireta, a função de aproximação u pode ser expressa por:

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \cdots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad (2.11)$$

onde $\{\phi_i\}_{i=1\dots n}$ representa um conjunto de n funções linearmente independentes definidas globalmente e $(\alpha_i)_{i=1\dots n}$ representa um conjunto de coeficientes generalizados, que são as incógnitas a serem determinadas na solução aproximada. Como estes coeficientes não se identificam com a variável u do problema, a discretização é indireta. Por questões de relevância para a pesquisa, apenas os métodos de aproximação de domínio serão apresentados.

2.4.1 - Métodos de aproximação de domínio

Nesse método, as funções ϕ_i devem satisfazer todas as condições de contorno, conseqüentemente não gerando resíduo nos contornos, ou seja $R_{\Gamma_1} = 0$ e $R_{\Gamma_2} = 0$. Assim, a equação (2.6) por meio da função de aproximação (2.11) torna-se:

$$R_{\Omega} = \mathbf{K} u - g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{K}(\phi_i) - g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i - g, \quad (2.12)$$

onde $\{\psi_i\}_{i=1\dots n}$ representa um conjunto de n funções linearmente independentes contendo um operador diferencial linear, definidas globalmente. O método de aproximação ainda precisa de uma função ponderadora W_{Ω} para chegar a uma aproximação da solução. Muitas funções surgiram ao longo dos anos, mas apenas o método de Galerkin, o método da colocação e o método dos mínimos quadrados são relevantes para esta pesquisa e serão apresentados.

2.4.2 - Método de Galerkin

A função de ponderação W_{Ω} é uma variação arbitrária da função de aproximação u , representado por um δ . Com a equação (2.11) e a variação arbitrária obtêm-se:

$$W_{\Omega} = \delta u \quad (2.13)$$

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^n \phi_i \delta \alpha_i. \quad (2.14)$$

Consequentemente, a equação dos resíduos ponderados se torna um sistema de n equações algébricas com n incógnitas:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} R_{\Omega} \delta u d\Omega = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i \int_{\Omega} R_{\Omega} \phi_i d\Omega = 0. \quad (2.15)$$

2.4.3 - Método da Colocação

Este método baseia-se nas propriedades seletivas da função generalizada delta de *Dirac* que possui as seguintes propriedades seletivas (Hildebrand, 1962):

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i-a}^{x_i+a} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i-a}^{x_i+a} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i), \quad (2.18)$$

sendo a uma constante arbitrária. No método da colocação escolhe-se para função de ponderação W_{Ω} uma combinação linear de funções delta de *Dirac* $\delta(x - x_i)$, definidas nos pontos $x = x_i$, com um conjunto de constantes arbitrárias β_i , representadas a seguir:

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i. \quad (2.19)$$

Quando as propriedades do delta de *Dirac* são consideradas, a equação dos resíduos ponderados se torna apenas um somatório no ponto $x = x_i$:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\Omega} R_{\Omega} \delta(x - x_i) d\Omega = \sum_{i=1}^n \beta_i R_{\Omega}(x_i) = 0. \quad (2.20)$$

2.4.4 - Método dos Mínimos Quadrados

Neste método, a função peso é escolhida como sendo uma variação arbitrária da função residual, representada por

$$W_{\Omega} = \delta R_{\Omega}, \quad (2.21)$$

no qual a variação está em termos de coeficientes generalizados. Quando considera-se a equação (2.12), temos que

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^n \psi_i \delta \alpha_i, \quad (2.22)$$

onde $\delta \alpha_i$ representa uma variação arbitrária dos coeficientes α_i . Sendo assim, a equação dos resíduos ponderados se torna um sistema de n equações algébricas com n incógnitas:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} R_{\Omega} \delta R_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i \int_{\Omega} R_{\Omega} \psi_i d\Omega. \quad (2.23)$$

2.5 - TEOREMAS DE ENERGIA

Os teoremas de energia são importantes ferramentas para a resolução de problemas no âmbito da teoria da elasticidade e são fundamentais no desenvolvimento de vários métodos numéricos e conceitos de mecânica da fratura.

Para os conceitos que serão apresentados a seguir, considere um domínio de um corpo homogêneo Ω e Γ seu contorno, dividido em Γ_u e Γ_t , sendo estes respectivamente o contorno cinemático e estático.

2.5.1 - Teorema do trabalho

O teorema do trabalho estabelece uma relação energética entre qualquer campo de deformações cinematicamente admissível com qualquer campo estaticamente admissível em um corpo sob regime elástico (Fichera, 2006). A Figura 2.3 mostra um diagrama com a relação entre esses dois campos.

Um campo cinematicamente admissível é um campo que satisfaça a relação $\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}$, em um domínio Ω e satisfaça $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em um contorno cinemático. É possível observar que, para um dado campo de deslocamento \mathbf{u} , existe apenas um campo de deformações ε que satisfaça a relação cinemática, já que o sistema é totalmente determinado, com seis equações e seis

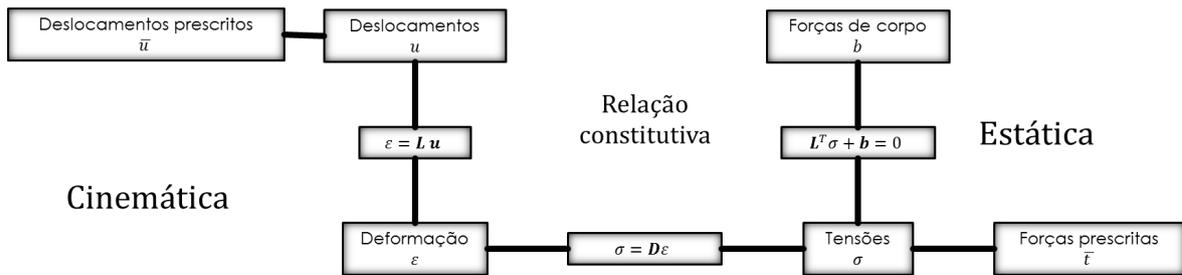


Figura 2.3 – Diagrama de Tonti apresentando a ligação entre campos cinemáticos e estáticos.

incógnitas (Fredholm, 1906).

Um campo de tensões estaticamente admissível é um campo que satisfaça a relação $L^T \sigma + b = 0$ em um domínio Ω e satisfaça $t = \bar{t}$ em um contorno estático. É possível observar que, para um dado sistema de forças externas aplicadas, há um número infinito de campos de tensão que satisfaça a relação estática, já que o sistema possui três equações e seis incógnitas (Fredholm, 1906).

Como visto no teorema de Kirchhoff (1859), a solução para um determinado problema físico é um campo elástico totalmente admissível que satisfaça simultaneamente a admissibilidade cinemática e estática, sendo esta a única capaz de providenciar a linearidade e a estabilidade admitidas pelo material.

Para um campo de tensões σ que está em equilíbrio com o sistema de forças externas aplicadas e um campo de deformações ε , que é compatível com os deslocamentos prescritos, o teorema do trabalho pode ser expresso pela equação:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega. \quad (2.24)$$

O lado esquerdo da equação (2.24) representa o trabalho devido as forças externas ou trabalho externo

$$\tau^e = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* d\Omega, \quad (2.25)$$

enquanto o lado direito representa o trabalho devido as forças internas ou o trabalho interno

$$\tau^i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega. \quad (2.26)$$

Segundo Portela (1993), quando o campo de deslocamentos cinematicamente admissível representa uma variação virtual do campo de deslocamentos, o teorema do trabalho resulta no

teorema dos deslocamentos virtuais que conseqüentemente presume linearidade geométrica. Vale ressaltar que esse teorema não é restrito apenas para materiais com comportamento elástico, já que nenhuma equação constitutiva foi utilizada no desenvolvimento das equações.

2.5.2 - Energia potencial total

Considere um campo elástico exato totalmente admissível de um dado material, que é restringido por deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ e é carregado por forças externas $\bar{\mathbf{t}}$. A energia potencial total T é dada por

$$T = U + P, \quad (2.27)$$

no qual U é a energia de deformação ou energia potencial interna, como visto na equação (2.26), definida por

$$U = \int_{\Omega} W \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega. \quad (2.28)$$

onde W é a energia de deformação; e P é a energia potencial das forças externas, como visto na equação (2.25), definidas por

$$P = - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, d\Omega. \quad (2.29)$$

Quando o teorema do trabalho é aplicado, a energia potencial das forças externas se torna

$$P = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega = -2U. \quad (2.30)$$

Dessa forma, a energia potencial total deste corpo pode ser definida apenas por termos relacionados à energia de deformação total como

$$T = -U. \quad (2.31)$$

O teorema da energia potencial total estabelece que, o campo elástico que realmente está atuando no corpo é um campo estaticamente admissível que minimiza a energia potencial total em um conjunto de campos cinematicamente admissíveis. Esse campo único é obviamente o campo elástico exato. Esse teorema pode ser expresso matematicamente pelas

condições mínimas

$$\delta T = \delta U + \delta P = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u}^* d\Omega = 0, \quad (2.32)$$

e

$$\delta^2 T = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega > 0, \quad (2.33)$$

A condição (2.32) é verificada pelo teorema dos deslocamentos virtuais, enquanto que a segunda condição (2.33) é implícita quando se assume a estabilidade do material. Quando a equação (2.31) é considerada, o valor mínimo da energia potencial total do corpo pode ser substituído pelo valor máximo da energia de deformação.

2.6 - MÉTODOS SEM MALHA

Nessa seção serão apresentados os métodos sem malha mais conhecidos e os recentes avanços no método. Alguns termos e conceitos fundamentais para a formulação do método são apresentados.

2.6.1 - Definição

Os métodos sem malha, diferentemente do MEF, usam um conjunto de nós espalhados no domínio e no contorno do problema (chamados de nós de campo ou *field nodes*), de forma que estes não contêm nenhuma informação sobre a conectividade entre eles para a aproximação ou interpolação das incógnitas do campo, ou seja, não formam uma malha. A Figura 2.4 mostra a principal diferença entre esses dois métodos. Essa distribuição nodal não necessariamente precisa ser uniforme e pode ser controlada, assim como a densidade, ou quantidade total de nós (Atluri e Zhu, 1998).

Ele surgiu como uma alternativa ao MEF tradicional, buscando eliminar os problemas relacionados à malha, como o alto custo para a geração da mesma, a baixa precisão na recuperação das tensões e a dificuldade de resolução de problemas que exijam análise adaptativa, como fratura e grandes deformações.

Muitos métodos sem malha obtiveram bons resultados e possuem um grande potencial para se tornarem poderosas ferramentas numéricas. Mas, em compensação, esses métodos estão em fase de desenvolvimento e possuem muitos problemas técnicos que ainda precisam ser

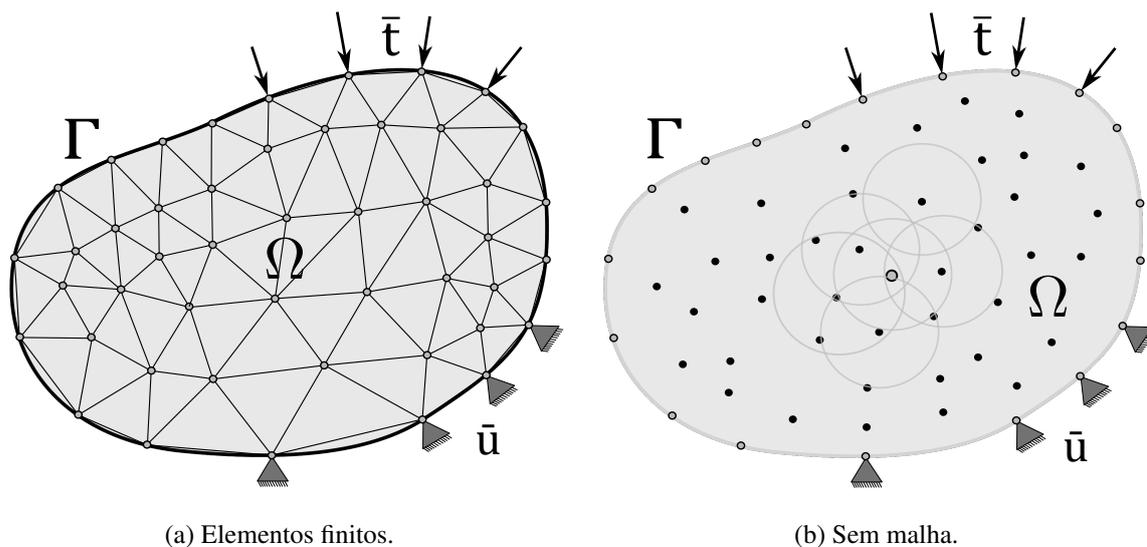


Figura 2.4 – Representação do domínio nos métodos sem malha e no Método dos Elementos Finitos (MEF).

contornados.

Esses métodos podem ser classificados de acordo com a formulação ou método de aproximação utilizado, bem como o tipo de representação do domínio. Os principais métodos e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005).

Classificação	Categoria	Exemplos de métodos
Baseado nas formulações utilizadas	Forma forte	Colocação, FPM etc.
	Forma fraca	EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc.
	Combinação dessas duas formas	MWS, etc.
Baseado no método de interpolação/aproximação	Mínimos quadrados móveis (MQM)	EFG, MLPG, etc.
	Método da representação da integral	SPH, etc.
	PIM	RPIM, LRPIM, etc.
	Outras interpolações	PUFEM, hp-cloud, etc.
Baseado na representação do domínio	Domínio	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc.
	Contorno	BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM, etc.

Alguns métodos recentes foram deixados de lado por ainda estarem em sua fase inicial de estudos e por não possuírem uma base sólida.

2.6.2 - Funções de aproximação

As funções de forma e as funções peso ou ponderadoras desempenham um papel essencial na performance dos métodos sem malha. O campo de deslocamentos u em qualquer ponto x dentro do domínio é interpolado inteiramente em função dos termos nodais, dentro do

suporte compacto da função ponderadora desse ponto x , como

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.34)$$

onde n é o número de nós dentro do suporte compacto do domínio do ponto x ; u_i é a variável do campo nodal no nó i ; $\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor que contém as variáveis de campo desses n nós e $\phi_i(x)$ é a função de forma do nó i . O suporte compacto, também conhecido como domínio de influência nodal, garante a localidade da aproximação e será definido posteriormente neste capítulo.

2.6.3 - Funções de forma

As funções de forma utilizadas nos métodos sem malha devem satisfazer alguns requisitos básicos, sendo eles:

- Nós arbitrariamente distribuídos, sendo suficientemente robusto para permitir uma distribuição razoavelmente arbitrária;
- Numericamente estável;
- Deve satisfazer uma certa ordem de consistência;
- Deve ter suporte compacto, devendo ser considerado zero quando fora do mesmo;
- As funções de aproximação ligadas às funções de forma devem ser compatíveis ao longo do domínio do problema quando a forma fraca global é utilizada, ou deve ser compatível no domínio local da quadratura na forma fraca local;
- É ideal que a função de forma possua propriedades do delta de Kronecker;
- Deve ser computacionalmente eficiente.

O desenvolvimento de funções de forma especiais para serem utilizadas nos métodos sem malha é uma das áreas de pesquisa mais procuradas nesses últimos anos e, sendo assim, várias aproximações foram propostas. Liu et al. (2002b) classificam essas formulações em três grandes categorias, baseados nos tipos de teoria usadas na aproximação. As principais funções de forma e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.2.

No método de representação por integral, um dos mais antigos métodos utilizados na discretização sem malha, a sua função é representada usando suas informações no domínio

Tabela 2.2 – Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005).

Categoria	Técnicas de aproximação
Representação por integral	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> (SPH) <i>Reproducing Kernel Particle Method</i> (RKPM)
Representação por séries	Mínimos Quadrados Móveis (MQM) <i>Point Interpolation Method</i> (PIM, RPIM) <i>Partition of Unity</i> (PoU)
Representação por diferencial	<i>Generalized Finite Difference Method</i> (GFDM)

local por meio de uma operação com integrais ponderadas. A consistência é conseguida escolhendo-se uma função peso adequada.

Os métodos de representação em série possuem um longo histórico. Eles foram bem desenvolvidos no MEF e agora estão sendo utilizados nos métodos sem malha, sendo que seus dois métodos mais conhecidos são dos MQM ou MLS e o PIM usando funções bases radiais (RPIM).

O método de representação por diferencial vem sendo utilizado por um bom tempo no método das diferenças finitas. Essa aproximação não é compatível globalmente e sua consistência é garantida pela teoria da série de Taylor. Esse método é geralmente utilizado para estabelecer sistemas de equações baseados na forma forte (Zienkiewicz et al., 2000).

2.6.4 - Funções ponderadoras

A continuidade das funções de forma $\Phi(\mathbf{x})$ são governadas pela continuidade da base polinomial escolhida, assim como a continuidade das funções ponderadoras utilizadas. A escolha das funções ponderadoras é na maioria das situações arbitrária, desde que a localidade da mesma seja garantida; ou seja, que seu valor decresça monotonicamente à medida que se afasta do ponto de interesse x , e seja nula quando fora do suporte compacto ou domínio de influência.

As funções exponenciais e do tipo *spline* são as mais utilizadas na prática, mas muitos autores optam por construir suas próprias funções ponderadoras, com a ordem de continuidade desejada, dependendo do problema em questão. Devido a arbitrariedade dessas funções elas podem ser facilmente construídas, desde que a propriedade de partição da unidade seja garantida e a primeira e segunda derivada sejam equivalentes a zero no contorno do suporte compacto. Geralmente as funções exponenciais são computacionalmente mais custosas, mas são menos sensíveis ao tamanho do suporte compacto.

2.6.5 - Suporte compacto

O suporte compacto é um subdomínio do nó x_i onde a função ponderadora é diferente de zero. A precisão da interpolação para um ponto de interesse depende dos nós no interior do suporte compacto. Sendo assim, um suporte compacto apropriado tem que ser escolhido para garantir uma aproximação eficiente e precisa, geralmente controlado por coeficientes adimensionais, que aumentam o raio de cobertura do suporte c_i , controlando o tamanho desse domínio.

O suporte compacto tem geometria arbitrária, dessa forma por simplicidade, geralmente são escolhidos suportes circulares ou retangulares, como demonstrado na Figura 2.5.

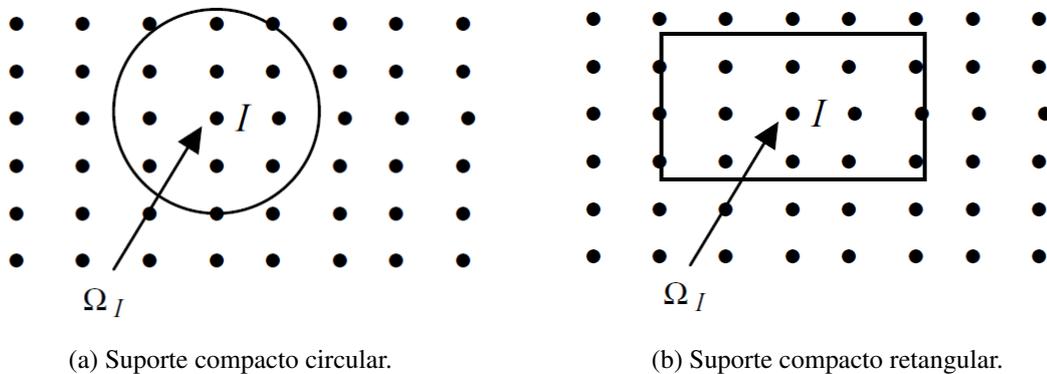


Figura 2.5 – Suporte compacto do ponto de interesse em I em diferentes modelos de métodos sem malha. Adaptado de Chen et al. (2006).

Esse número é totalmente experimental, deve ser testado e aperfeiçoado, já que, até o atual momento, não existe uma fórmula particular para calcular este valor. Geralmente um valor de $\alpha_s = 2.0 \sim 3.0$ resulta em bons resultados para a maioria dos problemas, como visto em Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000).

2.6.6 - Domínio de definição

Domínio de definição de um ponto qualquer x é um subdomínio no qual a aproximação é definida. Esse domínio cobre todos os nós cujos respectivos suportes compactos incluem o ponto qualquer x . Assim como o suporte compacto, a precisão da interpolação depende da quantidade de nós cujo suporte compacto inclua o ponto de interesse. Sendo assim, o tamanho do suporte compacto influencia diretamente na quantidade de nós que fará parte desta interpolação.

2.6.7 - Imposição das condições de contorno essenciais

As aproximações utilizadas pelos métodos sem malha resultam em valores que não passam por parâmetros nodais. Sendo assim, uma imposição das condições de contorno essenciais é necessária para se obter a solução do problema, aumentando a dificuldade de implementação e o esforço computacional. Para tal propósito os multiplicadores Lagrangeanos são os mais utilizados, mas são também os mais custosos computacionalmente, devido a não positividade das equações discretas (Chen et al., 2006).

2.6.8 - Avaliação das integrais

Uma das grandes diferenças dentre os diversos métodos sem malha baseados na forma fraca é a forma como as integrais são avaliadas.

Nos métodos sem malha baseados na forma fraca global geralmente são utilizados *background cells* ou malhas de fundo, onde a quadratura de Gauss é realizada dentro dessas células ou elementos. Essa malha de fundo pode ser um arranjo regular dentro do domínio ou pode ser uma discretização do domínio, da mesma forma que no MEF, como mostra a Figura 2.6.

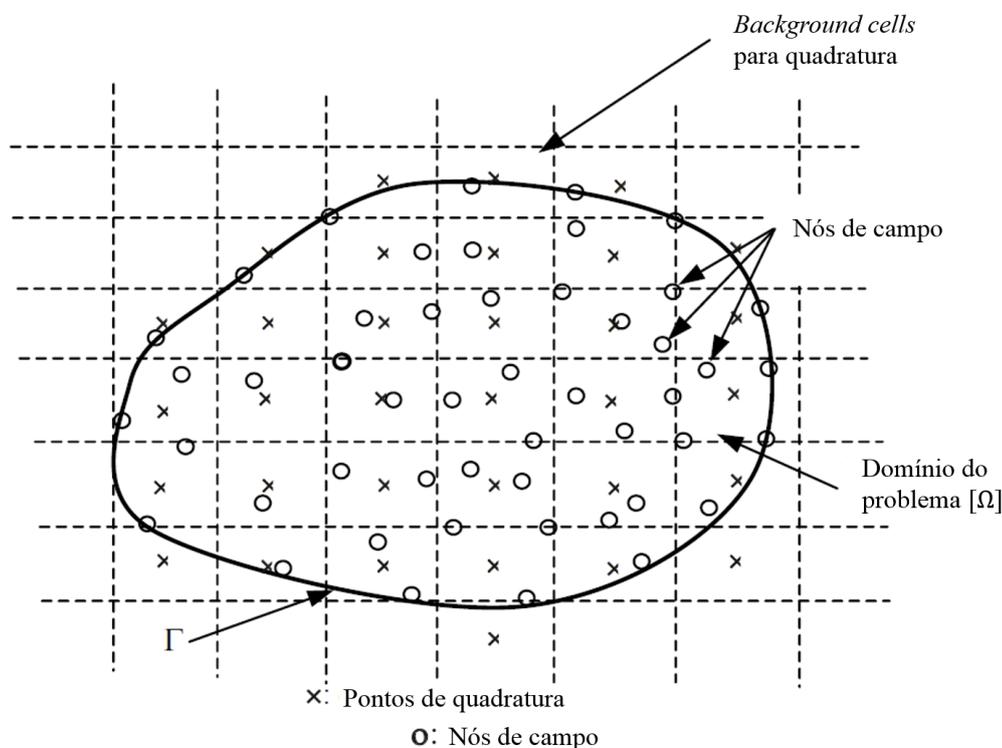


Figura 2.6 – Uso de *background cells* em métodos sem malha baseados na forma fraca global. Adaptado de Liu e Gu (2005).

Em contrapartida, nos métodos sem malha baseados na forma fraca local a integração numérica é realizada em um domínio de quadratura local predefinida para o nó, também chamado de domínio local.

Domínio local ou domínio da forma fraca de um nó x_i é o subdomínio onde a forma fraca local é definida e onde a quadratura de Gauss será realizada, como mostra a Figura 2.7, para um nó qualquer x . Geralmente o tamanho do domínio local é controlado por coeficientes

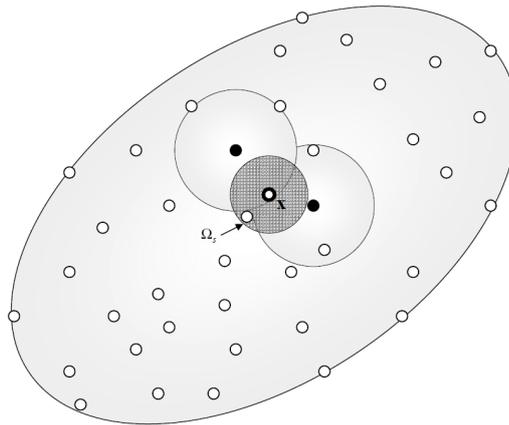


Figura 2.7 – Domínio local Ω_S de um nó x . Adaptado de Atluri et al. (2004).

adimensionais, que reduzem o raio de cobertura do suporte compacto. Esse número, assim como o tamanho do suporte compacto, é totalmente experimental, deve ser testado e aperfeiçoado. Geralmente um valor de $\alpha_q = 0.4 \sim 0.6$ conduz a bons resultados para a maioria dos problemas, como visto em Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000).

2.6.9 - Métodos sem malha baseado na forma fraca global

Os métodos sem malha baseado na forma fraca global são geralmente baseados na forma fraca de Galerkin e definida sobre o domínio global de um problema, usando funções de forma localmente definidas. Multiplicadores Lagrangeanos são utilizados para impor as condições de contorno essenciais e *background cells*, ou malha de fundo, são utilizadas no processo de quadratura para avaliar as integrais.

O primeiro método sem malha baseado na forma fraca global foi o *Diffuse Element Method* (DEM) proposto por Nayroles et al. (1992). Nesse método o MQM proposto por Lancaster e Salkauskas (1981) foi criado para gerar as funções de forma e a forma fraca de Galerkin, empregada para construir o sistema de equações.

Em 1994, Belytschko et al. (1994a) propuseram o método *Element-free Galerkin* (EFG), onde o mesmo MQM foi utilizado para construir funções de forma baseadas em apenas um

grupo de nós distribuídos arbitrariamente em um domínio local. Esse método utiliza a mesma forma fraca de Galerkin, mas precisa de um conjunto de *background cells* para avaliar essas integrais.

O EFG se mostrou muito mais preciso que o MEF, com um bom fator de convergência, tendo sido aplicado a uma gama de problemas, como fratura e problemas não lineares. Todas essas aplicações tornaram o EFG um método bem atrativo e sólido, mas não isento de falhas. O método é computacionalmente mais custoso do que o MEF, além de precisar de *background cells* para se calcular o sistema de matrizes, não sendo, portanto, verdadeiramente sem malha.

Liu e Gu (1999) propuseram o *Point Interpolation Method* (PIM) baseado na forma fraca de Galerkin, onde o domínio era representado por nós propriamente distribuídos. O PIM também é usado para construir as funções de forma polinomiais, baseado em um grupo de nós arbitrariamente distribuídos no domínio local. Posteriormente, Liu e Gu (2001b) desenvolveram o RPIM, que utiliza uma base radial, sendo bem mais estável e robusto, mas que, assim como o EFG, precisa de *backgrounds cells*, não sendo assim verdadeiramente sem malha.

2.6.10 - Métodos sem malha baseados na forma fraca local

Para evitar o uso de *background cells*, a forma fraca global é usada por Atluri e Zhu (1998) para desenvolver o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG), que também foi desenvolvido com outras variações (Atluri e Zhu, 2000).

Quando a forma fraca local é usada em um campo nodal, a integração numérica é realizada em um domínio de quadratura local predefinida para o nó, que também pode ser o domínio local onde as funções ponderadas são definidas. Desta forma, estes métodos não necessitam de *background cells*, sendo assim, verdadeiramente sem malha.

O procedimento desse método é similar aos métodos numéricos baseados na formulação na forma forte, como o FDM. Entretanto, por causa da aproximação MQM empregada, tratamentos especiais são necessários para aplicar as condições de contorno essenciais.

Outro método bastante conhecido é o *Local Point Interpolation Method* (LPIM), desenvolvido por Liu e Gu (2001a), e o *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), desenvolvido por Liu et al. (2002a). Nesses métodos, funções de forma polinomiais PIM são utilizadas, o que é responsável pela singularidade da matriz de interpolação do momento, sendo assim, um algoritmo de triangulação é necessário para evitar o problema. Já as funções de forma RPIM contornam esse problema, tornando-se uma alternativa robusta, notadamente, quando domínios definidos com nós aleatoriamente posicionados são

utilizados no problema.

2.7 - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Nessa seção serão apresentados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento e aplicação da técnica da subtração da singularidade e a análise de múltiplas trincas, no âmbito da mecânica da fratura linear elástica.

2.7.1 - Modos de deslocamento na ponta da trinca

Considere o corpo trincado representado na Figura 2.8, no qual o plano da trinca se encontra no plano x_1x_3 e a frente da trinca (*crack front*) é paralela a direção da coordenada x_3 . Os modos básicos de deslocamento na ponta da trinca são apresentados na Figura 2.8. O modo de abertura, ou modo de tensão, é aquele no qual a trinca é separada simetricamente com respeito aos planos x_1x_2 e x_1x_3 , denominado *modo I*. O modo de cisalhamento no plano, ou *modo II*, é aquele no qual os deslocamentos são simétricos ao plano x_1x_2 e antissimétricos ao plano x_1x_3 . O modo de cisalhamento fora do plano, ou *modo III*, é aquele em que os deslocamentos que são antissimétricos aos planos x_1x_2 e x_1x_3 . A partir desses três modos básicos de deslocamento, qualquer deslocamento de trinca pode ser representado por meio de uma superposição linear, fazendo-se assim uma combinação desses modos, como mostra Irwin (1957).

2.7.2 - Campo elástico local

A formulação do critério de crescimento de trinca é baseada na forma analítica do campo elástico na ponta da trinca. Desta forma, uma investigação do campo elástico nos arredores da ponta da trinca também se faz necessária para a presente pesquisa.

Nos limites da elasticidade linear, o campo de tensões é infinito na ponta da trinca. Brahtz (1933) foi o primeiro a discutir o assunto e posteriormente Williams (1952), que depois de realizar uma investigação sobre a forma analítica dessa singularidade demonstrou que, sob todas as possíveis combinações de condições de contorno, a tensão se torna infinita na ponta da trinca.

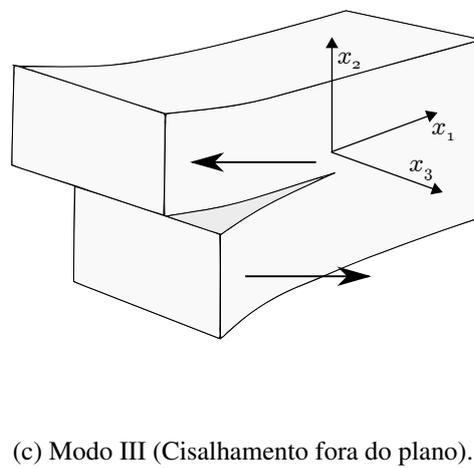
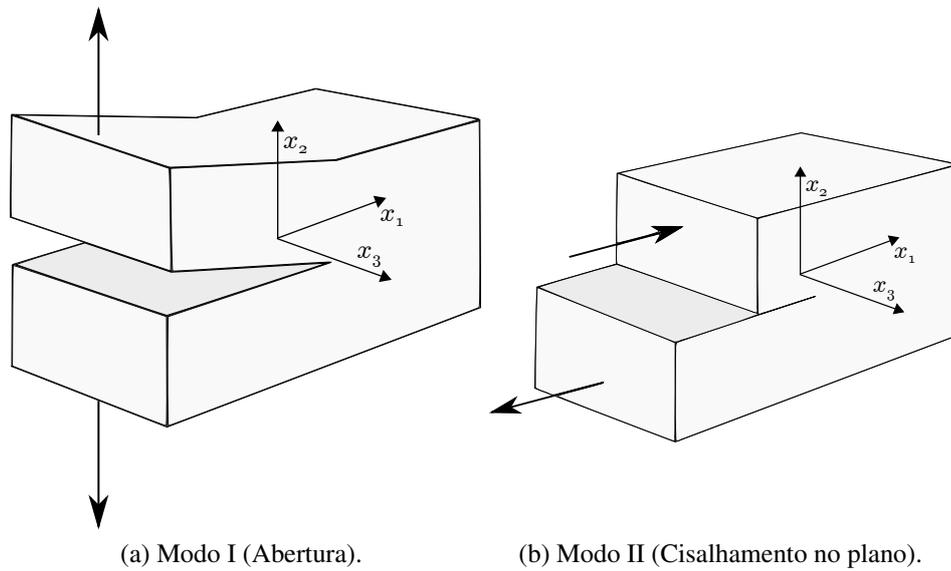


Figura 2.8 – Modos de deslocamento da ponta da trinca básicos de um corpo trincado.

2.7.2.1 - O problema plano

O *Eigenfunction Expansion Method* (EEM) foi utilizado por Williams (1952) para obter soluções locais para problemas planos, lineares, elásticos, semi-infinitos e de fatias homogêneas (*homogeneous wedge*). O caso da fatia plana (*plane wedge*) com trações nulas em ambas as faces do entalhe (*notch*) será destacado aqui.

Seja r, θ um sistema de coordenadas polares centralizado na ponta de uma fatia semi-infinita, de tal forma que o eixo $\theta = 0$, o bissetor da fatia de ângulo 2α , é coincidente com o eixo cartesiano x , como mostra a Figura 2.9.

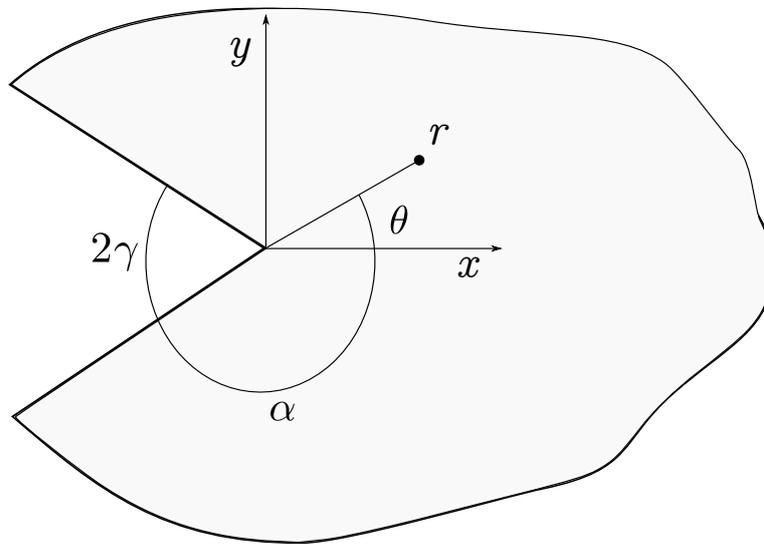


Figura 2.9 – Geometria de um entalhe pontudo no sistema de coordenadas polares e cartesianas.

O ângulo total ocupado pelo entalhe é $2\gamma = 2(\pi - \alpha)$. As funções de tensão de Airy χ , que satisfazem a equação bi-harmônica, podem ser utilizadas para expressar os campos de tensão e de deslocamento nos arredores da ponta do entalhe (*notch-tip*). No geral

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (2.35)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad (2.36)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (2.37)$$

$$u_r = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\partial \chi}{\partial r} + (1 - \eta)r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right], \quad (2.38)$$

e

$$u_{\theta} = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\partial \chi}{\partial \theta} + (1 - \eta)r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right], \quad (2.39)$$

com $\eta = \nu$ para o caso de estado plano de deformação e $\eta = \nu/(1 + \nu)$ para o caso de estado plano de tensão; onde ν é o coeficiente de Poisson e μ é o módulo de cisalhamento. A função ψ é harmônica e está relacionada com a função de tensão χ por

$$\nabla^2 \chi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (2.40)$$

Seguindo os procedimentos apresentados por Williams (1952), soluções para χ podem ser obtidas na forma

$$\chi = \mathbb{R} [r^{\lambda+1} F(\theta; \lambda)] \quad (2.41)$$

e de forma similar, soluções para ψ na forma

$$\psi = \mathbb{R} [r^m G(\theta; m)], \quad (2.42)$$

onde λ e m podem ser números complexos. As funções $F(\theta; \lambda)$ e $G(\theta; m)$ são soluções gerais das equações diferenciais, obtidas quando (2.41) e (2.42) são introduzidas na equação harmônica e bi-harmônica, respectivamente. A solução geral $F(\theta; \lambda)$ é válida apenas para $\lambda \neq 0, 1$. Vale ressaltar que esses valores excepcionais também serão examinados posteriormente. Usando a relação (2.40), pode-se encontrar que $m = \lambda - 1$ e $G(\theta; m)$ são transformados em $G(\theta; \lambda)$. Dessa forma, as tensões são dados por

$$\sigma_{rr} = \mathbb{R} \left\{ r^{\lambda-1} [F'' + (\lambda + 1) F] \right\}, \quad (2.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \mathbb{R} \left\{ r^{\lambda-1} (\lambda + 1) \lambda F \right\} \quad (2.44)$$

e

$$\sigma_{r\theta} = -\mathbb{R} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda F' \right\}. \quad (2.45)$$

Os deslocamentos são dados por

$$u_r = \mathbb{R} \left\{ \frac{1}{2\mu} r^{\lambda} [-(\lambda + 1) F + (1 - \eta) G''] \right\} \quad (2.46)$$

e

$$u_{\theta} = \mathbb{R} \left\{ \frac{1}{2\mu} r^{\lambda} [-F'' + (1 - \eta) (\lambda - 1) G] \right\}, \quad (2.47)$$

onde as aspas representam a diferenciação com respeito a θ . A solução geral apresentada contém quatro constantes desconhecidas e um parâmetro λ indeterminado.

Para estabelecer uma solução particular para o problema em questão, um conjunto de condições de contorno são necessárias. Essas condições devem ser prescritas ao longo do contorno da constante θ , porque as funções F e G são independentes de r . Os contornos da placa com entalhe correspondem às linhas radiais, como mostra a Figura 2.9. Ao longo desse contorno, tanto deslocamentos nulos quanto trações nulas podem ser prescritas para a maioria dos casos.

Para que se obtenha deslocamentos livres nas duas faces do entalhe, trações nulas são prescritas ao longo de $\theta = \pm\alpha$, que nada mais são do que, $\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\alpha) = \sigma_{r\theta}(r, \pm\alpha) = 0$, que a partir das equações (2.44) e (2.45), implicam que

$$F(\theta = \pm\alpha; \lambda) = F'(\theta = \pm\alpha; \lambda) = 0, \quad (2.48)$$

onde $\lambda \neq 0$. Quando $\lambda = 0$, as condições de contorno nas faces do entalhe são automaticamente satisfeitas, tendo em vista que $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$ na solução do domínio. Substituindo a solução geral $F(\theta; \lambda)$ em (2.48) e depois de algumas manipulações algébricas, dois conjuntos de equações independentes são obtidos em função das constantes de integração e de λ . Um desses sistemas resulta na solução angular simétrica enquanto o outro resulta na solução angular antissimétrica, sendo esta uma consequência natural da simetria angular completa, resultante da geometria e das condições de contorno. Uma solução não-trivial desse sistema de equações somente é possível quando o determinante dos seus respectivos sistemas desaparece, originando assim a equação característica para os autovalores de λ .

Com relação a parte simétrica da solução, a equação característica é dada por

$$\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (2.49)$$

e a parte antissimétrica da solução é dada por

$$\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha = 0, \quad (2.50)$$

dado $\lambda \neq 1$. Para $\lambda = 1$ a equação obtida é $\sin 2\alpha = 0$ para a parte simétrica e $2\alpha = \tan 2\alpha$ para a parte antissimétrica, ao invés das equações (2.49) e (2.50), respectivamente. Isso ocorre devido à forma degenerada da solução geral $F(\theta; \lambda)$ e devido à solução do sistema de equações, que é não-trivial apenas quando $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$, e $\alpha = 128.725^\circ$, respectivamente para a parte simétrica e antissimétrica (Fenner, 1973). Aliás, esse ângulo é associado a um paradoxo na teoria da elasticidade, descrito por Sternberg e Koiter (1958). Autovalores fisicamente admissíveis, resultando em tensões singulares na ponta do entalhe, devem satisfazer a condição

$$0 < \mathbb{R}[\lambda_1] < 1, \quad (2.51)$$

sendo λ_1 o autovalor dominante, como visto em Fenner (1973).

As equações características (2.49) e (2.50) podem ser resolvidas numericamente utilizando o método de interação de Muller, como proposto por Portela et al. (1991). A vantagem desse método em relação aos outros possíveis é que, mesmo que a interação se inicie com raízes reais, para um dado ângulo α , ela pode convergir para uma raiz complexa.

Um estudo abrangente sobre o comportamento das raízes das equações características (2.49) e (2.50) pode ser encontrado em Rösel (1987) e Vasilopoulos (1988). Mesmo assim é importante ressaltar que a solução angular simétrica é identificada com o *modo I*, enquanto a solução angular antissimétrica corresponde ao *modo II*.

Para uma dada coordenada angular θ , existe um conjunto infinito de autovalores $\lambda = \lambda_n$ na equação (2.49) para o *modo I* e $\lambda = \zeta_n$ na equação (2.50) para o *modo II*; e um conjunto infinito de autovetores correspondentes. A distribuição das tensões pode ser escrita em coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\{r^{\lambda_n-1} \lambda_n \beta_n [(2 + \lambda_n \cos 2\alpha + \cos 2\lambda_n \alpha) \cos(\lambda_n - 1)\theta - (\lambda_n - 1) \cos(\lambda_n - 3)\theta] \\ & + r^{\zeta_n-1} \zeta_n \delta_n [-(2 + \zeta_n \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_n \alpha) \sin(\zeta_n - 1)\theta + (\zeta_n - 1) \sin(\zeta_n - 3)\theta]\}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\{r^{\lambda_n-1} \lambda_n \beta_n [(2 - \lambda_n \cos 2\alpha - \cos 2\lambda_n \alpha) \cos(\lambda_n - 1)\theta + (\lambda_n - 1) \cos(\lambda_n - 3)\theta] \\ & + r^{\zeta_n-1} \zeta_n \delta_n [(-2 + \zeta_n \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_n \alpha) \sin(\zeta_n - 1)\theta - (\zeta_n - 1) \sin(\zeta_n - 3)\theta]\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\{r^{\lambda_n-1} \lambda_n \beta_n [-(\lambda_n \cos 2\alpha + \cos 2\lambda_n \alpha) \cos(\lambda_n - 1)\theta + (\lambda_n - 1) \sin(\lambda_n - 3)\theta] \\ & + r^{\zeta_n-1} \zeta_n \delta_n [-(\zeta_n \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_n \alpha) \cos(\zeta_n - 1)\theta + (\zeta_n - 1) \cos(\zeta_n - 3)\theta]\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O campo de deslocamentos associado pode ser descrito como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\mu} r^{\lambda_n} \beta_n [(\eta + \lambda_n \cos 2\alpha + \cos 2\lambda_n \alpha) \cos \lambda_n \theta - \lambda_n \cos(\lambda_n - 2)\theta] \right. \\ \left. - \frac{1}{2\mu} r^{\zeta_n} \delta_n [(\eta + \zeta_n \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_n \alpha) \sin \zeta_n \theta - \zeta_n \sin(\zeta_n - 2)\theta] \right\}, \quad (2.55)$$

e

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\mu} r^{\lambda_n} \beta_n [(\eta - \lambda_n \cos 2\alpha - \cos 2\lambda_n \alpha) \sin \lambda_n \theta + \lambda_n \sin(\lambda_n - 2)\theta] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\mu} r^{\zeta_n} \delta_n [(\eta - \zeta_n \cos 2\alpha + \cos 2\zeta_n \alpha) \cos \zeta_n \theta + \zeta_n \sin(\zeta_n - 2)\theta] \right\}, \quad (2.56)$$

onde β_n e δ_n são autovetores da expansão para o *modo I* e *modo II*, respectivamente.

2.7.2.2 - Movimento de corpo rígido

O campo de deslocamentos de William, equações (2.55) e (2.56), não inclui movimentos de corpo rígido e conseqüentemente não podem ser utilizados na técnica de subtração da singularidade, na forma como está apresentada.

Os parâmetros $\lambda = 0$ e $\zeta = 0$ não são autovalores do problema, já que eles resultam em tensões igualmente nulas ao longo do domínio da solução. Dessa forma, esses parâmetros podem ser utilizados para representar um movimento de corpo rígido, que neste caso, nada mais é do que a translação do corpo. Efetivamente, quando $\lambda = 0$ e $\zeta = 0$ são introduzidos nas equações (2.55) e (2.56), obtêm-se os seguintes deslocamentos

$$u_T = \frac{\eta + 1}{2\mu} \beta_0 = \beta_T \quad (2.57)$$

e

$$v_T = \frac{\eta - 1}{2\mu} \delta_0 = \delta_T, \quad (2.58)$$

onde β_0 e δ_0 são constantes arbitrárias que definem a translação de corpo rígido nas coordenadas x e y , respectivamente.

Um campo de rotação de corpo rígido também pode ser definido a partir dos deslocamentos nas equações (2.55) e (2.56), que correspondem às equações características (2.49) para o modo de deformação simétrico e (2.50) para o modo de deformação antissimétrico. O parâmetro $\zeta = 1$ não é um autovalor do problema, já que este resulta em tensões igualmente nulas de *modo II* ao longo do domínio da solução. Dessa forma, esse parâmetro pode ser utilizado para representar um movimento de corpo rígido, que neste caso, nada mais é do

que a rotação do corpo. Efetivamente, quando $\zeta = 1$ é introduzido nas equações (2.55) e (2.56), obtêm-se os seguintes deslocamentos

$$u_R = -\frac{\eta + 1}{2\mu} r \delta_1 \sin \theta = -\delta_R r \sin \theta \quad (2.59)$$

e

$$v_R = \frac{\eta + 1}{2\mu} r \delta_1 \cos \theta = \delta_R r \cos \theta, \quad (2.60)$$

onde δ_R é uma constante arbitrária que define o movimento.

Por fim, os campos de deslocamento de corpo rígido (2.57) a (2.60) podem ser usados para generalizar o campo de William como

$$u = u_T + u_R + u_W \quad (2.61)$$

e

$$v = v_T + v_R + v_W, \quad (2.62)$$

onde as componentes u_W e v_W representam o campo de deslocamentos de William obtidos pelas equações (2.55) e (2.56), respectivamente. Pode-se observar que as equações (2.61) e (2.62) introduzem três novas variáveis desconhecidas (β_T , δ_T e δ_R).

2.7.3 - Fator de intensidade de tensão

Na ponta de um entalhe pontudo (*tip of a sharp notch*), os fatores de intensidade de tensão são os coeficientes das tensões singulares e podem ser definidas de forma similar à utilizada por Irwin (1957), como

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda_1} \sigma_{yy}(r, \theta = 0, \alpha) \quad (2.63)$$

e

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\zeta_1} \sigma_{xy}(r, \theta = 0, \alpha) \quad (2.64)$$

que nada mais é do que

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lambda_1 \beta_1 (1 + \lambda_1 - \lambda_1 \cos 2\alpha - \cos 2\lambda_1 \alpha) \quad (2.65)$$

e

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \zeta_1 \delta_1 (-1 + \zeta_1 - \zeta_1 \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_1 \alpha), \quad (2.66)$$

onde λ_1 , β_1 e ζ_1 , δ_1 são os pares dominantes do modo de abertura e de cisalhamento, respectivamente.

Como apontado por Portela (1993), vale ressaltar que, de um ponto de vista estritamente matemático, os fatores de intensidade de tensão também podem ser definidos a partir do primeiro termo da série do campo de deslocamentos, equações (2.61) e (2.62). Nesse caso, o processo de limitação é realizado ao longo da superfície do entalhe (coordenada $\theta = \pm\alpha$).

2.7.4 - Postulado fundamental

A expressão analítica da série de expansão do campo de tensões na ponta da trinca, equações (2.53) a (2.55), mostra que apenas o primeiro termo da série, para cada modo de deformação, tem uma contribuição não-trivial para o estado de tensão na ponta da trinca. Em virtude da forma analítica desses termos, o campo de tensões é da ordem $O(r^{\lambda_1-1})$, para o *modo I* e $O(r^{\zeta_1-1})$ para o *modo II*, tornando-se assim singular à medida que r tende a zero. Isso significa que a força dessas singularidades é o único parâmetro que pode caracterizar o carregamento e a deformação sofrida pela ponta da trinca. Por consequência, o fator de intensidade de tensão, que mede a força dessas singularidades, determina completamente o comportamento da trinca. Esse é o postulado fundamental da mecânica da fratura linear elástica introduzido por Irwin (1957).

2.7.5 - Campo elástico na ponta da trinca

Para a análise de problemas envolvendo trinca no âmbito da mecânica da fratura linear elástica, a série de expansão de Williams do campo elástico na ponta de um entalhe, equações (2.52) a (2.54), serão apresentadas para o caso de uma trinca ($\alpha = 180^\circ$). Além do mais, como o comportamento de uma trinca é completamente determinado pelos fatores de intensidade de tensão, equações (2.63) a (2.66), apenas o primeiro termo da série de expansão precisa ser considerado. Dessa forma, para o caso em que $\alpha = 180^\circ$, a tensão na ponta da trinca é dada por

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (2.67)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.68)$$

e

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.69)$$

e os deslocamentos dados por

$$u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k + 3) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.70)$$

e

$$v = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k + 1) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k - 3) \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right], \quad (2.71)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão de abertura e de cisalhamento, respectivamente. A constante μ é o módulo de cisalhamento e a constante k é dada por $3 - 4\nu$, para o estado plano de deformação, e $(3 - \nu)/(1 + \nu)$, para o caso de estado plano de tensão, onde ν é o coeficiente de Poisson. Com relação ao campo elástico de Williams vale ressaltar que, como o campo elástico foi formulado a partir de uma trinca semi-infinita e análise com autovalores, ele é válido nos arredores da ponta de uma trinca de borda arbitrária (*tip of an arbitrary edge crack*) e é válido para carregamentos arbitrários remotos.

A característica intrínseca que distingue uma trinca de borda (*edge crack*) de uma trinca interna (*internal crack*) é que, no primeiro caso, todo o caminho percorrido pelo carregamento (um padrão de curvas que indicam como o carregamento é transferido ao longo do objeto em estudo) passa à frente da ponta da trinca. Além disso, uma trinca emanando de um furo em uma placa retangular carregada é considerada uma trinca interna, porque apenas parte do caminho percorrido pelo carregamento passa à frente da ponta da trinca.

O campo elástico ao redor da ponta de uma trinca interna pode ser formulado a partir de uma análise do valor limite com variáveis complexas, como apresentado por Sih e Liebowitz (1968). Nesse método de análise, o carregamento remoto desempenha um papel fundamental na derivação da solução elástica. A base desse estudo foi o caso de uma placa retangular infinita contendo uma trinca inclinada interna, livre de forças de superfície, de ângulo α , sujeita a uma tensão biaxial remota com componentes σ e $k\sigma$, aplicadas uniformemente em relação a borda da placa, com ângulos de $\alpha = \pi/2$ e $\alpha = 0$, respectivamente. Esse caso foi estudado por Eftis et al. (1990) por meio de uma análise do valor limite com uma representação complexa do campo elástico obtido por Muskhelishvili (2010). Nesse caso, a aproximação de primeira ordem do campo de tensões na região da ponta da trinca é idêntica à correspondente aproximação do campo de tensões nos arredores da ponta da trinca de borda (*edge crack*), equações (2.67) a (2.71), com uma constante adicional na expressão da tensão normal na direção do eixo da trinca. Essa tensão normal é definida por ambos os termos referentes ao carregamento, σ e $k\sigma$, como também pelo

ângulo de orientação da trinca α como sendo

$$\sigma_{xx} = \sigma(1 - k) \cos 2\alpha. \quad (2.72)$$

Para $\alpha \neq \pi/4$, esse termo adicional é cancelado apenas para o caso em que $k = 1$, que corresponde a estados de tensão idênticos aplicados nos contornos remotos da placa. As implicações desse resultado são aparentemente dramáticas, tendo em vista que as mesmas invalidam o postulado fundamental da mecânica da fratura linear elástica. Efetivamente, o carregamento ou a deformação sofrida pela ponta de uma trinca interna é caracterizada pelo termo constante (2.72), adicionalmente aos termos singulares usuais (2.67) a (2.69) e conseqüentemente, os fatores de intensidade de tensão não podem determinar completamente o comportamento da trinca. Contudo, ao invocar o princípio da superposição da elasticidade linear, o postulado fundamental da mecânica da fratura linear elástica pode ser restaurado, já que o termo constante da tensão, dada pela equação (2.72), representa uma constante subjacente simples do estado de tensão em uma placa infinita sem trincas, que pode ser considerada separadamente como um problema independente, cujos resultados são impostos no estado de tensão na ponta da trinca.

Os resultados expressos pela equação (2.72) são válidos para o caso de uma trinca interna em uma placa retangular infinita, carregada por uma tensão de tração uniforme aplicada na borda da placa ou contorno da placa. No caso de uma trinca interna em uma placa de geometria arbitrária sujeita a um carregamento arbitrário, a solução elástica não pode ser derivada analiticamente e sendo assim, os termos não singulares adicionais correspondentes ao estado de tensão subjacente da placa são desconhecidos. Neste caso, uma aproximação é introduzida na análise, que considera apenas os termos singulares na representação do campo elástico na ponta da trinca. Isso significa que o campo elástico na ponta da trinca de uma trinca interna pode ser representada por um campo elástico na ponta de uma trinca de borda, apenas como uma primeira aproximação.

2.8 - INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA

Otimização é o processo de ajustar os dados de entrada ou características de um determinado sistema, processo matemático, ou experimento, buscando assim encontrar os dados de saída mínimos ou máximos, podendo este ser ou não o resultado final (Haupt e Haupt, 2004). A resolução de problemas de engenharia envolve tomada de decisões em vários estágios. O objetivo final de todas essas decisões é minimizar o esforço necessário ou maximizar o benefício desejado, como visto em Rao (2009). Como o esforço necessário ou o benefício desejado, em qualquer situação prática, pode ser expresso como uma função de determinadas

variáveis de decisão, a otimização pode ser definida como o processo de encontrar a condição que determina o valor máximo ou mínimo de uma função.

Várias técnicas foram desenvolvidas ao longo dos anos para a resolução de diferentes tipos de problemas de otimização. As técnicas de programação matemática, também conhecidas como métodos de busca da solução ótima, são boas em encontrar o mínimo de uma função com várias variáveis, sob um conjunto de restrições impostas. Já as técnicas de processo estocásticos podem ser usadas para analisar problemas descritos por um conjunto de variáveis aleatórias em uma distribuição probabilística. Por fim, os métodos estatísticos permitem a análise de dados experimentais e construção de modelos empíricos, buscando assim obter a representação mais precisa da situação física (Goldberg e Holland, 1988).

Existem várias formas de se classificar problemas de otimização. Quanto à existência ou não de restrições, eles podem ser classificados em restringidos ou não restringidos. Com relação à natureza das variáveis de decisão, eles podem ser classificados em duas grandes categorias: primeiramente, como parâmetro ou otimização estática, segundo, como uma trajetória ou otimização dinâmica. Classificações entre problemas lineares, não lineares, geométricos e quadráticos podem ser atribuídos com relação à natureza das expressões para a função objetivo e as restrições. Baseado nos valores permitidos para as variáveis de decisão, eles podem ser classificados em inteiros ou valores reais. Com relação à natureza determinística das variáveis, o problema de otimização pode ser classificado como determinístico ou estocástico. Quanto à separação entre as funções objetivo e as restrições, ele pode ser classificado como separável e não separável. Por fim, dependendo do número de funções objetivo a serem minimizadas, o problema e otimização pode ser classificado em mono-objetivo e multi-objetivo, assim como visto em Rao (2009).

Recentemente, surgiram algoritmos com ótimos resultados, dentre eles o Algoritmo Genético (AG) ou *Genetic Algorithm (GA)*, desenvolvido por Holland (1975), o Anelamento Simulado ou *Simulated Annealing*, desenvolvido por Kirkpatrick et al. (1983), a Otimização por Enxame de Partículas ou *Particle Swarm Optimization*, apresentado por Parsopoulos e Vrahatis (2002). Esses métodos evolucionários geram novos pontos no espaço de busca, aplicando operadores aos pontos atuais e movendo-se estatisticamente para locais ótimos no espaço. Os ótimos resultados são frutos de uma busca inteligente em um espaço de soluções grande, mas finito, usando métodos estatísticos.

Os métodos de otimização clássicos são ótimos em encontrar uma única solução em apenas uma interação, tornando-os assim, inconvenientes para a resolução de problemas com múltiplas funções objetivo. Em compensação, como demonstrado por Deb (2001), os algoritmos evolucionários podem encontrar várias soluções ótimas em apenas uma interação, graças ao seu processo de busca no espaço amostral, principalmente a mutação e

o crossover. Dessa forma, esses métodos são ideais para aplicações relacionadas a problemas multi-objetivos, como os problemas relacionados com a presente pesquisa.

2.8.1 - Otimização mono-objetiva

Atualmente, existem técnicas de otimização mono-objetiva que realizam a busca no espaço amostral de forma heurística e por gradiente. Além dos princípios determinísticos envolvidos no algoritmo, também existem os princípios de busca estocásticos, que permitem que o algoritmo encontre a solução ótima global de forma mais eficiente.

Um problema de otimização mono-objetivo pode ser definido como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{e}(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x}), \dots, e_m(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0} \\ &\text{onde} && \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

A solução minimiza o escalar $f(\mathbf{x})$ onde \mathbf{x} é um vetor de variável de decisão de n -dimensões do universo \mathbf{X} . Observe que $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ representa as restrições que precisam ser atendidas enquanto se otimiza (minimizar ou maximizar) $f(\mathbf{x})$. \mathbf{X} contém todos os possíveis \mathbf{x} que podem ser utilizados para satisfazer uma avaliação de $f(\mathbf{x})$ e suas respectivas restrições. Naturalmente, \mathbf{x} pode ser um vetor de variáveis discretas ou contínuas assim como f pode ser contínuo ou discreto.

O método para encontrar o ótimo global (pode não ser único) de qualquer função é chamado de otimização global. Dada a função $f : \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \neq \emptyset$, para $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ o valor $f^* \triangleq f(\mathbf{x}^*) > -\infty$ é considerado o mínimo global se, e apenas se, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$. \mathbf{x}^* é a definição da solução mínima global, f é a função objetivo, e o conjunto \mathbf{X} é a região viável de \mathbf{x} , assim como visto em Coelho et al. (2007).

2.8.2 - Otimização Multi-objetiva

Uma otimização multi-objetiva, também conhecida como otimização de múltiplos critérios, é definida como o ato de encontrar um vetor de variáveis de decisão, satisfazendo as condições impostas, que resultem em valores aceitáveis para todas as funções objetivo, como visto em Deb et al. (2002). Em geral, essa otimização está associada a dois tipos principais de dificuldade, sendo elas os vários objetivos diferentes conflitantes e o espaço de busca altamente complexo. Ao invés de uma única solução ótima, como é o caso da otimização mono-objetiva, objetivos conflitantes resultam em várias soluções não dominantes, em que todas podem ser consideradas ótimas do ponto de vista matemático; geralmente denominadas

soluções ótimas de Pareto.

Um problema geral de otimização multi-objetiva inclui um conjunto de n parâmetros, que são as variáveis de decisão, um conjunto de k funções objetivo, e um conjunto de m restrições. As funções objetivo e as restrições são funções das variáveis de decisão. O principal objetivo da otimização é

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{e}(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x}), \dots, e_m(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0} \\
 &\text{onde} && \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X} \\
 &&& \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbf{Y},
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

no qual \mathbf{x} é o vetor de decisão, \mathbf{y} é o vetor objetivo, \mathbf{X} representa o espaço de decisão e \mathbf{Y} representa o espaço objetivo; as restrições $\mathbf{e}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ determinam o conjunto de soluções aceitáveis.

2.8.2.1 - Dominância de Pareto

Para dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \succ \mathbf{b} \text{ (a domina b)} & \quad \text{se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) > \mathbf{f}(\mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \succeq \mathbf{b} \text{ (a domina fracamente b)} & \text{ se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \sim \mathbf{b} \text{ (a é indiferente a b)} & \quad \text{se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) \not\geq \mathbf{f}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{f}(\mathbf{b}) \not\geq \mathbf{f}(\mathbf{a}).
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

As definições para um problema de minimização (\prec, \preceq) são analógicas.

Na Figura 2.10b, o retângulo cinza claro engloba a região no espaço objetivo que é dominado pelos vetores de decisão representados por B . O retângulo cinza escuro contém os vetores objetivos cujos vetores de decisão correspondentes dominam as soluções associadas com B . Todas as soluções, para a qual o vetor objetivo resultante não está em nenhum dos retângulos, são indiferentes a solução apresentada em B .

Baseado no conceito de dominância de Pareto, os critérios de otimalidade para os problemas de otimização multi-objetiva podem ser introduzidos. Referindo a Figura 2.10b, A é único entre B, C, D , e E , tendo em vista que seu vetor de decisão correspondente não é dominado por nenhum outro vetor de decisão. Isso significa que, A é ótimo no sentido de que, não pode ser melhorado em nenhum objetivo, sem causar a degeneração de pelo menos um dos outros objetivos. Tais soluções são consideradas Pareto ótimas.

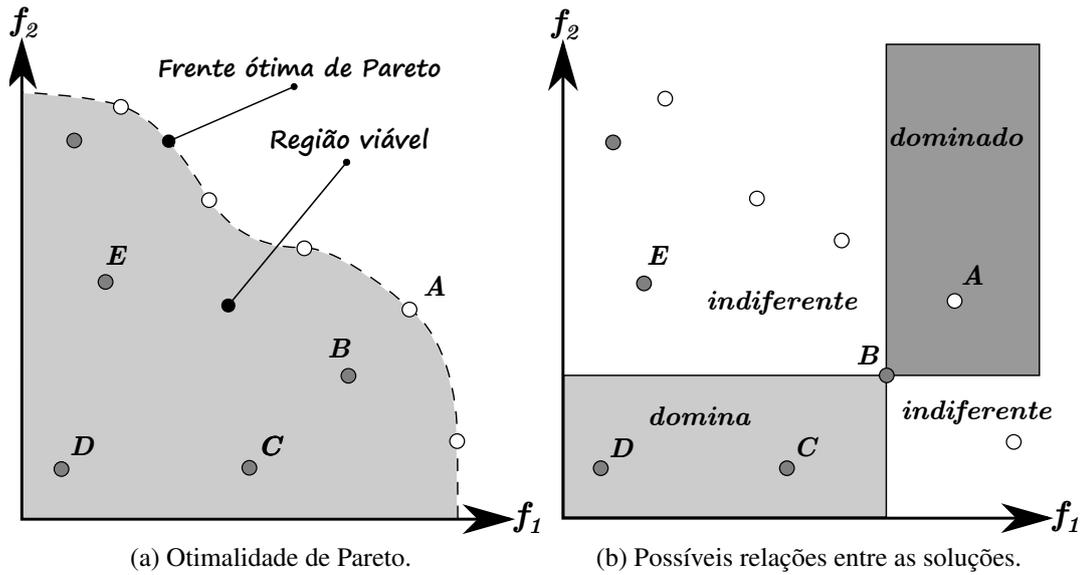


Figura 2.10 – Representação da otimalidade de Pareto no espaço objetivo e as possíveis relações entre as soluções no espaço objetivo.

2.8.2.2 - Otimalidade de Pareto

Um vetor de decisão $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_f$ é considerado não dominante, em relação a um conjunto $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}_f$,

$$\text{se } \nexists \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \mathbf{a} \succ \mathbf{x}. \quad (2.76)$$

Sendo assim, \mathbf{x} é dito como Pareto ótimo se \mathbf{x} é não dominante com relação a \mathbf{X}_f .

Como visto na Figura 2.10a, os pontos brancos representam a solução ótima de Pareto. Elas são indiferentes entre si. Não existe apenas uma solução ótima, mas sim um conjunto de soluções que melhor definem o problema. Nenhuma dessas soluções pode ser considerada melhor do que a outra, a não ser que uma preferência seja incluída, com o objetivo de classificar as soluções. O conjunto contendo todas as soluções ótimas de Pareto é chamada de conjunto ótimo de Pareto; os vetores objetivos correspondentes formam a frente ótima de Pareto ou superfície ótima de Pareto.

2.8.2.3 - Conjuntos e frentes não dominantes

Seja $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}_f$. A função $p(\mathbf{A})$ origina o conjunto de vetores de decisão não dominantes em \mathbf{A} :

$$p(\mathbf{A}) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \mid \mathbf{a} \text{ é não dominante, com respeito a } \mathbf{A}\}. \quad (2.77)$$

Assim sendo, o conjunto $p(\mathbf{A})$ é o conjunto não dominante com respeito a \mathbf{A} , o conjunto

de vetores objetivos correspondentes $f(p(\mathbf{A}))$ é a frente não dominada com respeito a \mathbf{A} . Além disso, o conjunto $\mathbf{X}_p = p(\mathbf{X}_f)$ é chamado de conjunto ótimo de Pareto e o conjunto $\mathbf{Y}_p = f(\mathbf{X}_p)$ é denominado como frente ótima de Pareto.

2.8.2.4 - Conjunto ótimo de Pareto Global e Local

O conjunto \mathbf{A} é um conjunto ótimo de Pareto Local

$$\text{se } \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \nexists \mathbf{x} \in \mathbf{X}_f : \mathbf{x} \succ \mathbf{a} \wedge \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \epsilon \wedge \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \delta, \quad (2.78)$$

onde $\|\cdot\|$ é uma distância métrica correspondente com $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$.

O conjunto \mathbf{A} é um conjunto ótimo de Pareto Global

$$\text{se } \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \nexists \mathbf{x} \in \mathbf{X}_f : \mathbf{x} \succ \mathbf{a}. \quad (2.79)$$

Note que, um conjunto ótimo de Pareto Global não necessariamente contém todas as soluções ótimas de Pareto e todo conjunto ótimo de Pareto Global também é um conjunto ótimo de Pareto Local.

2.8.3 - Algoritmo Genético

O algoritmo genético (AG) pertence a uma classe de métodos computacionais evolucionários e é definido como um procedimento de busca baseado no mecanismo da seleção natural e da genética. Esses métodos geram novos pontos no espaço de busca aplicando operadores aos pontos atuais existentes e movendo-se estatisticamente para os melhores lugares no espaço de busca. Eles se baseiam em uma busca inteligente, dentro de um amplo espaço de solução, mas finito, usando métodos estatísticos (Haupt e Haupt, 2004).

Um algoritmo genético permite que uma população composta de vários indivíduos evolua conforme regras de seleção específicas, para um estado que minimize a função de custo ou função de aptidão (*fitness function*), que se deseja otimizar. O método foi desenvolvido por Holland (1975) ao longo dos anos 1960 e 1970 e, finalmente, popularizado por Goldberg e Holland (1988), que conseguiram resolver um problema complexo envolvendo o controle de transmissão de um gasoduto utilizando o algoritmo.

O algoritmo genético, quando comparado com outros métodos tradicionais, apresenta as seguintes vantagens:

- Otimiza com variáveis contínuas ou discretas;
- Não requer informações derivadas de outras;
- Simultaneamente procura em uma grande amostragem;
- Lida com um grande número de variáveis;
- É compatível com computação em paralelo;
- Fornece uma lista de variáveis ótimas, não apenas uma única solução;
- Funciona com dados gerados numericamente, dados experimentais ou funções analíticas.

O procedimento geral do AG pode ser resumidamente dividido em algumas etapas, como mostra o diagrama na Figura 2.11. No primeiro passo, uma população inicial é

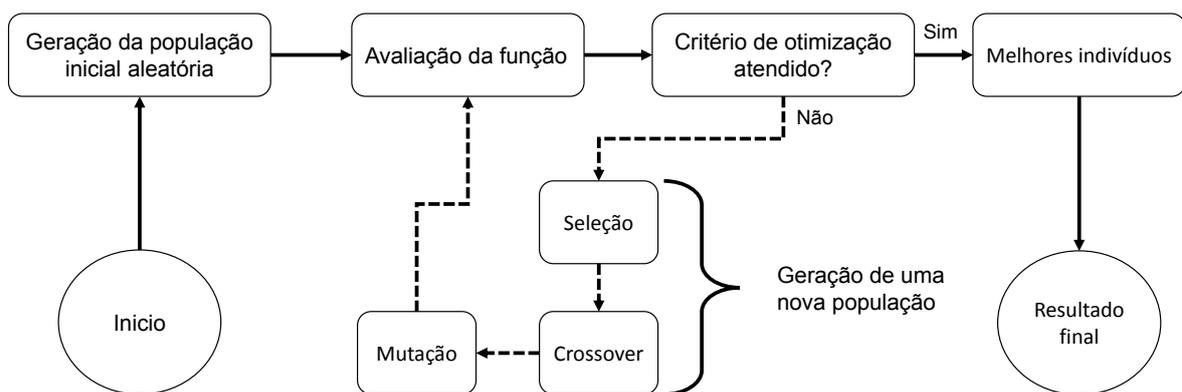


Figura 2.11 – Diagrama da lógica computacional de um algoritmo genético simples.

aleatoriamente criada para o problema em questão. Cada indivíduo dessa população, ou seja, um cromossomo ou um conjunto de variáveis, é considerado na análise como uma possível solução para o problema.

No segundo passo, cada indivíduo dessa população é utilizado para resolver o problema e as boas soluções são escolhidas de acordo com a função de aptidão ou *fitness function*, que será responsável por orientar a evolução das próximas gerações.

Sendo assim, para se produzir uma nova população, cada indivíduo é manipulado por uma imposição iterativa de operadores genéticos, como seleção, crossover/cruzamento e mutação.

A seleção é um processo estocástico para selecionar uma nova população dada uma antiga população, com base no princípio da sobrevivência do mais apto e pode ser realizada de várias maneiras, incluindo roleta russa, torneios, esquemas de classificação, etc.

O Crossover é um operador genético que troca partes de soluções parentais, ou cromossomos parentais, para formar novas crianças possivelmente melhores, realizando uma combinação genética de forma eficiente. Assim, como o anterior, essa operação pode ser realizada de várias maneiras, incluindo com um ponto, dois pontos, pontos múltiplos, cruzamento uniforme, etc. O Crossover permite que o algoritmo extraia os melhores genes de diferentes indivíduos e os recombine em crianças potencialmente superiores.

A mutação é o processo que introduz novas informações para uma população simplesmente modificando um único indivíduo aleatoriamente. A mutação aumenta a diversidade de uma população e aumenta a probabilidade do algoritmo gerar indivíduos com melhores soluções.

Como visto em Gen e Cheng (2000), os dois operadores genéticos, mutação e crossover, são de fundamental importância no processo de otimização do AG. O primeiro é usado para explorar aleatoriamente áreas no espaço de busca amostral além do ótimo local encontrado; enquanto que, o segundo é usado para realizar uma pesquisa local no espaço amostral, tentando sempre encontrar melhores soluções do que as já encontradas.

No final do processo, é criada uma nova população chamada de geração e assim o processo se repete. Este algoritmo iterativo termina se um dos seguintes critérios comuns de parada for satisfeito: alcançar o número máximo permitido de gerações, alcançar o tempo máximo de computação predefinido ou quando não houver nenhuma melhoria nos resultados.

Apesar de ser muito eficiente, o AG não é a melhor maneira de resolver todos os tipos de problemas. Por exemplo, os métodos tradicionais foram refinados de forma a encontrar rapidamente a solução de uma função analítica convexa bem-comportada e com apenas algumas variáveis. Para esses casos, os métodos matemáticos tradicionais superam o GA, encontrando rapidamente o mínimo, enquanto o AG ainda está analisando os indivíduos da população inicial. No entanto, muitos problemas reais não se enquadram nesta categoria, mostrando assim a relevância do AG na resolução de problemas complexos, como no caso da otimização dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha, objeto de estudo da presente pesquisa.

3 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL

A formulação proposta na presente pesquisa tem fortes influências da equação dos resíduos ponderados e do teorema do trabalho, que estabelece uma relação energética entre campos de tensão estaticamente admissíveis e campos de deformação cinematicamente admissíveis.

3.1 - MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

A aproximação pelo método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) ou *Moving Least Square (MLS)* foi concebida por Lancaster e Salkauskas (1981), para a reconstrução de superfícies e ajuste de dados pontuais arbitrariamente dispersos. Nayroles et al. (1992) introduziu o uso dos MQM para a construção de funções de forma para a solução de problemas de mecânica dos sólidos deformáveis.

A aproximação pelos MQM é composta por três componentes: uma função peso do suporte compacto associada a cada nó da discretização, uma base polinomial completa e um conjunto de coeficientes em função das coordenadas espaciais, conforme apresentado por Atluri e Zhu (1998). Todas as terminologias utilizadas na presente pesquisa seguem o modelo proposto por Atluri e Zhu (2000).

Considere Ω o domínio de um corpo com contorno Γ e seja $N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Omega$ o conjunto de nós espalhados ao longo desse domínio, que representam uma discretização sem malha, no qual alguns deles estão localizados no contorno Γ , como pode ser visto na Figura 3.1. Os suportes locais circulares ou retangulares, centralizados em cada ponto nodal, podem ser utilizados. Nos arredores de um ponto x qualquer, o domínio de definição da aproximação pelos MQM é o subdomínio $\Omega_x \in \Omega$, com um contorno local Γ_x .

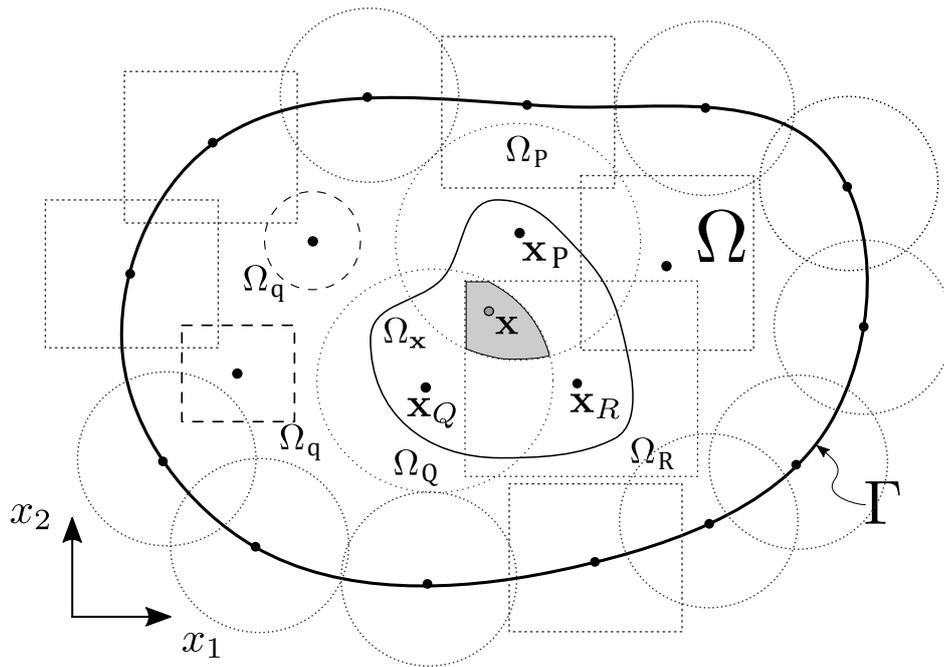


Figura 3.1 – Representação de uma discretização do domínio global Ω usando o método sem malha, com um contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, com uma distribuição nodal \mathbf{x}_i . Ω_s , representado como Ω_P , Ω_Q e Ω_R , é o suporte compacto do nó; Ω_x é o domínio de definição de um ponto qualquer \mathbf{x} e Ω_q é o domínio da forma fraca local ou domínio de quadratura do nó \mathbf{x}_i .

3.1.1 - Funções de Forma

Considere Ω_x o domínio de definição de uma aproximação pelos MQM em uma região nos arredores de um ponto \mathbf{x} qualquer, demonstrado para uma aproximação unidimensional na Figura 3.2.

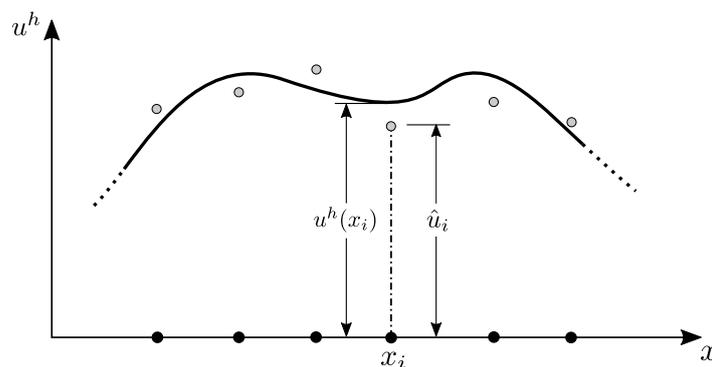


Figura 3.2 – Exemplo unidimensional da aproximação pelos MQM, onde $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$.

Para aproximar o deslocamento $u(\mathbf{x}) \in \Omega_x$, a partir de um certo número de nós espalhados ao longo do domínio \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, onde esses parâmetros nodais \hat{u}_i são definidos, a

aproximação pelos MQM é dada por

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

para $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$, em que

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})], \quad (3.2)$$

é o vetor da base polinomial de ordem m e $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o vetor de coeficientes $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, m$, que são funções das coordenadas espaciais $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, em problemas 2-D.

O vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é determinado a partir da minimização da norma ponderada discreta L_2

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_i) - \hat{u}_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2, \quad (3.3)$$

com respeito a cada termo de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, onde $w_i(\mathbf{x})$ é a função peso associada ao nó i , com suporte compacto $w_i(\mathbf{x}) > 0$, para todo \mathbf{x} no suporte de $w_i(\mathbf{x})$. A Figura 3.1 demonstra esquematicamente o suporte compacto das funções peso dos MQM associadas a alguns nós, que nada mais são do que os domínios de influência de cada um desses nós. Encontrando o extremo de $J(\mathbf{x})$ com respeito a cada termo de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (3.4)$$

no qual

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (3.6)$$

e

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]. \quad (3.7)$$

Resolvendo a equação (3.4) para $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, tem-se

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (3.8)$$

desde que $n \geq m$, para cada ponto qualquer \mathbf{x} , como uma condição necessária para uma aproximação bem definida. Substituindo $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, obtido na equação (3.8), na equação (3.1) obtém-se a equação final da aproximação pelos MQM

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i, \quad (3.9)$$

onde

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (3.10)$$

é a função de forma da aproximação pelos MQM correspondente ao nó \mathbf{x}_i , esquematicamente representado na Figura 3.3b. É importante notar que as funções de forma dos MQM não são interpolantes nodais, não apresentando assim a propriedade do delta de *Kronecker*, ou seja, $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$.

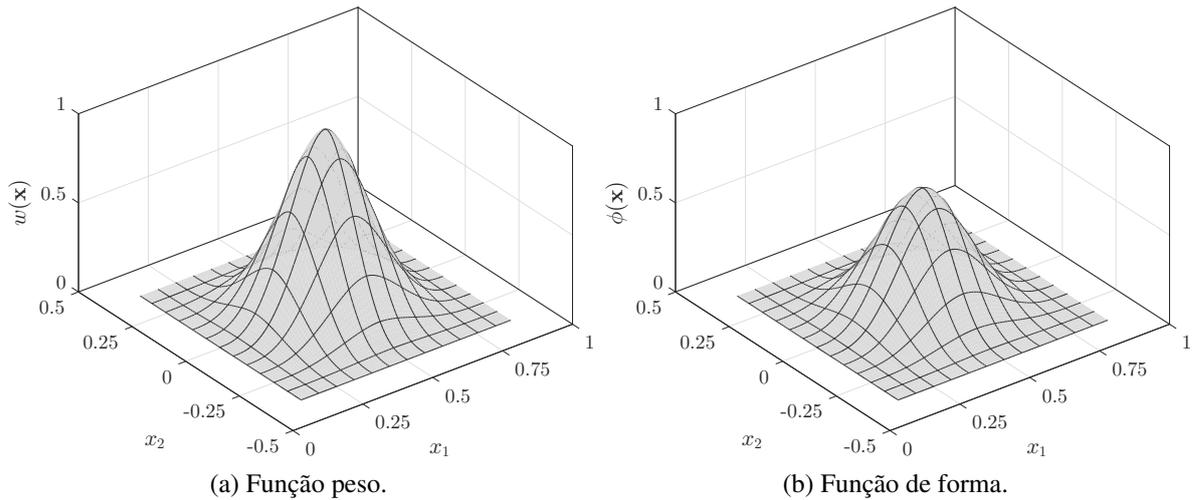


Figura 3.3 – Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para um nó $x = [1/2 \ 0]^T$

Como $\phi_i(\mathbf{x})$ desaparece para qualquer \mathbf{x} que não esteja no domínio local do nó \mathbf{x}_i , como pode ser visto na Figura 3.3b, o caráter local da aproximação pelos MQM é preservada.

As derivadas espaciais da função de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ são obtidas com

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^m [p_{j,k}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji} + p_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji}], \quad (3.11)$$

onde $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x_k$.

3.1.2 - Funções de Ponderação

As funções peso $w_i(\mathbf{x})$, ilustrada na Figura 3.3a, introduzidas na equação (3.3) para cada nó \mathbf{x}_i , tem suporte compacto que define o subdomínio, onde $w_i(\mathbf{x}) > 0$ para todos os \mathbf{x} . Por simplicidade, suportes compactos retangulares ou circulares serão considerados nas análises

desta pesquisa, com suas funções peso definidas por

$$w_i(\mathbf{x}) = w_{i_x}(\mathbf{x}) w_{i_y}(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

com funções ponderadoras *spline* de quarta ordem dadas por

$$w_{i_x}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_{i_x}}{r_{i_x}} \right)^4 & \text{para } 0 \leq d_{i_x} \leq r_{i_x} \\ 0 & \text{para } d_{i_x} > r_{i_x} \end{cases} \quad (3.13)$$

e

$$w_{i_y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_{i_y}}{r_{i_y}} \right)^4 & \text{para } 0 \leq d_{i_y} \leq r_{i_y} \\ 0 & \text{para } d_{i_y} > r_{i_y}, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $d_{i_x} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ e $d_{i_y} = |y - y_i|$ são as distâncias entre as coordenadas $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ e os nós $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i]$, onde r_{i_x} e r_{i_y} são os tamanhos do suporte nodal para a função peso $w_i(\mathbf{x})$. A função das equações (3.13) e (3.14) tem continuidade C^1 e, portanto, as funções de forma em (3.11) também tem a mesma ordem de continuidade em todo o domínio.

3.1.3 - Campo Elástico

Agora o campo elástico deve ser aproximado nas proximidades de \mathbf{x} . Assim, considerando a equação (3.10), pode-se apresentar a aproximação pelos MQM do campo de deslocamentos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u^h(\mathbf{x}) \\ v^h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \phi_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.15)$$

e do campo de deformações específicas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.16)$$

assumindo linearidade geométrica no operador diferencial $\mathbf{L}(\cdot)$, então tem-se que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & \dots & \phi_{n,1} & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & \dots & 0 & \phi_{n,2} \\ \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{n,2} & \phi_{n,1} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Finalmente, o campo de tensões pode ser aproximado pela lei de Hooke generalizada

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.18)$$

assim como as componentes das forças de superfície

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.19)$$

onde \mathbf{D} representa a matriz constitutiva do material, dada por

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Tensão}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Deformação}} \quad (3.20)$$

e \mathbf{n} é a matriz das componentes do vetor normal unitário, definida por

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

As equações (3.15) a (3.21) mostram que, em um ponto \mathbf{x} qualquer, as variáveis do campo elástico são definidas em termo das incógnitas nodais $\hat{\mathbf{u}}$.

3.2 - FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO

A solução para um determinado problema físico nada mais é do que um campo elástico totalmente admissível, que satisfaça tanto a admissibilidade cinemática quanto a estática. Sendo assim, se essa solução existe, como visto em Fichera (2006), ela é a única capaz de promover a estabilidade e a linearidade admissível pelo material.

Baseando-se na teoria fundamental do cálculo variacional, essa solução única proposta leva diretamente ao teorema do trabalho virtual, que nada mais é do que a minimização da energia potencial de um problema físico (Reddy, 2006).

O teorema geral do trabalho estabelece uma relação energética entre um campo de tensões estaticamente admissível qualquer com um campo de deformações cinematicamente admissível qualquer, em um mesmo corpo ou domínio. Derivado diretamente da equação dos resíduos ponderados, o teorema do trabalho serve como uma base unificadora para as formulações numéricas de modelos contínuos (Brebbia e Walker, 2013).

Seja Ω um domínio bidimensional com contorno definido por $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Considera-se um campo de tensões estaticamente admissível, ou seja, que satisfaça a condição de equilíbrio

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

válida no domínio Ω , com a condição de contorno na fronteira natural Γ_t

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad (3.23)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\sigma}$ representa as componentes de tensão, \mathbf{L} é o operador de derivadas matricial, o vetor \mathbf{t} representa as componentes das forças superficiais, $\bar{\mathbf{t}}$ são valores das forças superficiais prescritas e \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno Γ .

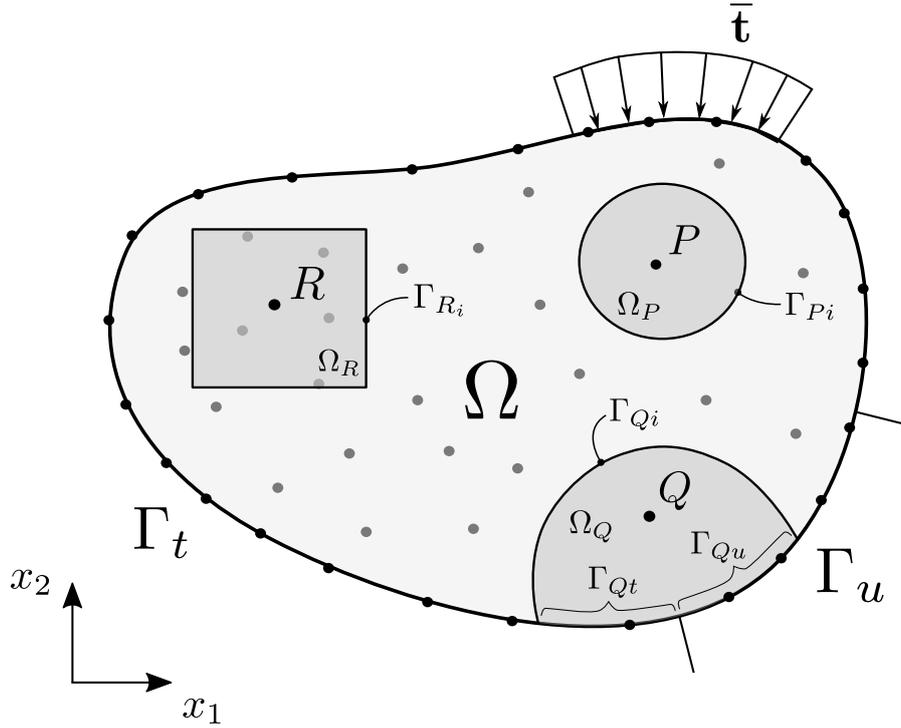


Figura 3.4 – Representação do domínio global Ω , suas fronteiras natural Γ_t e essencial Γ_u e os subdomínios Ω_Q associados ao nó Q , com contorno interno $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$. Nós P e R , de forma similar, possuem domínios locais correspondentes a Ω_P e Ω_R .

Seja Q um ponto do domínio Ω contido em um subdomínio arbitrário Ω_Q com fronteira constituída por $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$, onde Γ_{Qi} designa o contorno interno do subdomínio, $\Gamma_{Qt} = \Gamma_t \cap \Gamma_Q$ e $\Gamma_{Qu} = \Gamma_u \cap \Gamma_Q$, como mostrado na Figura 3.4. Devido a sua arbitrariedade, o domínio local pode se sobrepor a outros domínios locais similares.

A forma forte da equação dos resíduos ponderados para o domínio local do ponto Q pode ser escrita da forma

$$\int_{\Omega_Q} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^T \mathbf{W}_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma d\Gamma = 0, \quad (3.24)$$

onde \mathbf{W}_Ω e \mathbf{W}_Γ são funções peso arbitrarias definidas em Ω e Γ , respectivamente. Integrando o termo de domínio da equação (3.24) por partes (teorema da divergência), obtém-se a forma fraca local da equação dos resíduos ponderados

$$\int_{\Gamma_Q} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{W}_\Omega d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}\mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}_\Gamma d\Gamma = 0. \quad (3.25)$$

Por conveniência, a função peso do contorno, \mathbf{W}_Γ , é avaliada como

$$\mathbf{W}_\Gamma = -\mathbf{W}_\Omega, \quad (3.26)$$

no contorno Γ_{Qt} . Assim, a equação (3.25) resulta em

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{W}_\Omega \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{W}_\Omega - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_\Omega) \, d\Omega = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Nota-se que \mathbf{W}_Ω deve ter ordem de continuidade compatível com o operador \mathbf{L} , pois esta é uma condição de admissibilidade para a integração.

Seja $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ um campo de deformações cinematicamente admissível, associado a um campo de deslocamentos \mathbf{u}^* com derivadas suficientemente pequenas para garantir-se a linearidade geométrica, dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{L} \mathbf{u}^*, \quad (3.28)$$

no domínio Ω , com condições de contorno

$$\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.29)$$

válidas em Γ_u^* . Considerando as funções peso arbitrárias \mathbf{W}_Ω como

$$\mathbf{W}_\Omega = \mathbf{u}^*, \quad (3.30)$$

a equação dos resíduos ponderados (3.27) reduz-se a

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{u}}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma - \int_{\Omega_Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u}^* - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^*) \, d\Omega = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

que pode ser escrita de forma compacta

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\Omega. \quad (3.32)$$

Essa equação, que expressa a dualidade estático-cinemática, é a forma local do conhecido teorema do trabalho, uma das identidades fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis, como proposto por Sokolnikoff (1956).

A equação (3.32) é o ponto de partida da formulação cinematicamente admissíveis do método desenvolvido neste trabalho, que merece algumas ressalvas, sendo elas:

- O campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, é qualquer campo que satisfaça o equilíbrio das forças externas \mathbf{b} e \mathbf{t} aplicadas, não sendo necessariamente o campo de tensões que efetivamente está atuando no corpo;
- O campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, é qualquer campo gerado por \mathbf{u}^* que seja compatível

com as restrições $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}$, não sendo necessariamente o campo de deformações que efetivamente está atuando no corpo;

- Tanto o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ quanto o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, não estão conectados por qualquer relação constitutiva. Esses campos são completamente independentes, como uma consequência da arbitrariedade da função ponderadora \mathbf{W}_Ω ;
- Por fim, o domínio local Ω_Q é qualquer subdomínio arbitrário atuando no corpo, onde os campos independentes $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ podem ser definidos.

A independência dos campos relacionados na equação (3.32), é a característica que torna possível e inédita a formulação do método sem malha local, pela escolha de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. É importante notar que nenhuma relação constitutiva foi adotada na dedução da equação (3.32). Portanto, pode-se tratar tanto de problemas da elasticidade quanto da plasticidade, desde que se garanta a linearidade geométrica.

Como estratégia de modelagem, considera-se que o campo local estaticamente admissível é um campo totalmente admissível. Assim, além de satisfazer as condições das equações (3.22) e (3.23), também satisfaz a condição de admissibilidade cinemática, ou seja

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (3.33)$$

válida no domínio Ω , com condição de contorno

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (3.34)$$

na fronteira cinemática Γ_u . Assume-se que o campo de deslocamentos \mathbf{u} é contínuo e tem derivadas suficientemente pequenas para que seja válida a hipótese da linearidade geométrica do campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$. Sendo assim, a equação (3.34) deve ser imposta no modelo numérico, para que se obtenha a solução única para o determinado problema.

Para uma discretização de um corpo, a forma fraca local do domínio ou domínio de quadratura Ω_Q , centralizado em um nó Q , pode ser definido como o subdomínio local daquele nó, podendo este ser circular ou retangular, como mostra a Figura 3.4.

3.3 - CAMPO ELÁSTICO GENERALIZADO (GSMF)

A formulação do campo elástico generalizado segue uma tendência de redução do esforço computacional nos métodos sem malha, eliminando todo o processo de integração numérica

da montagem das matrizes do domínio local, com uma operação realizada apenas no contorno desse domínio, na ausência de forças de corpo. Para tanto, é necessário abordar a descrição matemática dos campos elásticos sob uma nova perspectiva.

Na forma local do teorema do trabalho, equação (3.32), assumiu-se que o campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathbf{u}^* é uma função contínua, o que acarreta em um campo de deformações cinematicamente admissível $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ contínuo, regular e integrável. No entanto, a condição de continuidade dos campos elásticos não é absolutamente obrigatória e pode ser violada, visto que é vantajoso representar $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ em termos de funções generalizadas, no sentido da teoria das distribuições (Gelfand e Shilov, 1964).

Assim, o campo de deslocamentos é representado por uma função contínua segmentada definida em termos da função *Heaviside step function* gerando, conseqüentemente, uma função generalizada correspondente a um campo de deformações definido pela função delta de *Dirac*.

Com o intuito de simplificar as expressões matemáticas, quando se trabalha com funções *Heaviside* e delta de *Dirac* em duas dimensões, considera-se uma função distância escalar d , dada por

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q\| \quad \text{que é} \quad \begin{cases} d = 0 & \text{se } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ d > 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (3.35)$$

que representa a função de valor absoluto da distância entre um ponto \mathbf{x} e um ponto de referência \mathbf{x}_Q , no domínio local $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$ pertencente a um nó Q . Assim, essa definição sempre assume que $d = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) \geq 0$ tem valor positivo, ou nulo toda vez que \mathbf{x} e \mathbf{x}_Q são pontos coincidentes. É importante lembrar que, na equação (3.35), tanto o ponto \mathbf{x} quanto o ponto de referência \mathbf{x}_Q não precisam ser necessariamente pontos nodais do domínio local.

Considerando a função escalar $d \supset d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q)$, a função *Heaviside* pode ser definida como

$$H(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } d \leq 0 \text{ (} d = 0 \text{ para } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q\text{),} \\ 0 & \text{se } d > 0 \text{ que é } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases} \quad (3.36)$$

onde assume-se a descontinuidade em \mathbf{x}_Q . Conseqüentemente, define-se a função delta de *Dirac* com as seguintes propriedades

$$\delta(d) = H'(d) = \begin{cases} \infty & \text{se } d = 0 \text{ que é } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q, \\ 0 & \text{se } d \neq 0 \text{ (} d > 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q\text{)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(d) \, d\Gamma = 1, \quad (3.37)$$

onde $H'(d)$ representa a derivada de $H(d)$ com respeito a d . Note que a derivada de $H(d)$,

com respeito a coordenada x_i , pode ser definida como

$$H(d)_{,i} = H'(d) d_{,i} = \delta(d) d_{,i} = \delta(d) n_i. \quad (3.38)$$

Como o resultado dessa equação não é afetado pelo valor da constante n_i , ela será convenientemente redefinida posteriormente. Considere agora que d_l , d_j e d_k representam a função distância d , definida na equação (3.35), para os correspondentes pontos de colocação \mathbf{x}_l , \mathbf{x}_j e \mathbf{x}_k . Assim, quando as equações (3.35) a (3.37) são consideradas, o campo de deslocamentos cinematicamente admissível pode ser convenientemente definido como

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} H(d_k) \right] \mathbf{e}, \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{e} = [1 \ 1]^T$ representa a métrica da direção ortogonal; n_i , n_t e n_Ω representam o número de pontos de colocação, respectivamente no contorno local $\Gamma_{Qi} = \Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}$ com comprimento L_i , no contorno local estático Γ_{Qt} com comprimento L_t e no domínio local Ω_Q com área S . Esse campo de deslocamentos definido $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, é um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos pontos de colocação, esquematicamente representado na Figura 3.5.

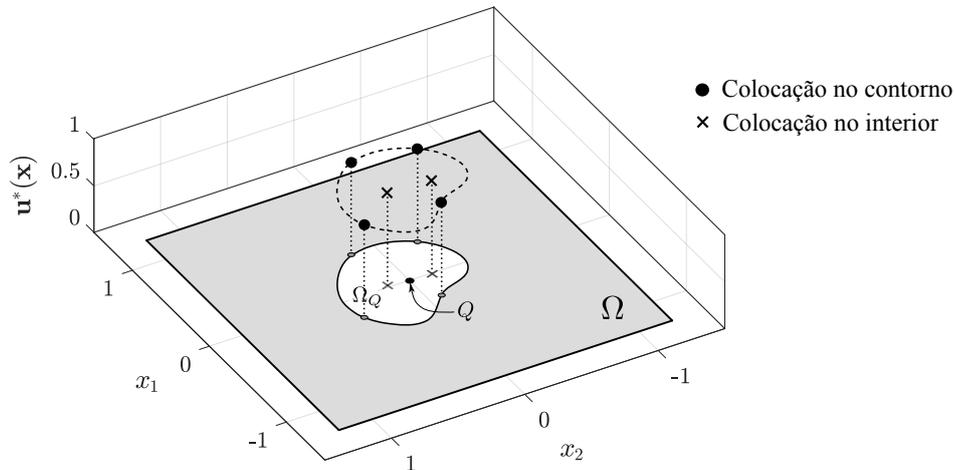


Figura 3.5 – Esquema representando o deslocamento $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, dado pela equação (3.39), um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos pontos de colocação, da formulação do GSMF, para um domínio local arbitrário associado ao nó Q .

Sendo assim, quando a equação (3.38) é considerada, o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})$ pode

ser dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= \left[\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{L} H(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{L} H(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{L} H(d_k) \right] \mathbf{e} = \\ &= \left[\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \delta(d_l) \mathbf{n}^T + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \delta(d_j) \mathbf{n}^T + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \delta(d_k) \mathbf{n}^T \right] \mathbf{e},\end{aligned}\quad (3.40)$$

onde \mathbf{n} é dado pela equação (3.21), com as componente arbitrárias n_i que serão definidas posteriormente.

Tendo definido os deslocamentos e as componentes da deformação do campo cinematicamente admissível, respectivamente as equações (3.39) e (3.40), o teorema local do trabalho, equação (3.32), pode ser escrito como

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega \quad (3.41)$$

resultando em

$$\begin{aligned}\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T H(d_l) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T H(d_j) \mathbf{e} d\Gamma + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T H(d_k) \mathbf{e} d\Omega = \\ = \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \delta(d_k) \mathbf{n}^T \mathbf{e} d\Omega.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Considerando as propriedades da função *Heaviside*, definidas na equação (3.36), a equação (3.42) resulta em

$$\mathbf{e}^T \left[\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{n} \int_{\Omega_Q} \delta(d_k) \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

que, após considerar as propriedades seletivas da função delta de *Dirac*, resulta em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} - \frac{S}{n_\Omega} \mathbf{n} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}_k} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}. \quad (3.44)$$

Finalmente, quando a variável \mathbf{n} , dada pela equação (3.21), é arbitrariamente definida com componentes nulas $n_i = 0$, como apresentado na equação (3.38), a equação (3.44) resulta

em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{x_l} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{x_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{x_k}. \quad (3.45)$$

A equação (3.45) demonstra o equilíbrio das forças de superfície e das forças de corpo, pontualmente definida nos pontos de colocação, como demonstra a Figura 3.6; que na

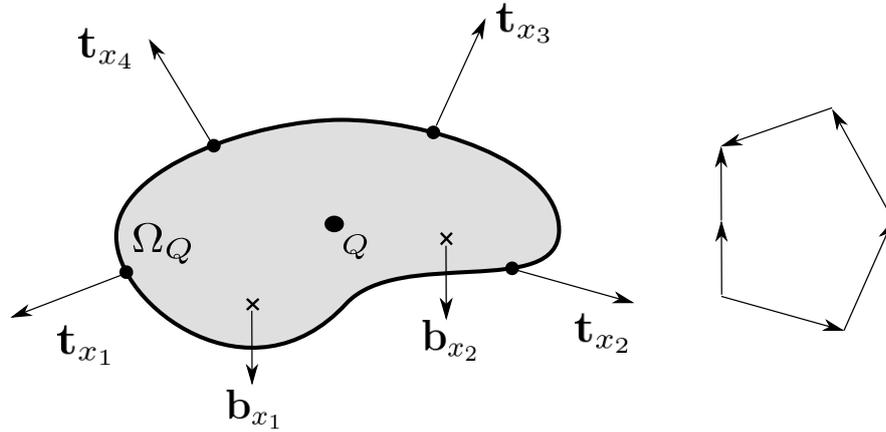


Figura 3.6 – Esquema representando o equilíbrio das forças de corpo e forças de superfície, da equação (3.45), pontualmente definidas nos pontos de colocação de um domínio local associado ao nó Q , da formulação do GSMF.

verdade é equivalente à versão pontual do princípio das tensões de Euler e Cauchy. Essa é a equação utilizada na formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local ou *Generalized-Strain Mesh-free formulation* (GSMF), que é livre de integração numérica. Como o teorema do trabalho é a forma fraca advinda dos resíduos ponderados, é facilmente perceptível que essa formulação nada mais é do que uma colocação na forma fraca. A colocação na forma fraca supera as dificuldades conhecidas da colocação na forma forte, como baixa precisão e instabilidade da solução, o que torna esta uma formulação confiável e robusta.

Discretiza-se a equação (3.45), introduzindo-se as equações do campo elástico, dada pelas equações (3.15) a (3.21), gerando um sistema linear de duas equações referentes ao nó $Q \in \Omega_Q$ em função das incógnitas nodais $\hat{\mathbf{u}}$

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{x_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{x_l} \hat{\mathbf{u}} = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{x_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{x_k} \quad (3.46)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q, \quad (3.47)$$

onde \mathbf{K}_Q é a matriz de rigidez nodal do domínio local Ω_Q , uma matriz $2 \times 2n$ dada por

$$\mathbf{K}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \quad (3.48)$$

e \mathbf{F}_Q , é o respectivo vetor de forças dado por

$$\mathbf{F}_Q = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k} \quad (3.49)$$

A equação (3.47) é aplicada aos M domínios internos, gerando um sistema global $2M \times 2N$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (3.50)$$

Finalmente, para um nó no contorno cinemático, uma interpolação direta pode ser utilizada para impor as condições de contorno como

$$\mathbf{u}_k = \Phi_k \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (3.51)$$

com $k = 1, 2$, onde $\bar{\mathbf{u}}_k$ é a componente do deslocamento nodal prescrito. A equação (3.51) é diretamente adicionada no sistema global, equação (3.50).

3.4 - COMPORTAMENTO DA FORMA FRACA LOCAL

O método sem malha local apresentado na presente pesquisa pode ser utilizado para a solução de problemas no âmbito da elasticidade geral. Apesar disso, a forma fraca local dessa formulação, dado pela equação (3.45), não descreve uma equação variacional que surge como uma condição necessária para a minimização de um funcional, como visto na teoria geral do cálculo variacional. Consequentemente, uma análise do ponto de vista matemático se torna bem complexa e trabalhosa, porque as propriedades inerentes como definição positiva e simetria da matriz de rigidez não são válidas e, sendo assim, não existe minimização da energia embutida nas formulações. Dessa forma, a análise matemática da formulação do método sem malha local não consegue acompanhar exatamente a teoria dos elementos finitos.

A dependência Contínua de soluções baseadas em dados por meio de testes é geralmente a estratégia adotada nas análises e assim, a forma fraca local (3.45) é vista como um sistema de equações (3.50). Em geral, esses testes trabalham com as combinações lineares das funções teste para obter um número de equações para os coeficientes dos MQM. Em particular, os testes realizados com a forma fraca local analisam cada equação separadamente e consideram

diferentes soluções possíveis. A análise matemática desses testes é complexa porque, devido ao uso de uma quantidade finita de equações teste, é necessário garantir que a solução aproximada esteja próxima da solução real em todo o domínio do problema. A teoria matemática necessária para superar esse efeito da discretização é um grande desafio e está muito além do escopo da presente pesquisa (Schaback, 2010).

Sendo assim, testes padrões populares e condições consistentes devem ser usados para analisar essas formulações, assim como são realizados no MEF. O *patch test* se tornou uma ferramenta amplamente utilizada na verificação e validação dos métodos sem malha. A ideia é que as formulações locais sejam capazes de resolver problemas simples com exatidão. O teste aplica forças de contorno a uma região nodal local e verifica se as respostas dessa região condizem com o estado constante de tensão. Uma vez que as formulações locais do método sem malha passem no teste com consistência e estabilidade numérica, a convergência é garantida à medida que a discretização dos nós se torna mais refinada.

É importante analisar o comportamento da forma fraca local (3.45) do GSMF, juntamente com outro método sem malha local similar, como a formulação de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local ou *Rigid-Body Displacement Mesh-Free formulation* (RBDMF), apresentada por Oliveira e Portela (2016), e o método *Integrated Local Mesh Free* (ILMF), apresentado por Oliveira et al. (2019); para um estado de tensão em particular. Considere, apenas por questão de simplicidade, o caso de um domínio local retangular Ω_Q , com dimensões $L \times L$, sob um estado de tensão constante e uniforme que resulta em uma carga constante t ao longo de cada lado do contorno Γ_Q do domínio local, como apresentado na Figura 3.7. Ao longo de cada lado L , do contorno do domínio local, a forma fraca do

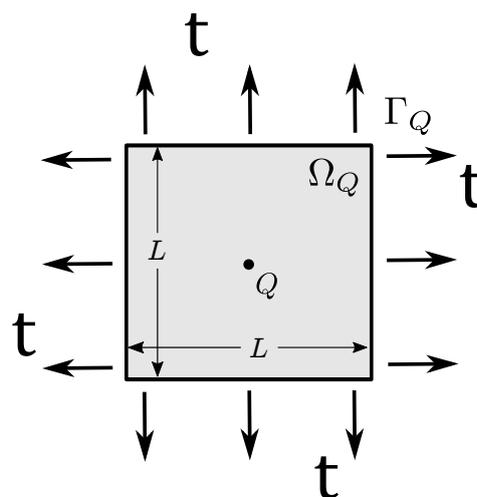


Figura 3.7 – Domínio local interno Ω_Q , com dimensões $L \times L$, sob carregamento constante t , ao longo de cada lado do contorno Γ_Q ; a equação da forma fraca local da integração de contorno do RBDMF é idêntica as equações da forma fraca local do contorno de colocação do GSMF.

RBDMF é calculada como quadratura de Gauss com um número qualquer de pontos de Gauss (neste caso um) levando a

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t} \, d\Gamma = L\mathbf{t} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Já a forma fraca local (3.45) do GSMF, é calculada como

$$\frac{L}{n} \sum_{l=1}^n \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = L\mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (3.53)$$

para um número n de pontos de colocação definidos no contorno do domínio local. Nota-se que esse processo pode ser visto como uma forma de quadratura de Gauss, com pesos unitários e pontos de Gauss arbitrários, o que o torna similar a equação (3.52). Como as equações (3.52) e (3.53) são idênticas, elas serão apenas similares para um estado de tensão arbitrário não constante, dependendo do número e da posição dos pontos de colocação no contorno. Para uma mesma precisão, a colocação no contorno da forma fraca local do GSMF é, em geral, bem mais eficiente que a integração de contorno da forma fraca local do RBDMF, como pode ser observado nos resultados numéricos apresentados em Oliveira e Portela (2017).

4 - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Este capítulo contém informações pertinentes à implementação dos conceitos relacionadas à mecânica da fratura linear elástica na formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local (GSMF), apresentada anteriormente. Os diferentes métodos para simular a descontinuidade são apresentados juntamente com a técnica da subtração da singularidade, ambos usados na análise de crescimento de trincas.

4.1 - MÉTODO DA VISIBILIDADE, DA DIFRAÇÃO E DA TRANSPARÊNCIA

Existem basicamente quatro abordagens para se modelar descontinuidade nos métodos sem malha, sendo: (i) modificação das funções ponderadoras de forma intrínseca, como o método da visibilidade, da difração e da transparência; (ii) modificação de bases intrínsecas para incorporar funções especiais; (iii) métodos baseados no enriquecimento extrínseco dos mínimos quadrados móveis (MQM); e (iv) métodos baseados no enriquecimento extrínseco do método de partição da unidade.

O método dos mínimos quadrados móveis (MQM) usado no GSMF permite que o número de bases polinomiais seja independente do número de graus de liberdade. Dessa forma, o campo pode ser enriquecido de forma intrínseca, sem a adição de variáveis extras, o que é desejável do ponto de vista computacional. Outra vantagem do enriquecimento intrínseco é que ele elimina o problema do mau condicionamento no cálculo da matriz de rigidez.

Uma das formas mais simples de realizar esse procedimento é o método da visibilidade, apresentado por Belytschko et al. (1994b), onde o domínio local é truncado na face de uma trinca. O domínio local de um nó é restringido para as áreas do domínio visíveis pelo nó, com a face da trinca funcionando como uma barreira opaca. Se uma linha entre o nó e o ponto de interesse intersectar uma trinca, e se a ponta da trinca estiver contida no domínio local daquele nó, o nó não terá influência sobre aquele ponto; em termos matemáticos, a linha entre aquele ponto e o nó é modificada para

$$d_i = \infty . \quad (4.1)$$

Por exemplo, considere um domínio local intersectado por uma trinca, como o da Figura 4.1. O domínio local do nó x_i é truncado por essa trinca, e apenas a área mais escura está incluída no domínio de influência daquele nó. Aqueles nós que se encontram no lado oposto da

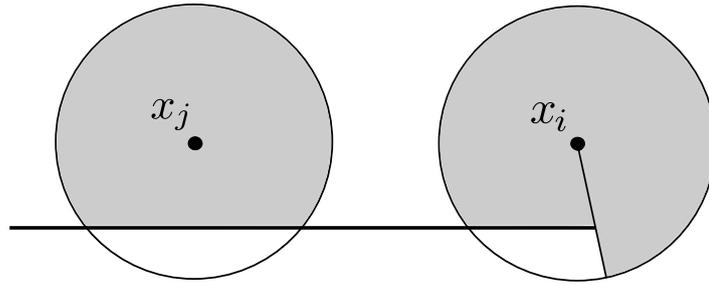


Figura 4.1 – Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca, e um nó x_j , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da visibilidade.

trinca são excluídos da aproximação do campo de descolamentos. Esse truncamento irá criar uma descontinuidade na função de forma do nó x_i e assim resultar em um deslocamento descontínuo através da trinca. Para o nó próximo à ponta da trinca, como o nó x_j , algumas dificuldades surgem, tendo em vista que uma descontinuidade adicional indesejada talvez seja produzida por esse método. Apesar disso, Krysl e Belytschko (1997) mostrou que o método, mesmo assim, resulta em soluções convergentes.

Uma abordagem alternativa é o método da difração, apresentado por Belytschko et al. (1996), onde ao invés de utilizar um truncamento total, o domínio local pode difratar ou deformar ao redor da ponta da trinca, em que a distância é definida como o caminho difratado entre o ponto de interesse e o nó. Por exemplo, como demonstrado na Figura 4.2, se a linha $r_0(x)$,

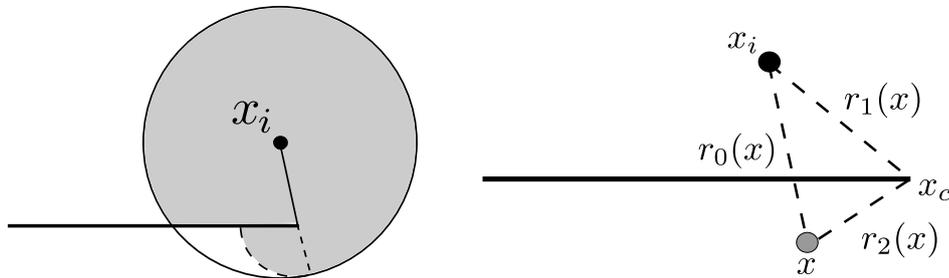


Figura 4.2 – Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da difração.

que junta o ponto de interesse x e o nó x_i , se intersectar com a face da trinca e a ponta da trinca estiver contida no domínio local daquele nó, então a distância $d_i(x)$, na equação (3.13), será modificada para

$$d_i = \left(\frac{r_1 + r_2(x)}{r_0(x)} \right)^\lambda r_0(x), \quad (4.2)$$

onde $r_1 = |x_i - x_c|$ é independente de x , as igualdades $r_2 = |x - x_c|$ e $r_0 = |x - x_i|$ são válidas, x_c é a coordenada da ponta da trinca e λ é o parâmetro de dilatação, que controla a distância $w_i(\mathbf{x})$ no lado oposto da trinca. Bons resultados podem ser obtidos quando $1 \leq \lambda \leq 1.5$, como pode ser visto em Belytschko et al. (1996).

Esse método é um aperfeiçoamento do método da visibilidade, retirando as discontinuidades indesejadas próximas à ponta da trinca. Apesar de ser conceitualmente simples, o método da difração se torna computacionalmente complexo para trincas não planares em 3D ou múltiplas trincas em 2D e 3D.

O método da transparência foi desenvolvido como uma alternativa para o método da difração, desenvolvido por Organ et al. (1996), criado especialmente para ser computacionalmente mais fácil de implementar em problemas tridimensionais. No método da transparência, a trinca é transparente próxima à ponta da trinca, assim como mostra a Figura 4.3, necessitando

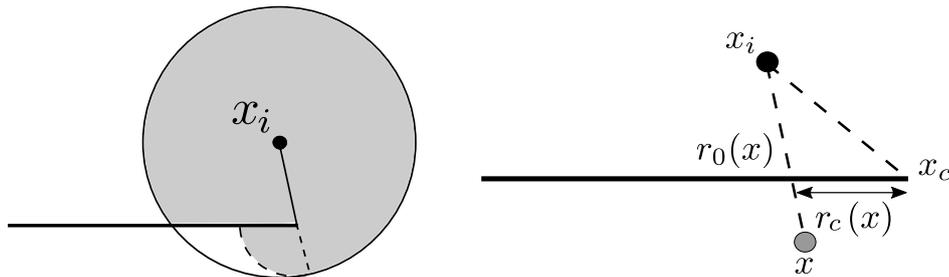


Figura 4.3 – Domínio local de um nó x_i , truncado na face de uma trinca e próximo à ponta da trinca, para o método da transparência.

de uma condição adicional imposta nos nós próximos a trinca. Como o ângulo entre a trinca e a linha que liga o nó até a ponta da trinca é pequeno, ocorre um gradiente acentuado nas funções ponderadoras, através da linha à frente da trinca. Buscando reduzir esse efeito, Organ et al. (1996) impôs que todos os nós devem ter uma distância mínima em relação à face da trinca.

4.2 - TÉCNICA DA SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE

A técnica da subtração da singularidade ou *singularity subtraction technique (SST)* é uma técnica muito eficiente e precisa na análise de placas com a presença de trincas em modo misto, que realiza o cálculo direto do fator de intensidade de tensão. A técnica da subtração da singularidade será propriamente introduzido no GSMF nessa seção, sendo implementada pela primeira vez em um método sem malha.

Uma das principais vantagens dessa técnica é que ela regulariza por completo o campo elástico, por meio da subtração das singularidades existentes na ponta de todas as trincas, antes que a análise numérica seja realizada, o que adiciona o fator de intensidade de tensão como uma variável primária do modelo numérico. Como essa formulação elimina a singularidade da ponta da trinca do problema, a análise numérica usando o GSMF é realizada apenas no campo regularizado, o que resulta em soluções altamente precisas e sem problemas de convergência.

4.2.1 - Campo elástico original

Seja Ω um domínio bidimensional com uma trinca plana e com contorno definido por $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Considera-se um campo elástico na ausência de forças de corpo, que satisfaça a condição de equilíbrio

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.5)$$

válido no domínio Ω , com as condições de contorno

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad (4.6)$$

no contorno cinemático Γ_u e

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad (4.7)$$

no contorno estático Γ_t ; onde o vetor $\boldsymbol{\sigma}$ representa as componentes de tensão, \mathbf{L} é o operador de derivadas matricial, o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa o campo de deformações, \mathbf{D} é a matriz contendo as constantes elásticas, o vetor \mathbf{u} representa as componentes dos deslocamentos, $\bar{\mathbf{u}}$ os valores dos deslocamentos prescritos, o vetor \mathbf{t} representa as componentes das forças superficiais, $\bar{\mathbf{t}}$ são valores das forças superficiais prescritas e \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno Γ .

4.2.2 - Campo elástico regularizado

Em virtude das dificuldades que surgem em modelar numericamente problemas elastoestáticos com campos singulares, cujo campo de tensões é singular nos arredores da ponta da trinca, é conveniente subtrair essa singularidade do problema original, antes mesmo de realizar a análise com o método sem malha local.

Considere, então o caso de uma placa qualquer com m pontas de trinca e que esse campo elástico possui comportamento linear, onde o princípio da superposição é válido, e com isso podemos decompor esse campo em uma parte regular (R) e outra singular (S), como pode ser visto em

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{S_1} - \dots - \sigma_{ij}^{S_m}) + (\sigma_{ij}^{S_1} + \dots + \sigma_{ij}^{S_m}) = \sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^S \quad (4.8)$$

e

$$u_i = (u_i - u_i^{S_1} - \dots - u_i^{S_m}) + (u_i^{S_1} + \dots + u_i^{S_m}) = u_i^R + u_i^S, \quad (4.9)$$

onde $\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{S_1} - \dots - \sigma_{ij}^{S_m}$ e $u_i^R = u_i - u_i^{S_1} - \dots - u_i^{S_m}$ são as componentes regulares, respectivamente, do campo de tensões e de deformações do problema original; $\sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^{S_1} + \dots + \sigma_{ij}^{S_m}$ e $u_i^S = u_i^{S_1} + \dots + u_i^{S_m}$ são, respectivamente, as componentes do campo de tensões e deformações da solução particular do problema original, representando o campo elástico singular. Se as funções apropriadas forem escolhidas para esse campo singular particular, então, as equações (4.8) e (4.9) regularizam completamente o problema original, tendo em vista que as componentes de tensão σ_{ij}^R são não singulares agora. A análise do problema elástico agora pode ser realizada apenas no campo regular, representada pelas componentes σ_{ij}^R e u_i^R , uma consequência do processo de regularização. As componentes σ_{ij}^S e u_i^S do campo singular automaticamente satisfazem as equações de campo, porque elas são definidas como a solução particular do problema original. Dessa forma, as equações elásticas (4.3) a (4.5) podem ser escritas como

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{L} \mathbf{u}^R \quad (4.11)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^R, \quad (4.12)$$

no domínio Ω , com condições de contorno

$$\mathbf{u}^R = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^S \quad (4.13)$$

no contorno cinemático Γ_u e

$$\mathbf{t}^R = \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S \quad (4.14)$$

no contorno estático Γ_t .

É importante observar que esse campo elástico regularizado é governado pelas mesmas equações do campo original, exceto pela condição de contorno (4.13) e (4.14), onde os termos adicionais \mathbf{u}^S e \mathbf{t}^S , estão agora, respectivamente, inclusos. Esses termos adicionais, componentes de uma solução particular do problema original, representam o campo elástico singular.

4.2.3 - Solução particular singular de Williams

A solução particular utilizada nas equações (4.8) e (4.9), definidas pelas componentes σ_{ij}^S e u_i^S , representam o campo elástico singular nos arredores da ponta da trinca. O primeiro

termo da série de expansão de William, para um entalhe semi-infinito (*semi-infinite edge crack*), é considerado. As componentes de tensão são dadas pelas equações (2.67) a (2.69) e os deslocamentos associados são dados pelas equações (2.70) e (2.71). O sistema de coordenadas polares (r, θ) é centralizado na ponta da trinca, de forma que $\theta = 0$ é o eixo da trinca, à frente da ponta da trinca, como apresentado na Figura 2.9. Note que o campo de tensões é da ordem de $r^{-1/2}$, que se torna singular à medida que r tende a zero. Vale ressaltar, também, que o campo de deslocamentos não inclui termos de corpo rígido, dessa forma, resultando em componentes nulas na ponta da trinca.

Caicedo e Portela (2015) demonstraram que o primeiro termo da série de expansão de Williams, a partir da ponta de um entalhe, também pode ser utilizado para representar o campo elástico ao redor da ponta da trinca, onde a tensão singular é dominante, para o caso de múltiplas trincas internas planas em uma placa infinita, sob deformação em modo misto. Dessa forma, a estratégia de modelagem da técnica da subtração da singularidade, que é baseada na superposição do campo elástico de Williams em cada ponta de trinca, pode ser usada para lidar com várias trincas simultaneamente.

O campo de tensões singular, definido pelas equações (2.67) a (2.69), é usado para definir as componentes das forças de superfície no contorno como

$$\mathbf{t}^S = \begin{bmatrix} t_1^S \\ t_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^S & \sigma_{21}^S \\ \sigma_{12}^S & \sigma_{22}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \mathbf{g} \mathbf{k}, \quad (4.15)$$

onde n_i denota a componente do vetor unitário normal ao contorno e as funções $g_{ij} = g_{ij}(r^{-1/2}, \theta)$ são introduzidas na equação como uma notação conveniente advinda das equações (2.67) a (2.69) e o vetor \mathbf{k} contém o fator de intensidade de tensão. Para o caso de uma placa com m pontas de trinca, com a equação (4.15) válida para cada ponta de trinca, o princípio da superposição resulta em

$$\mathbf{t}^S = \mathbf{g}_1 \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{g}_m \mathbf{k}_m. \quad (4.16)$$

De forma similar, o campo de deslocamentos, equações (2.70) e (2.71), pode ser definido como um vetor

$$\mathbf{u}^S = \begin{bmatrix} u_1^S \\ u_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \mathbf{f} \mathbf{k}, \quad (4.17)$$

onde as funções $f_{ij} = f_{ij}(r^{1/2}, \theta)$ são introduzidas na equação como uma notação conveniente das equações (2.70) e (2.71). Para o caso de uma placa com m pontas de trinca, com a equação (4.17) válida para cada ponta de trinca, a componente singular é dada por

$$\mathbf{u}^S = \mathbf{f}_1 \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{f}_m \mathbf{k}_m. \quad (4.18)$$

4.2.4 - Análise com a formulação do campo elástico generalizado (GSMF)

Tendo em vista que a solução formal do modelo elástico regularizado, definida pelas equações de campo (4.10) a (4.12), com condições de contorno (4.13) e (4.14), não pode ser obtida para problemas práticos, uma discretização deve ser utilizada para se obter a solução aproximada.

A análise utilizando a formulação do campo elástico generalizado (GSMF) do método sem malha local é realizada em termo das variáveis regularizadas u_i^R . Temos que a formulação do campo elástico generalizado, dado pela equação (3.45), na ausência de forças de corpo, pode ser escrita como

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l}^R = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S)_{\mathbf{x}_j}. \quad (4.19)$$

A equação (3.45) e conseqüentemente, a equação (4.19), demonstram o equilíbrio das forças de superfície e as forças de corpo, pontualmente definidas nos pontos de colocação, obtidas no contorno do domínio local, onde a equação dos resíduos ponderados está definida.

Discretiza-se a equação (4.19), introduzindo-se as equações do campo elástico, dada pelas equações (3.15) a (3.21), gerando um sistema linear de três equações referentes ao nó $Q \in \Omega_Q$ em função das incógnitas nodais $\hat{\mathbf{u}}$, resultando em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \hat{\mathbf{u}} - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_j}^S = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j}, \quad (4.20)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}}^R + \mathbf{G}_{Q1} \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{G}_{Qm} \mathbf{k}_m = \mathbf{P}_Q, \quad (4.21)$$

onde \mathbf{K}_Q é a matriz de rigidez nodal do domínio local Ω_Q , uma matriz $2 \times 2n$, onde n é o número de nós incluídos no domínio de influência do nó Q , dada por

$$\mathbf{K}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l}, \quad (4.22)$$

\mathbf{G}_{Qm} , com m pontas de trinca, é a respectiva matriz nodal $2n \times 2$ contendo as funções de Williams e \mathbf{k}_m é o vetor contendo os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , dados por

$$\mathbf{G}_{Qm} \mathbf{k}_m = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_j}^S = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e \mathbf{P}_Q , é o respectivo vetor de forças dado por

$$\mathbf{P}_Q = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{x_j}. \quad (4.24)$$

Vale ressaltar, para o caso dos nós interiores, que as matrizes \mathbf{G}_{Qm} e o vetor \mathbf{P}_Q são nulos.

Para os $N - M$ nós no contorno cinemático, uma interpolação direta pode ser utilizada para impor as condições de contorno como

$$\mathbf{u}_Q^R = \mathbf{\Phi}_Q \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_Q - \mathbf{u}_Q^S = \bar{\mathbf{u}}_Q - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}'_Q \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{Q1} \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{F}_{Qm} \mathbf{k}_m = \mathbf{U}_Q, \quad (4.26)$$

onde \mathbf{K}'_Q corresponde a matriz nodal contendo $\mathbf{\Phi}_Q$, \mathbf{F}_Q é a matriz contendo as funções de Williams e \mathbf{U}_Q é o vetor contendo os deslocamentos nodais prescritos. A equação (4.21) é aplicada aos M domínios internos e contornos estáticos, gerando um sistema

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{G} \mathbf{k} = \mathbf{P}, \quad (4.27)$$

enquanto a equação (4.26) é aplicada aos M contornos cinemáticos, gerando um sistema

$$\mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{F} \mathbf{k} = \mathbf{U}, \quad (4.28)$$

que juntos formam o sistema global $2(M + 2) \times 2N$ de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{K}' & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Destaca-se que esse sistema global de equações adiciona duas novas variáveis, sendo elas os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , representadas pelo vetor $\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_m$, para cada ponta de trinca. Consequentemente, para que se tenha um problema bem condicionado com uma solução única, devemos especificar duas restrições (*constraints*) adicionais, necessitando-se de uma para cada modo de deformação incluído na análise.

4.2.5 - Equações adicionais

Restrições adicionais podem ser especificadas de várias formas, embora elas tenham que resultar no cancelamento da singularidade no campo regularizado, introduzido nas equações (4.8) e (4.9). A forma mais simples de se garantir essa condição é considerar que o campo de tensões é nulo na ponta da trinca, ou seja

$$\sigma_{ij}^R = \mathbf{0} \rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^S, \quad (4.30)$$

que garante que o campo elástico original é singular na ponta da trinca.

Dessa forma, como o problema é formulado em termos das componentes do deslocamento regularizado u_i^R , as restrições adicionais devem ser definidas em termos das componentes nodais incluídas no vetor de variáveis $\hat{\mathbf{u}}$, para que sejam efetivas. De certa maneira, a condição (4.30) não é definida em termos dessas componentes, u_i^R e $\hat{\mathbf{u}}$, e sendo assim, não pode ser utilizada simplesmente na forma como está, necessitando de tratamento para satisfazer de forma efetiva as restrições exigidas pela equação (4.29). Para superar essa dificuldade, a condição (4.30) primeiramente deve ser reescrita em termos das respectivas componentes das forças de superfície, definidas na ponta da trinca como

$$\mathbf{t}_t^R = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}^S, \quad (4.31)$$

onde o vetor \mathbf{n} representa as componentes unitárias normais as faces da trinca, assim como esta esquematicamente representado na Figura 4.4. Essa equação resulta em

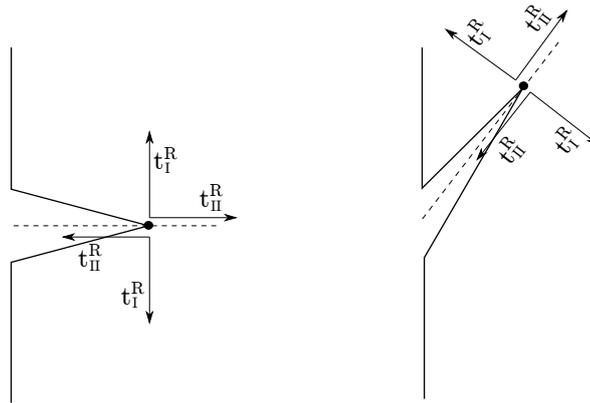


Figura 4.4 – Componentes das forças de superfície de um campo elástico regularizado na ponta de uma trinca.

$$\mathbf{t}_t^R = (\mathbf{nDB})_t \hat{\mathbf{u}}^R = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

onde

$$\mathbf{t}_t = (\mathbf{nDB})_1 \cdots (\mathbf{nDB})_m. \quad (4.33)$$

Com a introdução das restrições adicionais (4.32), para m pontas de trinca, o sistema de equações (4.29) resulta no sistema global $(2M + 2m) \times (2N + 2m)$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{K}' & \mathbf{F} \\ \hline \mathbf{t}_t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

que agora pode ser resolvido.

5 - OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO DOS MÉTODOS SEM MALHA

Neste capítulo serão abordados os principais aspectos referentes à implementação do algoritmo de otimização dos parâmetros adimensionais, usando algoritmo genético. As funções objetivo, ligadas a cada um dos parâmetros de discretização, são definidas juntamente com a metodologia de implementação do algoritmo.

5.1 - PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO

Para cada nó de uma discretização utilizando o método sem malha, o tamanho r_{Ω_s} do suporte compacto Ω_s , onde as funções de forma dos MQM estão definidas; e o tamanho r_{Ω_q} do domínio de colocação Ω_q , onde o teorema do trabalho é definido, são parâmetros muito importantes que afetam de forma significativa o comportamento dos métodos sem malha locais. Para um nó genérico i de uma discretização sem malha, ambos os parâmetros podem ser definidos como

$$r_{\Omega_s} = \alpha_s c_i \quad (5.1)$$

e

$$r_{\Omega_q} = \alpha_q c_i, \quad (5.2)$$

em que c_i representa a distância do nó i até o nó mais próximo em sua vizinhança, enquanto α_s e α_q são os parâmetros adimensionais constantes que precisam ser definidos para qualquer aplicação do método.

Para garantir uma alta precisão na modelagem utilizando métodos sem malha locais, os parâmetros de discretização adimensionais, α_s e α_q , definidos nas equações (5.1) e (5.2), precisam ser apropriadamente refinados para que valores apropriados de r_{Ω_s} e r_{Ω_q} sejam obtidos. Em geral, esses valores adimensionais são definidos arbitrariamente e geralmente $\alpha_s > 1.0$ e $\alpha_q < 1.0$ são considerados. De certa forma, para valores muito pequenos de r_{Ω_s} , o algoritmo da aproximação por MQM pode ser singular, impossibilitando a construção das funções de forma por falta de nós em Ω_s para a interpolação. Por outro lado, o domínio de colocação local Ω_q pode intersectar outros domínios de colocação, embora o tamanho r_{Ω_q} deva garantir que o domínio local dos nós internos esteja inteiramente dentro do domínio da solução, sem intersectar o contorno do problema.

Os parâmetros de discretização desempenham papéis diferentes nos métodos sem malha

locais, que podem ser definidos como:

- O suporte compacto de cada nó determina diretamente o tamanho do domínio de influência de seu respectivo nó. O domínio de influência é completamente definido pelo número total de nós usado para construir as funções de forma daquele nó, para assim realizar a aproximação das variáveis de campo. Por essa razão o parâmetro α_s é primariamente ligado à precisão da modelagem.
- O tamanho do domínio de colocação local de cada nó, onde a forma local do teorema do trabalho está definida, é usado para construir a matriz de rigidez daquele nó e, dessa forma, deve estar inteiramente no interior do domínio, sem intersectar o contorno do corpo. Com isso, demonstra-se a ligação do parâmetro de discretização α_q com a eficiência da modelagem.

Historicamente, esses parâmetros, α_s e α_q , são definidos heurísticamente e seus respectivos valores, dependem basicamente do método sem malha utilizado e da distribuição nodal adotada. Na presente pesquisa, os valores apropriados dos parâmetros de discretização, definidos pela equação (5.1) e (5.2), respectivamente, serão obtidos automaticamente por meio de uma rotina multi-objetiva de otimização, usando algoritmo genético.

5.2 - FUNÇÕES OBJETIVO

No presente capítulo serão apresentadas as principais funções objetivo utilizadas na técnica de otimização, conforme descrito em 2.8, que será apresentada posteriormente.

5.2.1 - Parâmetro dos Mínimos Quadrados Móveis

A definição da função objetivo tem um impacto profundo no comportamento do processo de otimização. Considerando as características do parâmetro de otimização do MQM α_s , apresentado na seção (5.1), se faz necessário definir uma função objetivo que possa controlar a precisão do modelo numérico, não importando o estado do campo elástico totalmente admissível do corpo. Sabendo disso, é conveniente que a função objetivo esteja intimamente ligada com a energia potencial total do campo elástico totalmente admissível presente no corpo. O teorema clássico da energia potencial total afirma que a energia potencial total presente no campo elástico real, que estabelece o corpo, deve ser mínima, partindo do princípio que a solução analítica do campo elástico não é conhecida, buscando assim, garantir uma boa precisão no modelo numérico.

Para qualquer estado do campo elástico totalmente admissível de um corpo, a energia potencial total, dado pela equação (2.27), pode ser manipulada por meio da energia de deformação U , dado pela equação (2.28), e a energia potencial P , dos carregamentos externos, dados pela equação (2.29).

Considerando a forma local do teorema do trabalho, dado pela equação (3.32), mas agora aplicada ao domínio global do corpo, para o caso do campo elástico que realmente estabelece o corpo, pode-se facilmente demonstrar que $P = -2U$, e dessa forma $T = -U$ e $T = P/2$. Esses resultados demonstram que o valor mínimo para a energia potencial total de um corpo corresponde a duas possibilidades:

- O valor máximo para a energia de deformação U e
- O valor mínimo para energia potencial P .

Para avaliar a energia de deformação U de um corpo, se faz necessário computar todos os valores nodais do campo de tensões, o que é computacionalmente ineficiente, tendo em vista que requer o cálculo das derivadas das funções de forma, que pode degenerar a precisão numérica. Por outro lado, para avaliar a energia potencial P , se faz necessário computar o campo de deslocamentos apenas nos nós do contorno estático, aqueles com carregamento não nulo aplicado, que é computacionalmente eficiente, tendo em vista que é calculado apenas para alguns nós e não requer o cálculo da derivada das funções de forma.

Por fim, uma função objetivo eficiente pode ser definida como a conformidade estrutural (*compliance*) C , definida como

$$C = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\Gamma = -\frac{1}{2}P. \quad (5.3)$$

Sendo assim, o valor mínimo da energia potencial P corresponde ao valor máximo de $-C$, que é equivalente ao valor mínimo de C .

5.2.2 - Parâmetro do Domínio Local

Outra função objetivo pode ser definida, agora para controlar a eficiência do modelo numérico, levando em consideração as características do parâmetro do domínio local de colocação α_q , presente na seção 5.1, onde a colocação de contorno será realizada. Sabendo disso, é conveniente que a função objetivo seja aquela cuja combinação da área do domínio local de colocação de cada nó, em uma discretização sem malha, seja o mais próximo possível da área total do domínio do corpo. Nesse processo, os nós internos não podem

intersectar o contorno global, embora possa haver sobreposição desses domínios se necessário.

A função objetivo pode ser definida como a área do domínio local resultante dada por

$$A_q = \sum_{l=1}^n \frac{A_{\Omega_q}}{\Omega_q}, \quad (5.4)$$

no qual A_{Ω_q} considera a equação (5.2) para calcular a área do subdomínio de colocação de cada nó e Ω_q é a área total da solução do problema, para os n nós da distribuição nodal que discretizam o corpo.

Como o domínio local, na maioria dos casos, possui uma forma regular arbitrária, sendo esta retangular ou circular, a eficiência da aproximação depende da geometria do problema em questão. Essa desvantagem aparente pode ser facilmente superada adicionando-se mais nós na distribuição nodal, da mesma forma que é feito com métodos numéricos tradicionais, quando enfrentam dificuldades similares.

Valores mínimos para a equação (5.4) efetivamente correspondem à área do domínio do corpo que melhor representa a forma fraca global do problema em questão, ao geometricamente combinar as áreas da forma fraca local de cada um dos nós que representam esse corpo.

Vale ressaltar que A_{Ω_q} geralmente assume um formato retangular ou circular para a maioria das aplicações com métodos sem malha, enquanto que a geometria do problema, dado por Ω_q , é inteiramente arbitrária. Dessa forma, a geometria do problema e do domínio local usada na aproximação influencia diretamente na eficiência do algoritmo.

5.3 - FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO

O objetivo da otimização de problemas numéricos é minimizar a função objetivo do modelo considerando o GSMF em sua análise, o que gera diferentes resultados, dependendo da função escolhida, encontrando valores ótimos dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha α_s e/ou α_q de forma que esses satisfaçam as restrições geométricas do problema. Nessa, pesquisa três esquemas de otimização são apresentados: o primeiro, baseado no erro relativo; o segundo, baseado na conformidade estrutural e o último baseado no domínio local; cada um deles considerando diferentes funções objetivo e parâmetros de otimização. A formulação matemática correspondente à primeira otimização multi-objetiva pode ser

descrita como

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && r_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_q) \\
& && r_u(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_q) \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{e}(\boldsymbol{\alpha}_s) = \alpha_s^{\min} \leq \alpha_s \leq \alpha_s^{\max} \\
& && \mathbf{e}(\boldsymbol{\alpha}_q) = \alpha_q^{\min} \leq \alpha_q \leq \alpha_q^{\max} \\
& \text{onde} && \boldsymbol{\alpha}_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn}) \in \boldsymbol{\alpha} \\
& && \boldsymbol{\alpha}_q = (\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots, \alpha_{qn}) \in \boldsymbol{\alpha} ,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde r_ε e r_u são, respectivamente, o erro relativo de energia e de deslocamento, apresentados na seção 6.3; $\alpha_s^{\min}/\alpha_q^{\min}$ e $\alpha_s^{\max}/\alpha_q^{\max}$ que denotam os limites mínimos e máximos permitidos para os parâmetros de discretização sem malha α_s e α_q , respectivamente. Para o segundo esquema de otimização multi-objetiva, a formulação matemática pode ser descrita como

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && C(\boldsymbol{\alpha}_s) \\
& && \text{CPU time}(\boldsymbol{\alpha}_s) \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{e}(\boldsymbol{\alpha}_s) = \alpha_s^{\min} \leq \alpha_s \leq \alpha_s^{\max} \\
& \text{onde} && \boldsymbol{\alpha}_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn}) \in \boldsymbol{\alpha} ,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

no qual C é a conformidade estrutural ou *compliance* e *CPU time* é o esforço computacional, em segundos, necessário para gerar a matriz de rigidez e resolver o sistema de equações algébricas. A formulação matemática do último esquema de otimização mono-objetivo é apresentado como

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && A_q(\boldsymbol{\alpha}_q) \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{e}(\boldsymbol{\alpha}_q) = \alpha_q^{\min} \leq \alpha_q \leq \alpha_q^{\max} \\
& \text{onde} && \boldsymbol{\alpha}_q = (\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots, \alpha_{qn}) \in \boldsymbol{\alpha} ,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde A_q é a área do domínio local resultante, como apresentado em 5.2.2.

Para a otimização mono-objetiva, a função de aptidão (*fitness function*), que é a função contendo o algoritmo do GSMF, deve aceitar um vetor, cujo tamanho é o número de variáveis independentes α_q , e retornar o valor escalar (A_q), da função objetivo. Para a otimização multi-objetiva, a função deve retornar um vetor linha contendo os valores das funções objetivo C , *CPU time*, r_ε e r_u .

Para se utilizar múltiplos processos de otimização na mesma rotina, os dados de saída de uma fase de iteração da otimização (α_q) podem ser carregados para a próxima iteração, por meio de variáveis globais no MATLAB. Isso permite que o próximo processo de otimização

utilize essa variável em sua próxima etapa, quando a função de aptidão for avaliada para a nova função objetivo (α_s).

Os parâmetros de otimização do AG, como tamanho da população, função de seleção, função de escala e etc, são diferentes para cada esquema de otimização e serão oportunamente discutidos na seção 7.1.

5.4 - OTIMIZAÇÃO AUTOMÁTICA DOS PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO

A rotina de otimização dos parâmetros de discretização dos métodos sem malha combina as duas abordagens anteriormente apresentadas em uma única rotina, para calcular ambos os parâmetros adimensionais, α_s e α_q , de uma forma eficiente e totalmente automatizada.

Processo de otimização é dividido em duas etapas principais, como mostra a Figura 5.1. Primeiramente, α_q é otimizado utilizando a abordagem apresentada na seção 5.2.2, uma otimização mono-objetiva, considerando o modelo numérico do GSMF para avaliar a função objetivo A_q . O resultado é um vetor $n \times 1$ contendo α_q otimizados, que será introduzido na próxima etapa, onde n corresponde ao número total de nós em uma discretização sem malha. Na segunda etapa, α_s é otimizado com a abordagem apresentada na seção 5.2.1, uma otimização multi-objetiva considerando o modelo numérico do GSMF para avaliar a conformidade e o tempo de processamento, definidas como funções objetivo dessa análise. O resultado é um valor escalar α_s otimizado, único para o problema em questão.

Nessa última abordagem, α_q independe de α_s e pode ser calculado considerando apenas o problema em questão e a geometria do domínio local de colocação de cada nó. Esse processo garante que a colocação na forma fraca será eficientemente computada na próxima etapa de otimização. Nessa próxima etapa, α_s é calculado considerando a conformidade e o tempo de processamento, para assim garantir um processamento rápido, sem graves consequências para a precisão da solução.

Ao combinar a precisão obtida com a otimização usando a função objetivo dos MQM, com a eficiência obtida com a otimização usando a função objetivo do domínio local, a rotina totalmente automatizada consegue otimizar um modelo numérico utilizando o método sem malha, não importando a geometria e sem a necessidade de recorrer à solução analítica do problema. Embora, na presente tese, apenas a otimização do GSMF tenha sido realizada, as rotinas podem ser facilmente adaptadas para qualquer método sem malha local que se deseja otimizar. Por fim, a eficiência da rotina pode ser melhorada se o processamento em paralelo for utilizado, realizando várias análises simultaneamente.

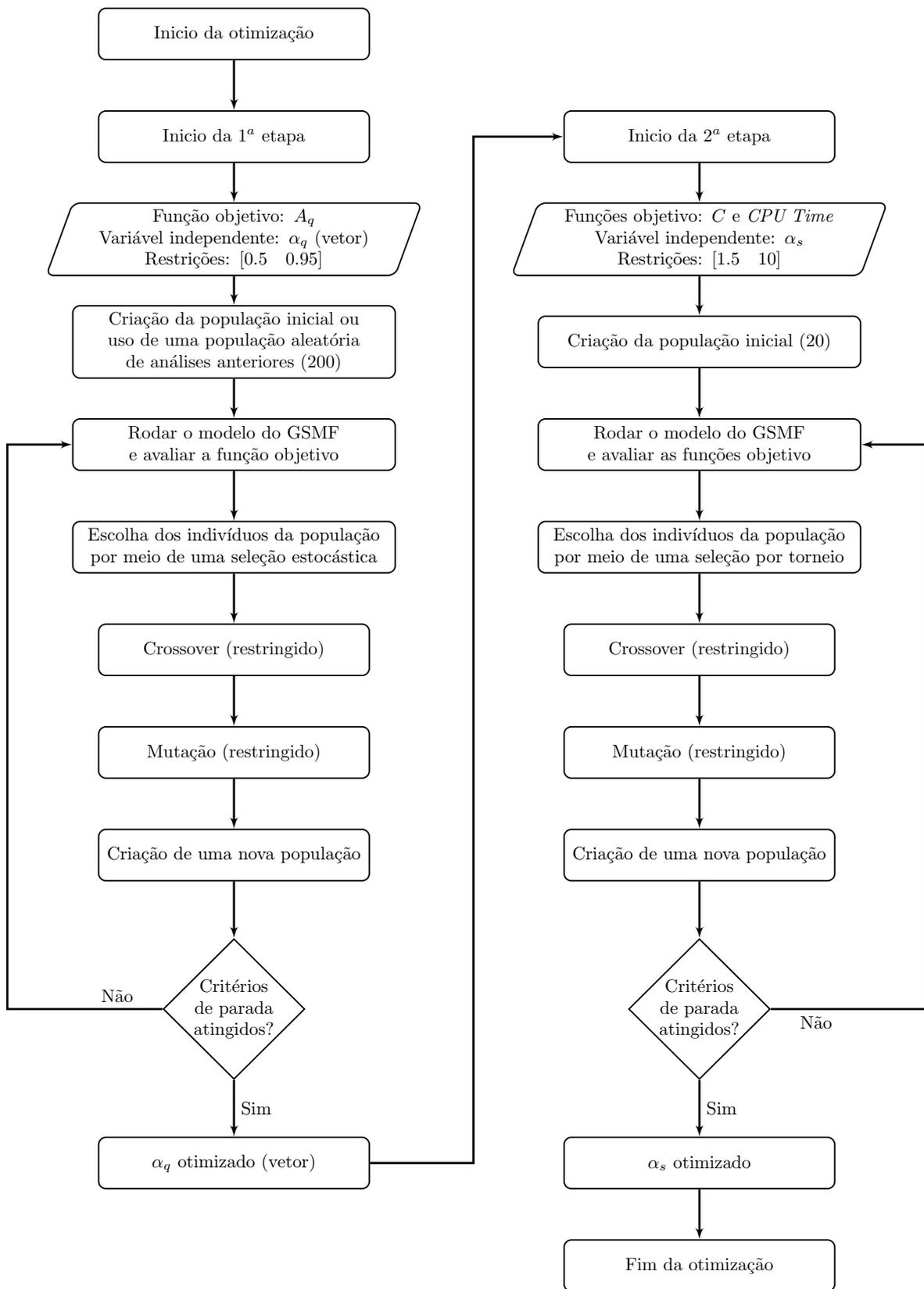


Figura 5.1 – Fluxograma da rotina totalmente automatizada; a primeira etapa é apresentada na direita, enquanto que a segunda etapa é apresentada na esquerda.

5.5 - ASPECTOS ESPECÍFICOS DA IMPLEMENTAÇÃO NO MATLAB

Essa seção contém detalhes sobre a implementação computacional da rotina de otimização usando algoritmo genético, que neste caso é aplicada na determinação dos parâmetros de discretização dos métodos sem malha locais, utilizando o *software* MATLAB 2015a. O *MATLAB Optimization Toolbox*, uma plataforma com interface gráfica dentro do MATLAB 2015a, também pode ser utilizada, caso apenas um único processo de otimização seja desejado.

O algoritmo genético pode ser chamado pela função **ga** no MATLAB, para otimizações mono-objetivas, ou seja, quando se possui apenas uma função objetivo, conforme a sintaxe:

```
1 [x fval] = ga(@fitnessfun, nvars, options)
```

Em contrapartida, para otimizações multi-objetivas, o algoritmo genético pode ser chamado pela função **gamultiobj**:

```
1 [x fval] = gamultiobj(@fitnessfun, nvars, options)
```

Para ambas as situações *@fitnessfun* configura a função de aptidão, *nvars* é o número de variáveis independentes para a respectiva função de aptidão e *options* é a estrutura contendo as opções específicas que podem ser configuradas no algoritmo genético. Se nenhum valor ou comando for atribuído à sintaxe *option*, as funções **ga** e **gamultiobj** usam as configurações predeterminadas do MATLAB. Os resultados são dados por *x*, que é o ponto no espaço onde o resultado é obtido, e *fval* é o valor final da função de aptidão, contendo a função objetivo desejada.

A função de aptidão ou *fitness function*, que nesse caso, é a rotina que contém a formulação do campo elástico generalizado do método sem malha (GSMF), é flexível e deve ser preparada para retornar a função objetivo como dado de saída. Para cada função, os parâmetros adimensionais (α_s e/ou α_q) são dados de entrada e devem ser corretamente definidos, conforme apresentado abaixo.

```
1 function obj = GSMF_Fitness_Function(xt)
```

A função deve aceitar um vetor, cujo tamanho é determinado pelo número de variáveis independentes (*xt*) e retornar um valor escalar (*obj*). Para uma otimização multi-objetiva, a função deve retornar um vetor linha contendo os múltiplos valores escalares da função objetivo. Apesar do GSMF ser o único método sem malha implementado na presente pesquisa, essas rotinas podem facilmente ser implementadas para qualquer método sem malha local que se deseje otimizar.

Qualquer uma das opções disponíveis podem ser especificadas assinalando uma estrutura de dados de entrada para as funções **ga** ou **gamultiobj**, usando a função **gaoptimset**,

```
1 options = gaoptimset(@ga)
```

que apresenta o resultado baseado em valores predeterminados pelo MATLAB. Para modificar um valor padrão, como por exemplo o tamanho da população no algoritmo genético de 50, que é o valor preestabelecido, para 150, utiliza-se a configuração *PopulationSize* entre apóstrofos, seguida por uma vírgula e pelo valor desejado

```
1 options = gaoptimset('PopulationSize',150)
```

Essa sintaxe cria uma estrutura de opções com todos os valores predeterminados pelo MATLAB, exceto pelo tamanho da população, que agora é de 150. Algumas variáveis da estrutura de opções não suporta valores escalares, mas sim comandos, como é o caso da função *PlotFcns*, que pode ser modificada pelo comando *@gaplotbestf*, que plota graficamente a melhor função de aptidão para cada geração. Pode-se chamar essa estrutura de dados com a sintaxe:

```
1 options = gaoptimset(options,'PlotFcns',@plotbestf)
```

Esse comando vai plotar o gráfico desejado com todas as outras opções predefinidas pelo MATLAB.

A lista a seguir mostra as opções que podem ser modificadas mais pertinentes a essa pesquisa, com sua respectiva sintaxe em parênteses, e suas funções dentro do MATLAB. Mais opções e comandos, que estão fora do escopo da pesquisa, podem ser encontrados no guia do usuário do MATLAB 2015b. As principais opções utilizadas são:

- *Population size (PopulationSize)*: especifica quantos indivíduos existem em cada geração;
- *Population initial rage (PopInitRange)*: especifica a abrangência dos vetores na população inicial que é gerada;
- *Scaling function (FitnessScalingFcn)*: especifica a função responsável pelo escalonamento. A função predefinida de classificação, rank (*@fitscalingrank*), é usada;
- *Selection function (SelectionFcn)*: especifica como o algoritmo genético escolhe os pais para a próxima geração. Na presente pesquisa, a seleção estocasticamente uniforme (*@selectionstochunif*) e a seleção por torneio (*@selectiontournament*) são consideradas;

- *Generations (Generations)*: especifica o número máximo de interações que serão realizadas pelo algoritmo genético;
- *Function tolerance (TolFun)*: programa o algoritmo para interromper a análise se a média relativa de mudança no melhor resultado para a *fitness function* for igual ou menor à tolerância da função;
- *Plot options (PlotFcns)*: permite plotar os dados do algoritmo genético enquanto ele ainda está realizando a análise. As funções de plotagem mais utilizadas são: (*@gaplotbestf*), para plotar o melhor valor da *fitness function* para cada geração; (*@gaplotstopping*), para mostrar os critérios de parada da análise e (*@gaplotdistance*), para plotar a distância média entre os indivíduos de cada geração. Já para a otimização multi-objetiva temos (*@gaplotpareto*), para mostrar a frente de pareto para duas primeiras funções objetivo e (*@gaplotparetodistance*), para mostrar a distância média entre os paretos.
- *Level of display ('Display')*: especifica quanta informação será mostrada na linha de comando do MATLAB, enquanto o algoritmo ainda está realizando a análise. Pode ser modificada para desligada (*'off'*), interativa (*'iter'*), diagnóstico (*'diagnose'*) e apenas o resultado final (*'final'*);
- *Parallel processing (UseParallel)*: chama a *fitness function* para ser processada em paralelo, utilizando o ambiente em paralelo preestabelecido nas configurações do MATLAB.

6 - METODOLOGIA

6.1 - ASPECTOS GERAIS

A formulação do método sem malha local presente neste trabalho foi implementada computacionalmente por meio de rotinas codificadas em linguagem MATLAB, escolhida por sua capacidade computacional simbólica e saída gráfica. Um resumo dos principais aspectos do processo de modelagem utilizado está descrito na seção 6.2, referentes ao processo de otimização dos parâmetros de discretização e posteriormente a introdução da técnica da subtração da singularidade para o cálculo do fator de intensidade de tensão, para uma única trinca e para múltiplas trincas.

Primeiramente, para validar as rotinas de otimização dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha, um problema clássico no âmbito da elasticidade linear foi selecionado. Em seguida, para fazer a validação do GSMF para a resolução de problemas no âmbito da mecânica da fratura linear elástica, exemplos clássicos da mecânica da fratura linear elástica foram testados, sendo eles: uma chapa com um entalhe vertical de borda carregada em modo I, uma chapa com um entalhe vertical de borda carregada em modo II, uma chapa com um entalhe diagonal de borda carregada em modo misto e uma chapa com uma trinca interna inclinada em modo misto, cujas soluções analíticas, obtidas em Civelek e Erdogan (1982), e as soluções altamente precisas obtidas com J-DBEM em Aliabadi e Portela (1999), servem de comparação para as soluções numéricas.

O erro relativo foi calculado e utilizado para avaliar a precisão e a convergência do método, conforme descrito na seção 6.3. O tempo de processamento também foi considerado para determinar a eficiência numérica do mesmo, utilizando funções embutidas no programa.

6.2 - PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL

A implementação inicial segue os mesmos procedimentos e estrutura básica de um programa de métodos sem malha para a resolução de problemas lineares elásticos, como pode ser visto em Atluri e Shen (2002), trazendo apenas modificações em algumas dessas etapas, pertinentes à nova formulação proposta.

Nesta etapa foram considerados domínios locais da forma fraca Ω_q retangulares e circulares nos exemplos, onde pontos de colocação foram aplicados em cada um dos lados do retângulo

e para cada quadrante do círculo. No primeiro exemplo, para a integração da forma fraca local do GSMF foram aplicados pontos de colocação igualmente espaçados nos contornos do domínio local retangular e circular, conforme exemplificado na Figura 6.1a e 6.1b.

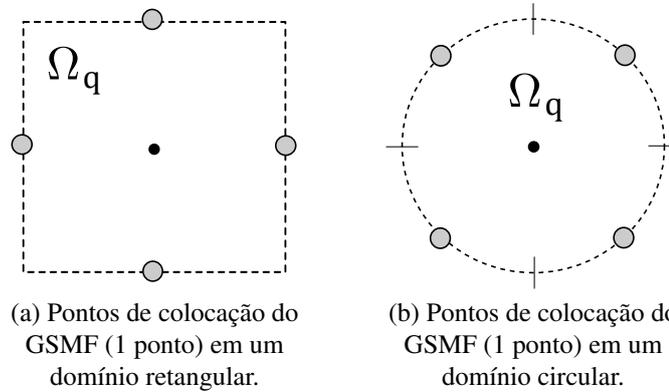


Figura 6.1 – Distribuição de pontos de colocação, no contorno de cada domínio local, para a integração da forma fraca local do GSMF.

Um processo automatizado de otimização dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha foi desenvolvido e implementado nas rotinas, utilizando ferramentas e funções disponíveis pelo próprio MATLAB. Inicialmente, essa rotina foi testada com um exemplo clássico da teoria da elasticidade no estado plano de tensão, buscando assim comprovar sua eficiência e validar o procedimento. Logo após os testes iniciais, o processo automatizado foi incorporado nas rotinas desenvolvidas posteriormente, estendendo assim sua aplicação para problemas relacionados à mecânica da fratura. A implementação da otimização dos parâmetros adimensionais usando algoritmo genético, apresentado na Figura 5.1, segue os procedimentos apresentados a seguir:

1. Implementação da função objetivo na rotina do GSMF, para a otimização do parâmetro α_s , por meio da conformidade ou *compliance* (C);
2. Implementação da função objetivo na rotina do GSMF, para a otimização do parâmetro α_q , por meio da área do domínio local;
3. Implementação da rotina de otimização totalmente automatizada, contendo as duas rotinas desenvolvidas anteriormente, uma para cada um dos parâmetros adimensionais;
4. Definição dos parâmetros na estrutura de opções ideais para uma boa otimização, como o tamanho da população, número de indivíduos, processo de mutação etc;
5. Resolução de um problema clássico da elasticidade linear, seguindo os procedimentos apresentados anteriormente;

6. Demonstração dos resultados desejados ou plotagem dos resultados referentes ao processo de otimização.

Em seguida, os procedimentos necessários para fazer a análise de problemas relacionados à mecânica da fratura linear elástica foram introduzidos na formulação do GSMF. O método adota, os procedimentos apresentados a seguir:

1. Introdução do método da visibilidade para simular descontinuidades no GSMF, modificando as funções ponderadoras dos MQM;
2. Modificação das funções dos domínios locais para simular descontinuidades na colocação na forma fraca;
3. Introdução da técnica da subtração da singularidade no GSMF para o cálculo do fator de intensidade de tensão;
4. Extensão da técnica da subtração da singularidade para a resolução de problemas com múltiplas trincas;
5. Resolução de problemas clássicos da mecânica da fratura linear elástica;
6. Comparação gráfica da precisão e eficiência dos resultados obtidos com outros métodos.

No geral, a presença da trinca em uma placa requer um tratamento especial quanto a descontinuidade, tendo em vista que a análise numérica é realizada em um domínio não convexo. As faces da trinca são modeladas com duas linhas de nós sobrepostos, de tal forma que os nós de cada linha tem influência apenas em seu respectivo lado, enquanto que a ponta da trinca é modelada com um único nó, com influência em ambos os lados, assim como mostra a Figura 6.2. Em cada um dos nós da discretização, o método da visibilidade foi utilizado para definir o suporte compacto e o domínio da forma fraca ou domínio de colocação foi programado para considerar a trinca um contorno do problema e adaptar sua geometria, de forma que esta não atrevesse a trinca de nenhum dos lados. Para garantir bons resultados numéricos, na ponta da trinca, o domínio de colocação é definido como metade do tamanho do domínio dos nós interiores.

Para o cálculo da matriz \mathbf{g} e \mathbf{f} , da solução particular de Williams para cada ponta de trinca, respectivamente, equações (4.16) e (4.18), foram considerados 3 pontos de Gauss na integração numérica.

Por fim, a estrutura modificada da rotina contendo o GSMF com a técnica da subtração da singularidade segue, em detalhes, o procedimento seguinte:

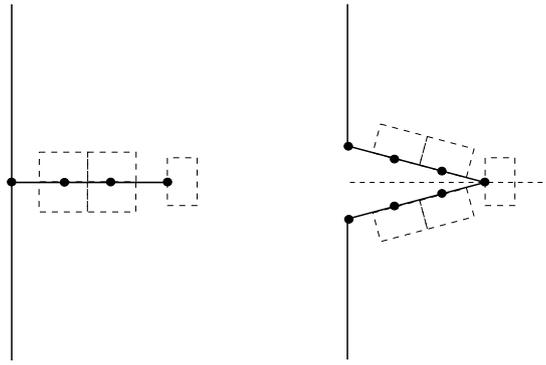


Figura 6.2 – Representação esquemática do domínio de colocação dos nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

1. Leitura dos dados introduzidos no programa e definição do tamanho das matrizes a serem utilizadas;
2. Leitura dos dados da trinca e montagem das matrizes relacionadas à trinca;
3. Discretização do domínio com nós espaçados automaticamente pelo programa, de forma regular ou não;
4. Discretização da trinca e da ponta da trinca;
5. Definição dos domínios locais de cada um dos nós da distribuição, introduzindo a descontinuidade nas funções;
6. Determinação dos nós dentro do domínio de influência que participam da interpolação para ponto de colocação ou quadratura de Gauss;
7. Cálculo das funções peso, determinação das matrizes A e B e, por fim, determinação das funções de forma dos MQM por meio do método da visibilidade;
8. Cálculo da matriz de Williams e o vetor de forças para cada um dos domínios locais no contorno do problema;
9. Cálculo da matriz de rigidez e da matriz de Williams para cada um dos domínios locais ao longo da trinca e na ponta da trinca;
10. Cálculo da matriz de rigidez local para cada um dos domínios locais restantes;
11. Organização da matriz de rigidez e o vetor de forças de cada um dos domínios locais em uma matriz global e um vetor de forças global;
12. Organização da matriz de Williams de cada um dos domínios locais do contorno na matriz global e no vetor de forças global;

13. Aplicação das condições de contorno no sistema de matrizes e vetores;
14. Cálculo das equações adicionais na ponta da trinca;
15. Resolução do sistema de equações para os parâmetros nodais;
16. Com os parâmetros nodais, cálculo das variáveis nodais;
17. Cálculo das variáveis secundárias;
18. Geração de uma malha para o cálculo do erro relativo;
19. Estimação do erro relativo de deslocamento e de energia;
20. Demonstração dos resultados desejados ou plotagem dos resultados.

6.3 - ERRO RELATIVO

O cálculo dos erros relativos foi feito com base nas normas de energia utilizadas por Atluri e Zhu (2000). Assim, para o campo de deslocamentos tem-se que

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

e para o campo de deformações

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (6.2)$$

O erro relativo para $\|\mathbf{u}\|$ é definido como

$$r_u = \frac{\|\mathbf{u}^{num} - \mathbf{u}^{analitico}\|}{\|\mathbf{u}^{analitico}\|} \quad (6.3)$$

e, para $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$r_\varepsilon = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{num} - \boldsymbol{\varepsilon}^{analitico}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{analitico}\|} \quad (6.4)$$

As soluções analíticas foram integradas numericamente utilizando a quadratura de Gauss com 15 pontos. Vale ressaltar que *background cells* foram utilizados apenas para o cálculo do erro relativo, já que o presente método é verdadeiramente sem malha.

A energia de deformação e o campo de deslocamentos foram utilizados para estimar o erro total das distribuições nodais.

7 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

A estratégia de modelagem do método sem malha local, apresentada na Seção 6.1, foi usada para obter os resultados numéricos e calcular o erro relativo apresentados neste capítulo.

Para testar as rotinas de otimização dos parâmetros de discretização dos métodos sem malha, um exemplo clássico foi escolhido: uma viga em balanço com uma carga concentrada na ponta, sem forças de corpo, para o caso de estado plano de tensão. Como dito anteriormente, as soluções analíticas encontradas na literatura servem de base de comparação para as soluções numéricas encontradas com a formulação.

Para as aplicações relacionadas à mecânica da fratura linear elástica, dois exemplos de uma placa retangular com trinca de borda, respectivamente, sob carregamentos em modo I e modo II, foram considerados. Adicionalmente, uma terceira e quarta placa retangular com trinca inclinada de borda e uma placa retangular com uma trinca interna inclinada, sob deformação em modo misto, foram consideradas.

Os resultados obtidos tanto com a otimização numérica quanto com as aplicações em mecânica da fratura são evidências claras da precisão e confiabilidade do GSMF, demonstrando sua robustez em lidar com diferentes problemas numéricos.

7.1 - OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

O primeiro exemplo é uma viga em balanço com uma carga parabólica na ponta, sem forças de corpo atuando, ilustrada na Figura 7.1,

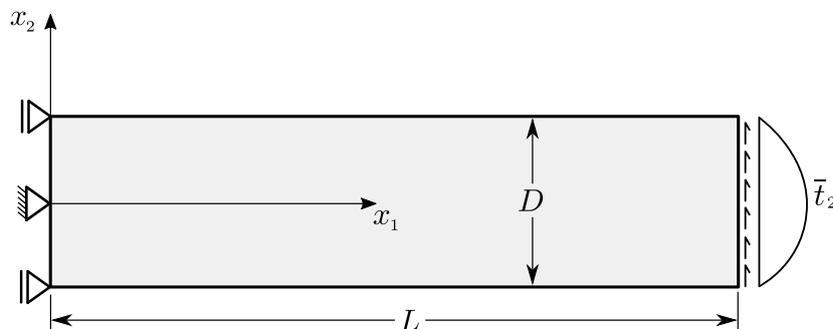


Figura 7.1 – Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária.

com carga parabólica dada por

$$\bar{t}_2(x_2) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2 \right). \quad (7.1)$$

A solução analítica pode ser obtida utilizando-se polinômios de Airy de quarta ordem e aplicando as respectivas condições de contorno, como visto em Mase (1999). Com isso, a solução analítica do campo de deslocamentos é dada por

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Px_2}{6EI} \left[(6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu) \left(x_2^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \\ \frac{P}{6EI} \left[3\nu x_2^2(L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right] \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

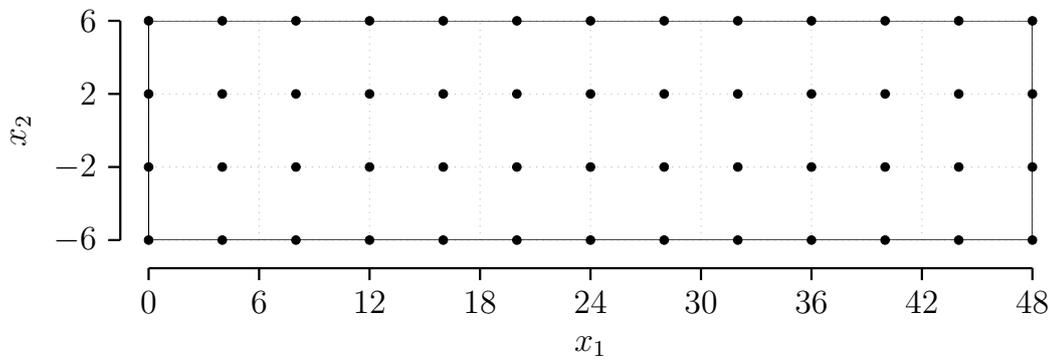
onde I é momento de inércia da seção transversal, ν é o coeficiente de Poisson, E é módulo de elasticidade longitudinal e G é módulo de elasticidade transversal. Sendo assim, a solução analítica para o campo de tensões é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{P(L - x_1)x_2}{I} \\ 0 \\ -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

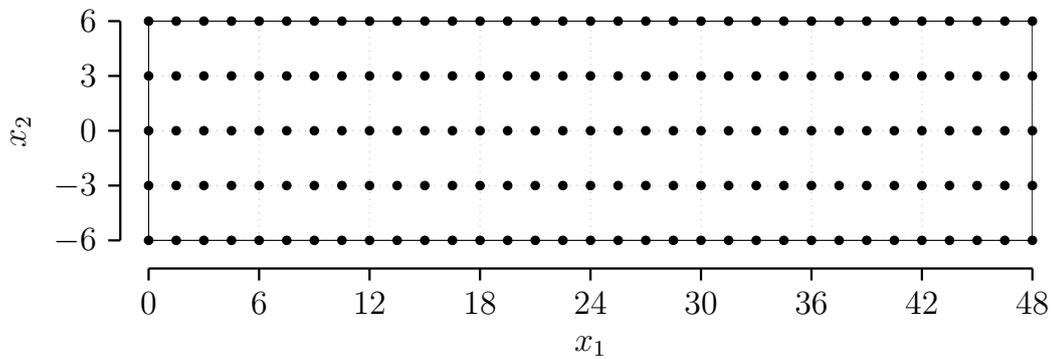
onde σ_{11} é a tensão na direção x , σ_{22} é a tensão na direção y e σ_{12} é a tensão transversal.

Para a aplicação desse exemplo foi considerada uma viga com comprimento de $L = 48$ e altura de $D = 12$, com uma carga aplicada na ponta de $P = 1000$, módulo de elasticidade longitudinal $E = 3 \cdot 10^7$ e coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$.

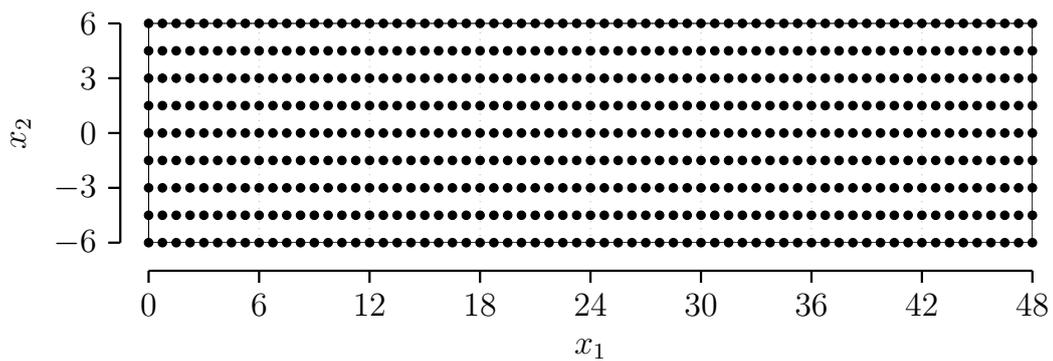
Uma distribuição regular dos nós ao longo do domínio foi escolhida, como mostra a Figura 7.2, com um total de $13 \times 4 = 52$, $33 \times 5 = 165$ e $65 \times 9 = 585$ nós. Foram considerados domínios locais retangulares, assim como esquematicamente apresentado na Figura 6.1a, com apenas 1 ponto de colocação centralizado em cada contorno do domínio local Ω_q para computar a integração da forma fraca local. Na aproximação pelos MQM bases polinomiais de primeira ordem e funções ponderadoras *quartic spline* foram consideradas. Todas as rotinas foram executadas em MATLAB 2015a com um computador Intel Core I7-4700MQ com CPU de 2.4GHz e 16 GB de memória RAM.



(a) Distribuição nodal regular com $13 \times 4 = 52$ nós.



(b) Distribuição nodal regular com $33 \times 5 = 165$ nós.



(c) Distribuição nodal regular com $65 \times 9 = 585$ nós.

Figura 7.2 – Distribuição regular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 52, 165 e 585 nós.

7.1.1 - Otimização baseada no erro relativo

No primeiro esquema de otimização, o algoritmo genético (AG) é implementado considerando a minimização do tempo de processamento (*CPU Time*) e os erros relativos r_ε e r_u , escolhidos como as funções objetivo desta rotina. O principal objetivo desta abordagem é avaliar o comportamento dos parâmetros adimensionais com relação à precisão e o esforço computacional. Apenas os maiores custos computacionais foram considerados, sendo estes, o custo de gerar a matriz de rigidez e resolver as equações algébricas. As variáveis a serem otimizadas, α_s e α_q , são definidas como contínuas e seguem o intervalo

$$\alpha_s = [1.1 \ 10] \quad e \quad \alpha_q = [0.1 \ 0.9]. \quad (7.4)$$

Geralmente, o parâmetro α_s é tomado como maior do que 1, para garantir que o suporte compacto terá a quantidade mínima necessária de nós para a construção das funções de forma. Neste exemplo, o limite superior é definido como 10, para reduzir o esforço computacional, limitando o espaço de busca com valores razoáveis. Além do mais, o parâmetro α_s é tomado como menor do que 1, para garantir que o domínio local interno de um nó esteja completamente dentro do domínio da solução, sem intersectar o contorno global.

As funções objetivas estão diretamente relacionadas com as variáveis a serem otimizadas. Isso significa que, ao selecionar diferentes valores para as variáveis α_s e α_q no espaço de busca amostral, diferentes resultados para o tempo de processamento (*CPU Time*), r_ε e r_u são obtidos, para cada análise com GSMF. Claramente esse é um processo de otimização com três funções objetivo e assim, uma frente de Pareto é obtida no final do processo de otimização, mas apenas duas funções são demonstradas graficamente.

A população inicial é aleatoriamente gerada de acordo com o tamanho predefinido de 20 indivíduos. Em seguida, a função de aptidão é calculada para cada membro da população e escalonada utilizando um processo de classificação (*rank*), que será posteriormente usado no processo de seleção. O operador de reprodução é implementado baseando-se em uma seleção do tipo torneio, onde a mutação e o crossover são limitados pelas restrições impostas, equação (7.4). Esse AG descrito gera uma sequência de variáveis, que são avaliadas pelas funções objetivo escolhidas. Finalmente, o processo de otimização termina quando o número máximo de gerações é atingido ou quando a mudança média na função custo for menor que um valor determinado, nesse caso 100 e 1×10^{-6} , respectivamente.

7.1.1.1 - Frente de Pareto

Os resultados da otimização multi-objetiva são apresentados na Figura 7.3 e nas Tabelas 7.1 a 7.3, nos quais todos os pontos apresentados são não dominantes entre si e considerados

Tabela 7.1 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 52 nodes, referente a Figura 7.3a

Índice	Tempo de processamento (s)	r_ε	r_u	α_s	α_q
1	0.2513	0.06615	0.06682	1.3628	0.4930
2	0.6347	1.413E-5	4.772E-4	3.9200	0.506
3	0.6437	7.194E-4	4.211E-4	3.7666	0.5109
4	0.2507	0.2327	0.2531	1.3818	0.5067

Tabela 7.2 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 165 nodes, referente a Figura 7.3b

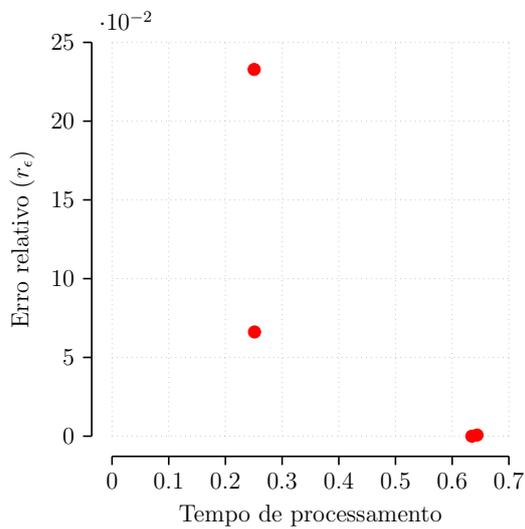
Índice	Tempo de processamento (s)	r_ε	r_u	α_s	α_q
1	3.7081	6.557E-5	2.009E-7	5.2789	0.5138
2	3.6090	1.336E-7	7.075E-5	5.2775	0.5137
3	3.6585	5.171E-5	1.552E-5	5.2788	0.5139

Tabela 7.3 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 585 nodes, referente a Figura 7.3c

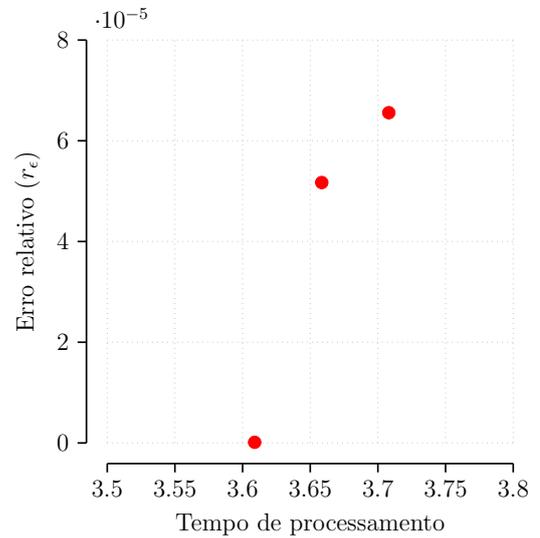
Índice	Tempo de processamento (s)	r_ε	r_u	α_s	α_q
1	10.8267	6.190E-10	0.0001	7.2685	0.4971
2	5.2903	0.0002	1.314E-07	4.2103	0.4971
3	10.8503	3.733E-05	6.978E-05	7.2686	0.4973
4	1.5595	0.0042	0.0046	1.7677	0.4995

ótimos do ponto de vista computacional. Para cada um desses pontos, um par de α_s e α_q otimizado é apresentado. Os resultados da otimização demonstram uma boa concordância com a solução analítica, resultando em erros relativos r_ε e r_u baixos para todas as configurações nodais, até mesmo em pontos onde o tempo de processamento foi mais baixo. Outro ponto que vale destacar é que a convergência é garantida, tendo em vista que um aumento na quantidade de nós na discretização sem malha, também aumenta a precisão.

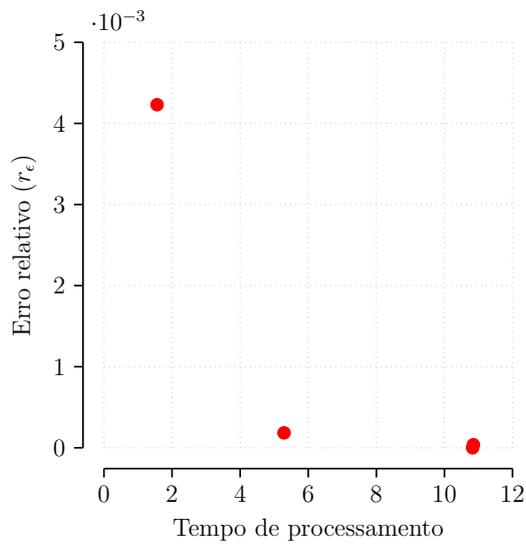
Quanto ao comportamento dos parâmetros adimensionais, observa-se que o α_s muda constantemente para diferentes configurações nodais, geralmente aumentando à medida em que mais nós são adicionados à análise. Em contrapartida, o α_q tem seu melhor resultado sempre associado a valores próximos de 0.5.



(a) Distribuição nodal regular com $13 \times 4 = 52$ nós.



(b) Distribuição nodal regular com $33 \times 5 = 165$ nós.



(c) Distribuição nodal regular com $65 \times 9 = 585$ nós.

Figura 7.3 – A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do erro relativo r_e , do tempo de processamento (*CPU Time*) em segundos e do erro relativo r_u ; apenas os dois primeiros foram apresentados graficamente.

A principal desvantagem dessa abordagem de otimização é o esforço computacional extremamente alto, necessário para realizar essa análise, que pode levar horas e, dependendo da discretização nodal utilizada, até dias para ser realizada, mesmo quando processada em paralelo. Outra grande desvantagem é que as soluções analíticas são necessárias para o cálculo do erro relativo, e dessa forma, não estão disponíveis para problemas mais complexos. Ambas as desvantagens apresentadas são inaceitáveis e demonstram a necessidade de uma abordagem de otimização mais eficiente.

7.1.1.2 - Deslocamentos e tensões

Os deslocamentos obtidos com o GSMF, para uma distribuição nodal com 165 nós, considerando $\alpha_s = 5.2775$ e $\alpha_q = 0.5137$ obtidos pelo processo de otimização, representados na Figura 7.4, mostraram uma boa concordância com os resultados analíticos. As tensões, calculadas no centro da viga, em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$, também

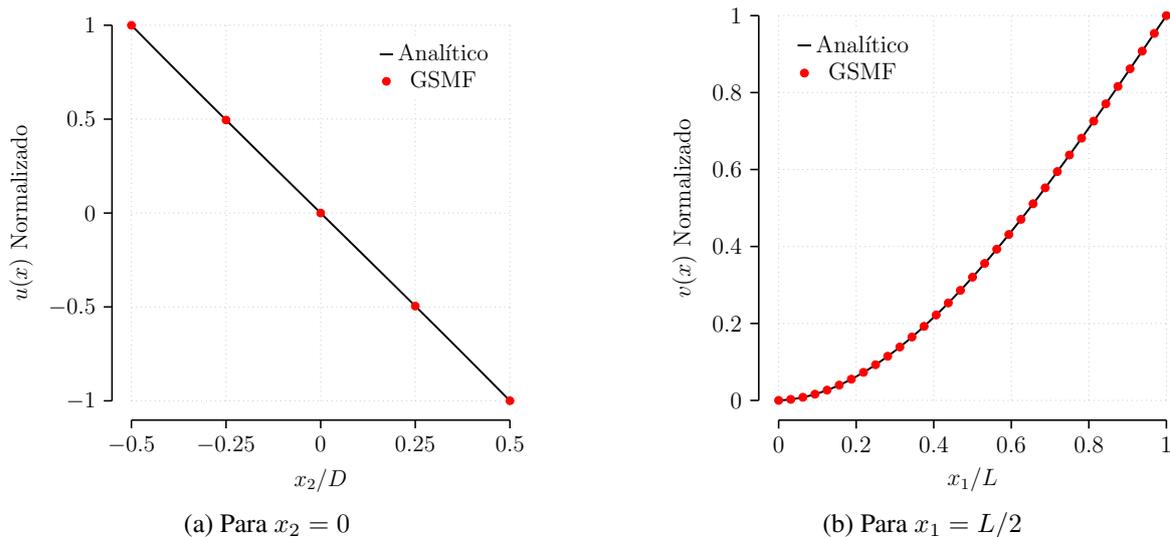


Figura 7.4 – Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.

apresentaram bons resultados, quando comparadas com as respostas analíticas, como mostra a Figura 7.5.

7.1.2 - Otimização baseada na conformidade estrutural

Buscando solucionar as principais desvantagens apresentadas pela abordagem anterior, uma nova função objetivo se faz necessária. A conformidade estrutural (*Compliance*), também conhecida como flexibilidade estrutural do material, derivada do teorema do trabalho local e

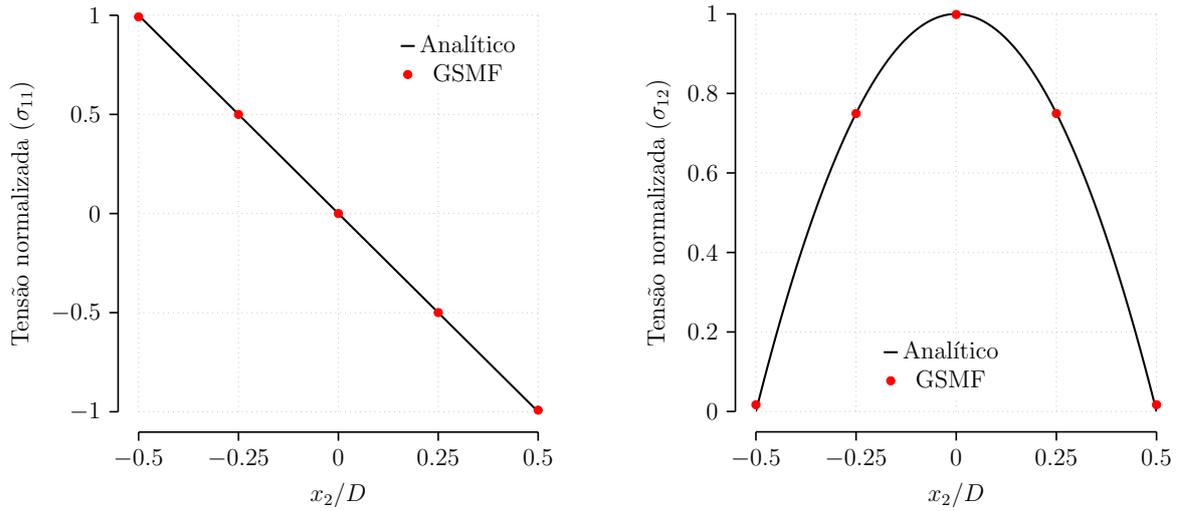


Figura 7.5 – Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.

calculada apenas no contorno estático Γ_t , foi escolhida como a principal função objetivo desse abordagem, juntamente com o tempo de processamento. As Figuras 7.6 a 7.8

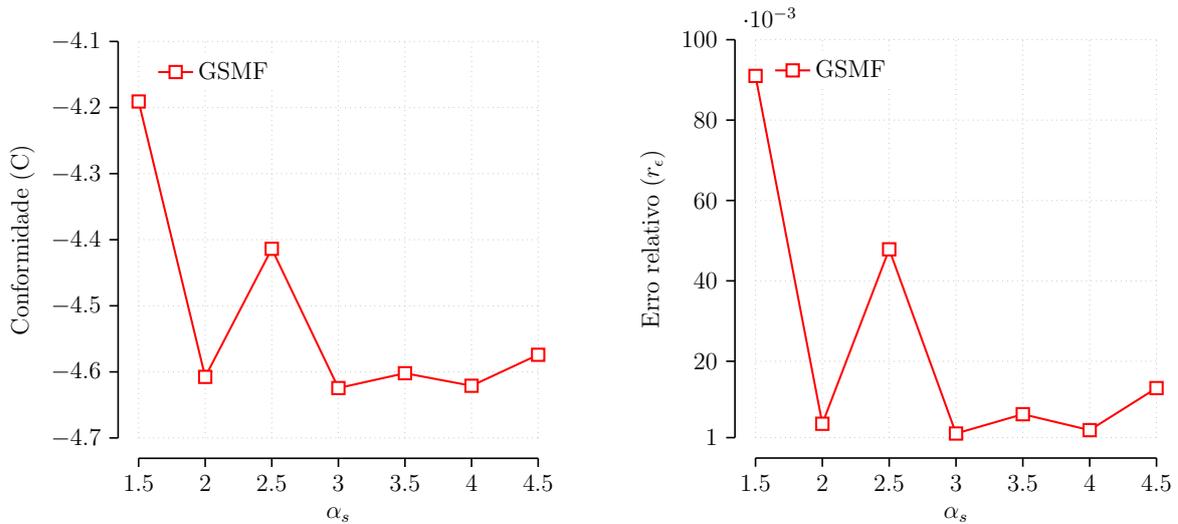


Figura 7.6 – Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ϵ , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $13 \times 4 = 52$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$.

mostram o comportamento do indicador de conformidade (C) e o erro relativo r_ϵ , para diferentes valores de α_s , considerando $\alpha_q = 0.5$ fixo. Essa análise demonstra a similaridade entre ambos os parâmetros com relação ao α_s , e comprova a capacidade do indicador de conformidade como potencial função objetivo a ser minimizada pelo AG. Uma das vantagens do indicador de conformidade (C) como função objetivo é a sua alta eficiência, que reduz o esforço computacional necessário para realizar a otimização em aproximadamente 15 vezes, se comparado com a otimização baseada no erro relativo r_ϵ .

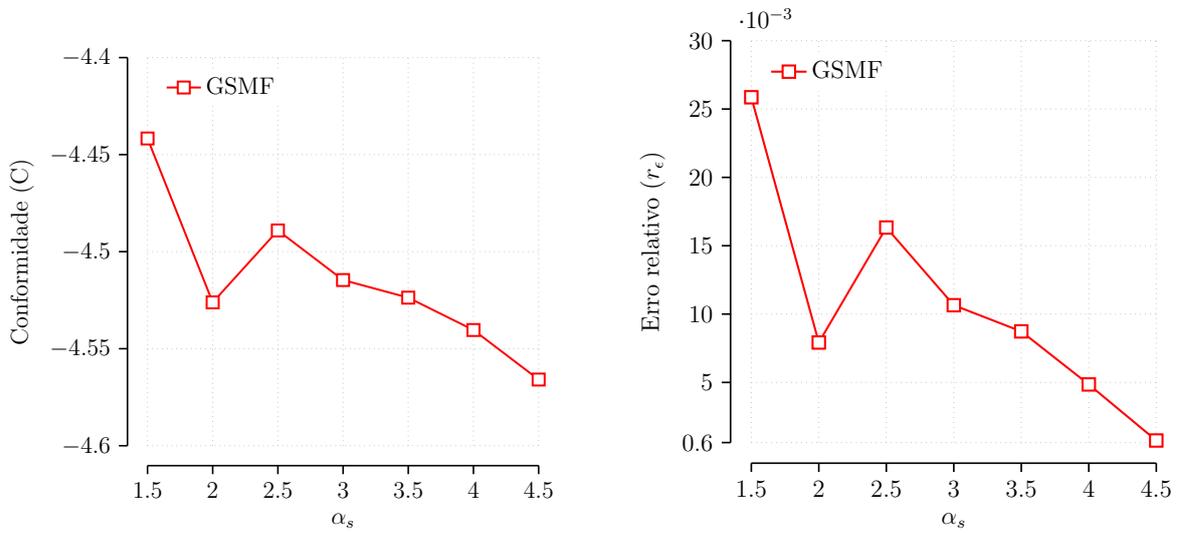


Figura 7.7 – Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ϵ , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$.

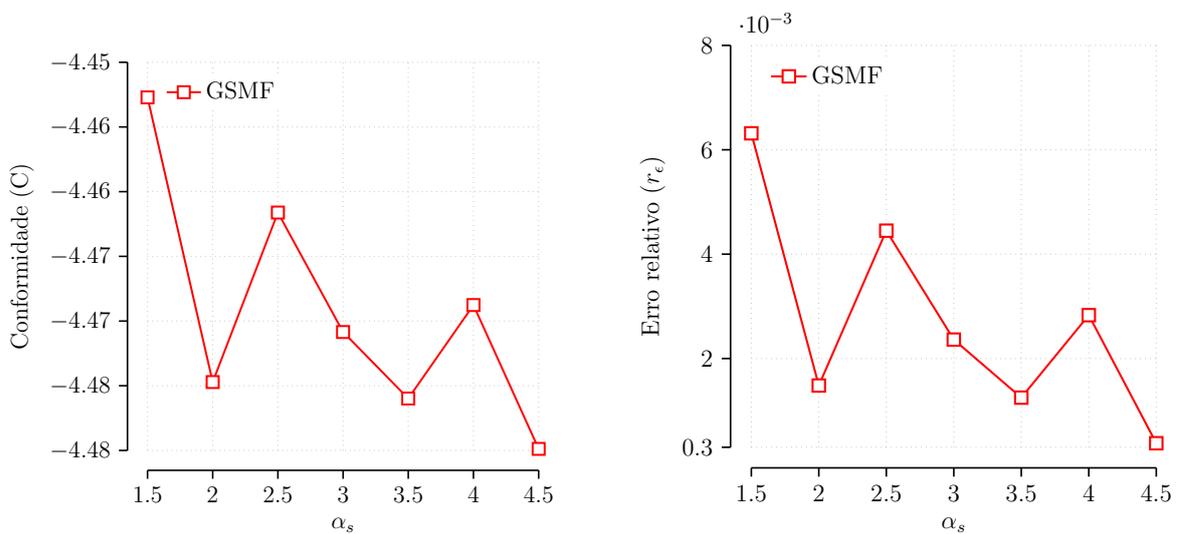


Figura 7.8 – Comparação entre o indicador de conformidade (C) e o Erro relativo r_ϵ , para uma viga engastada em balanço com uma discretização de $65 \times 9 = 585$ nós, para um valor fixo $\alpha_q = 0.5$.

Sendo assim, o AG foi implementado e preparado para minimizar o tempo de processamento e o indicador de conformidade (C), escolhidos como funções objetivo dessa abordagem de otimização. Apenas os maiores custos computacionais foram considerados, assim como na abordagem anterior. A variável α_s a ser otimizada é classificada como contínua e segue o intervalo

$$\alpha_s = [1.5 \ 10]. \quad (7.5)$$

A população inicial de 20 indivíduos foi aleatoriamente gerada. Em seguida, a função de aptidão foi calculada para cada membro da população e escalonada utilizando um processo de classificação (*rank*), que será posteriormente usado no processo de seleção. O operador de reprodução foi implementado baseando-se em uma seleção do tipo torneio, onde a mutação e o crossover foram limitados pelas restrições impostas, equação (7.5). Finalmente, o processo de otimização termina quando o número máximo de gerações de 100 é atingido ou quando a mudança média na função de aptidão for menor que 1×10^{-6} .

7.1.2.1 - Frente de Pareto

Os resultados da otimização multi-objetiva são apresentados na Figura 7.9 e nas Tabelas 7.4 a 7.6, nos quais todos os pontos apresentados são não dominantes e ótimos de um ponto de vista computacional.

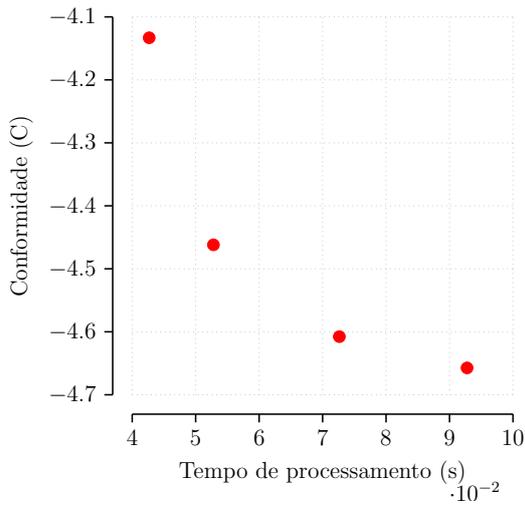
Tabela 7.4 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 52 nodes para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9a

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	0.0427	-4.1332	0.0993	0.1069	1.3585
2	0.0923	-4.6573	0.0051	0.0042	3.1515
3	0.0726	-4.6077	0.0044	0.0067	2.0053
4	0.0528	-4.4619	0.0346	0.0373	1.7414

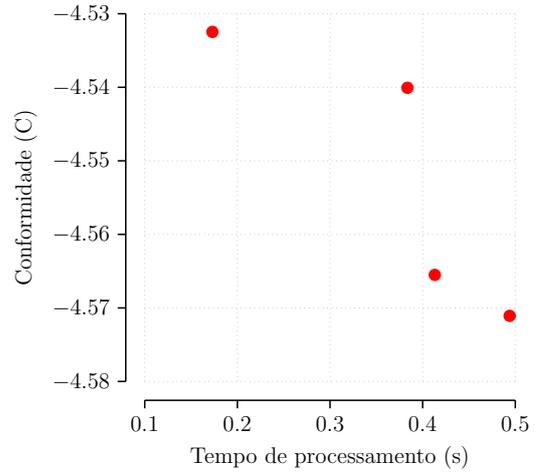
Tabela 7.5 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 165 nodes para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9b

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	0.4131	-4.5655	6.660E-04	5.510E-04	4.4932
2	0.4940	-4.5711	0.0019	0.0017	4.7085
3	0.1730	-4.5325	0.0064	0.0066	1.8935
4	0.3835	-4.5401	0.0049	0.0050	3.9966

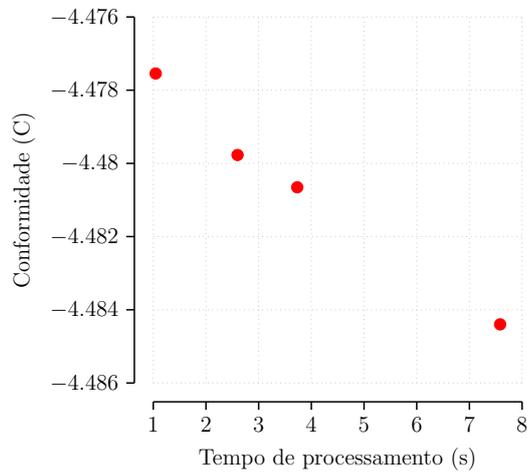
Para cada um desses pontos, um α_s foi apresentado, considerando $\alpha_q = 0.5$ fixo e os



(a) Distribuição nodal regular com 52 nós.



(b) Distribuição nodal regular com 165 nós.



(c) Distribuição nodal regular com 585 nós.

Figura 7.9 – A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do indicador de conformidade C e do tempo de processamento ($CPU\ Time$) em segundos.

Tabela 7.6 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva para uma distribuição nodal regular com 585 nodos para $\alpha_q = 0.5$ fixo, referente a Figura 7.9c

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	2.5991	-4.4798	4.022E-04	3.821E-04	4.4965
2	3.7328	-4.4806	2.040E-04	1.883E-04	4.5330
3	1.0455	-4.4775	8.209E-04	8.768E-04	1.8733
4	7.5833	-4.4844	6.614E-04	6.352E-04	9.6232

erros relativos r_ε e r_u calculados posteriormente, apenas para efeito de comparação. Pode-se observar que a presente otimização resulta em uma otimização altamente precisa em todos os pontos da frente de Pareto, diferente da abordagem anterior, em que o tempo de processamento era priorizado e os erros relativos eram ligeiramente maiores. Esse resultado demonstra que o conjunto ótimo de Pareto obtido com essa otimização é mais eficaz para essa função objetivo. Assim como na abordagem anterior, a convergência é garantida.

Vale ressaltar que o menor erro relativo não é sempre obtido para o menor valor do indicador de conformidade (C), embora isso não seja necessariamente um problema, já que todos os pontos na frente de Pareto geram bons resultados. Esse resultado infere que o conjunto ótimo de Pareto local está sempre próximo ao conjunto ótimo de Pareto global no espaço amostral de busca. Outra vantagem dessa abordagem é que o esforço computacional necessário para realizar a análise é muito menor que o necessário pela abordagem baseada no erro relativo r_ε , levando minutos para a maioria das distribuições nodais analisadas ao invés de horas, como era anteriormente.

7.1.3 - Otimização baseada no domínio local

Uma otimização completa do problema em questão requer também uma otimização do parâmetro α_q . A forma mais simples de realizar essa otimização é garantindo que a área do domínio local de todos os nós de uma discretização sem malha, onde está definida a forma fraca local, seja o mais próximo possível da área total do domínio do problema. Dessa forma, o AG foi implementado considerando o somatório das áreas dos domínios locais de cada nó, dado pela equação 5.4, como a função objetivo dessa otimização mono-objetiva. Considerando que o problema tem um total de N nós, a variável α_q será um vetor contendo N componentes e seguindo o intervalo

$$\alpha_q = [0.5 \ 0.95] , \quad (7.6)$$

para garantir que o domínio local dos nós internos esteja contido inteiramente dentro do domínio da solução, sem intersectar o contorno global; e também para garantir que o domínio local esteja, no mínimo, intersectando outros domínios locais de outros nós. Ambas as restrições são impostas para garantir uma boa precisão, tendo em vista que valores muito pequenos de α_q degeneram rapidamente a solução.

Nessa abordagem, a população inicial foi aleatoriamente gerada de acordo com o tamanho predefinido de 200 indivíduos. Especificamente nessa abordagem, populações de análises anteriores foram aleatoriamente inseridas nas otimizações posteriores, buscando assim melhorar a eficiência computacional em distribuições nodais maiores. Em seguida, a função

aptidão foi calculada para cada membro da população e escalonada utilizando um processo de classificação (*rank*), que será posteriormente usado no processo de seleção. O operador de reprodução é implementado baseando-se em uma seleção estocasticamente uniforme, onde a mutação e o crossover foram limitados pelas restrições impostas, equação (7.6). Finalmente, o processo de otimização termina quando o número máximo de gerações de 400 é atingido ou quando a mudança média na função aptidão for menor que 1×10^{-6} .

7.1.3.1 - Convergência do domínio local de colocação do GSMF

Os resultados obtidos para essa otimização mono-objetiva, considerando $\alpha_s = 4.5$ fixo e número máximo de gerações de 100, 200, 400 e 800 nos critérios de parada, são apresentados na Figura 7.10, onde observa-se que a maior precisão foi obtida quando valores de A_q

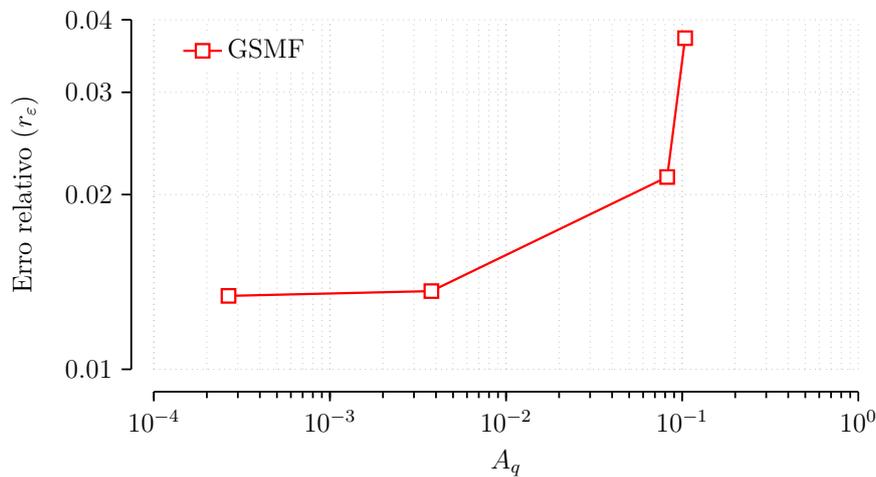


Figura 7.10 – Erro relativo r_ϵ em função da relação A_q , entre o somatório das áreas dos domínios locais dos nós na discretização sem malha com a área do domínio global do problema, para $\alpha_s = 4.5$ fixo e número máximo de gerações de 100, 200, 400 e 800; para uma distribuição nodal com 165 nós.

são menores, convergindo para a área do domínio do problema em questão. O esforço computacional reduzido necessário para realizar essa análise é uma característica chave dessa abordagem, gerando boas aproximações em questão de minutos, sendo até mesmo mais rápida que a abordagem anterior.

O esforço computacional pode ser reduzido ainda mais se forem consideradas populações aleatórias de análises anteriores. Com essa estratégia, uma primeira análise, de preferência com uma distribuição nodal reduzida, pode ser realizada de forma rápida e a população gerada salva na memória interna do MATLAB. Em seguida, quando uma distribuição nodal maior foi considerada, a otimização realizou a análise mais rapidamente utilizando a população da análise anterior, acelerando ainda mais todo o processo de otimização.

Esse processo de otimização pode ser facilmente combinado com o processo de otimização anterior, para gerar uma rotina totalmente automatizada, assim como demonstrado a seguir.

7.1.4 - Otimização automática dos parâmetros de discretização

A abordagem de otimização apresentada combina as características chaves das duas abordagens apresentadas anteriormente, seção 7.1.2 e 7.1.3, em uma única rotina para calcular ambos os parâmetros adimensionais dos métodos sem malha locais, α_s e α_q , automaticamente e de forma eficiente.

A implementação do AG foi dividida em duas etapas. Primeiramente, α_q foi otimizado usando A_q como função objetivo, que resultou em um vetor contendo um valor escalar de α_q para cada nó que compõe a distribuição nodal em questão. Em seguida, o α_s foi otimizado usando a conformidade (C) e o tempo de processamento como funções objetivo, considerando os resultados obtidos na análise anterior. É importante ressaltar que as mesmas opções e parâmetros das análises anteriores foram utilizadas nessa abordagem.

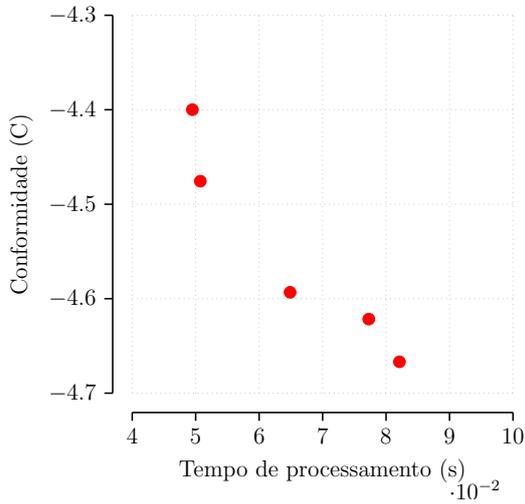
7.1.4.1 - Frente de Pareto

Os resultados obtidos com essa otimização multi-objetiva dos parâmetros do GSMF são apresentados na Figura 7.11 e nas Tabelas 7.7 a 7.9, nos quais todos os pontos apresentados

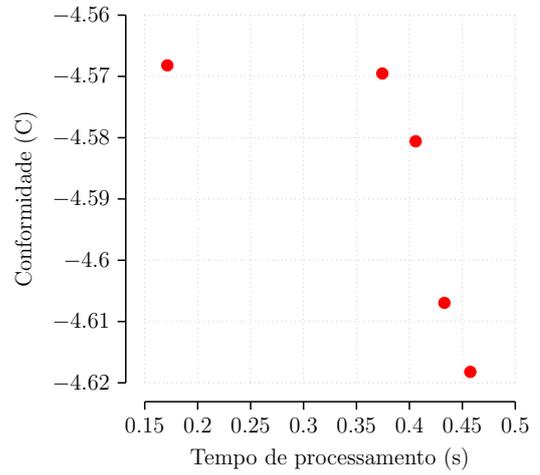
Tabela 7.7 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 52 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11a

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	0.0495	-4.3999	0.0495	0.0522	1.6919
2	0.0773	-4.6216	0.0046	0.0051	2.9747
3	0.0821	-4.6668	0.0052	0.0043	3.1443
4	0.0649	-4.5932	0.0091	0.0117	1.9415
5	0.0507	-4.4756	0.0091	0.0117	1.7464

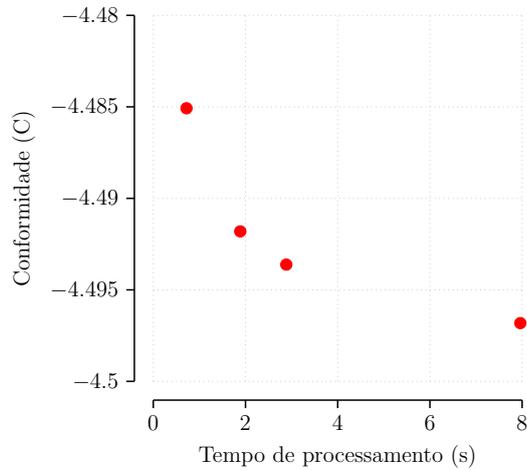
são não dominantes entre si e, não apenas viáveis, mas também considerados ótimos de um ponto de vista computacional. Para cada um dos pontos, um α_s otimizado foi apresentado, considerando o α_q obtido na primeira etapa da análise, garantindo que $A_q < 1 \times 10^6$. Os resultados mostraram que a rotina apresentada resulta em soluções altamente precisas para todos os pontos na frente de Pareto, de forma rápida e eficiente; além de garantir a convergência, assim como as abordagens anteriores.



(a) Distribuição nodal regular com 52 nós.



(b) Distribuição nodal regular com 165 nós.



(c) Distribuição nodal regular com 585 nós.

Figura 7.11 – A frente de Pareto da otimização multi-objetiva para três distribuições nodais regulares da viga engastada em balanço, em função do indicador de conformidade C , do tempo de processamento (*CPU Time*) em segundos e da relação A_q , para a rotina totalmente automatizada de otimização.

Tabela 7.8 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 165 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11b

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	0.3744	-4.5695	0.0083	0.0083	3.8145
2	0.4575	-4.6182	0.0023	0.0022	4.6639
3	0.1713	-4.5682	0.0084	0.0087	1.9470
4	0.4330	-4.6069	1.281E-04	1.980E-04	4.3474
5	0.4059	-4.5806	0.0059	0.0059	3.9606

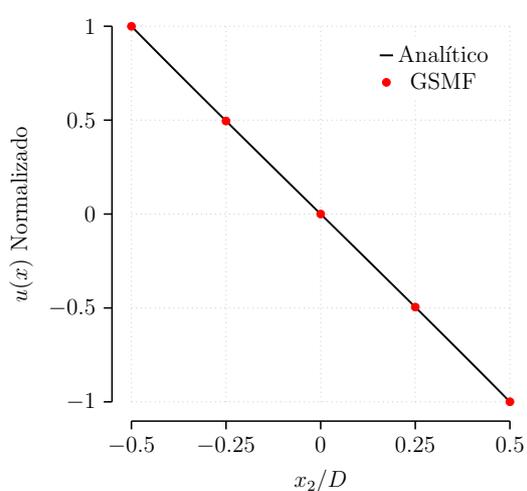
Tabela 7.9 – Os resultados da frente de Pareto multi-objetiva da rotina totalmente automatizada, para uma distribuição nodal regular com 585 nós e diferentes valores de α_q para cada nó da discretização sem malha, referente a Figura 7.11c

Índice	Tempo de processamento (s)	Conformidade (C)	r_ε	r_u	α_s
1	0.7201	-4.4851	0.0016	9.535E-04	1.5
2	2.8858	-4.4936	1.660E-04	2.557E-04	4.5010
3	1.8870	-4.4918	2.463E-04	6.637E-05	3.4838
4	7.9617	-4.4968	9.110E-04	9.074E-04	9.5744

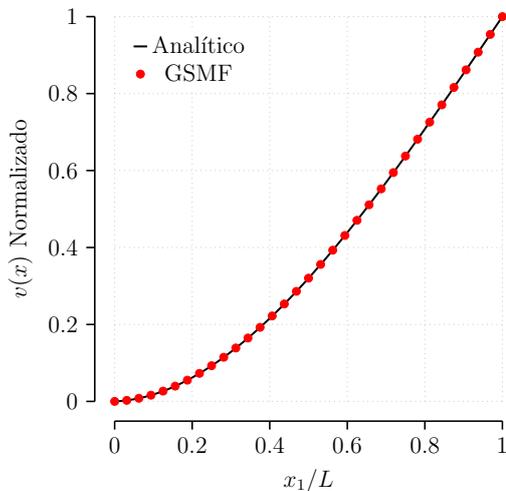
Assim como, na abordagem que deu origem à rotina, o menor erro relativo não é sempre obtido para o menor valor do indicador de conformidade, gerando bons resultados em todos os pontos na frente de Pareto; inferindo mais uma vez que o conjunto ótimo de Pareto local está sempre próximo ao conjunto ótimo de Pareto global no espaço amostral de busca. O esforço computacional reduzido é fruto da combinação da eficiência das duas abordagens, resultando em uma otimização eficiente.

7.1.4.2 - Deslocamentos e tensões

Os deslocamentos obtidos com o GSMF, para uma distribuição nodal com 165 nós, considerando $\alpha_s = 4.3474$ e o vetor contendo valores nodais de α_q obtidos pelo processo de otimização, representados na Figura 7.12, mostraram uma boa concordância com os resultados analíticos. As tensões, calculadas no centro da viga, em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$, também apresentaram bons resultados quando comparadas com as respostas analíticas, como mostra a Figura 7.13.



(a) Para $x_2 = 0$



(b) Para $x_1 = L/2$

Figura 7.12 – Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, utilizando a rotina totalmente automatizada de otimização.

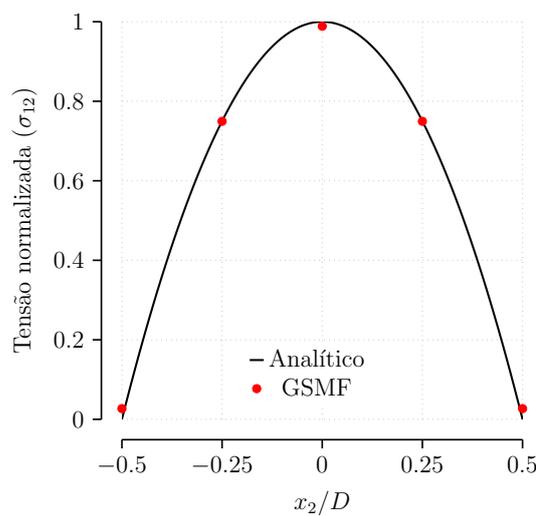
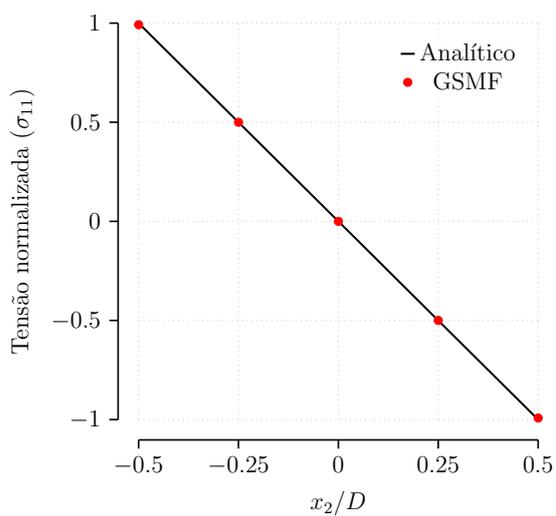


Figura 7.13 – Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós, utilizando a rotina totalmente automatizada de otimização.

7.2 - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

O GSMF foi comparado com os resultados obtidos pelo *Dual Boundary Element Method* (DBEM) com a técnica da integral J (J-DBEM), que é um método numérico muito preciso. Aliabadi e Portela (1999) apresentam a estratégia de modelagem do DBEM, que considera trincas retas por partes, que são modeladas com elementos de contorno quadráticos descontínuos retos. Elementos de contorno quadráticos contínuos são utilizados ao longo dos contornos do restante do problema, exceto na interseção entre a trinca e uma borda, onde elementos de contorno semi-descontínuos são utilizados na borda.

Para as aplicações em mecânica da fratura linear elástica presentes nesta seção, o AG foi implementado e preparado para minimizar o tempo de processamento e o indicador de conformidade (C), escolhidos como funções objetivo desta etapa. A variável α_q é fixada em virtude da descontinuidade existente no modelo. A variável α_s a ser otimizada foi classificada como contínua e segue o intervalo $\alpha_s = 1.5 \sim 10$. A população inicial foi de 20 indivíduos, a função de aptidão foi escalonada utilizando um processo de classificação (*rank*), o operador de reprodução foi implementado baseando-se em uma seleção do tipo torneio, onde a mutação e o crossover foram limitados pelas restrições impostas. Por fim, o processo de otimização termina quando o número máximo de gerações de 50 é atingido ou quando a mudança média na função de aptidão for menor que 1×10^{-6} .

7.2.1 - Placa com trinca de borda – Modo-I

Uma placa retangular com uma trinca de borda, esquematicamente representada na Figura 7.14 foi considerada para a primeira análise. O comprimento da trinca é dado por a , a largura da placa é dada por W e a altura é dada por $h = w/2$. A placa é carregada por uma tração uniforme $\bar{t} = \sigma$, aplicada simetricamente nas extremidades. Resultados foram obtidos para o caso $h/w = 0.5$, para serem comparados com os valores altamente precisos obtidos por Civelek e Erdogan (1982). Cinco casos foram considerados, com $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ e 0.6 . O GSMF foi modelado com domínios locais de colocação retangulares e parâmetros de discretização $\alpha_s = 1.5 \sim 3$ e $\alpha_q = 0.5$, obtidos com a rotina de otimização apresentada anteriormente.

A aproximação com o MQM considera base polinomial de primeira ordem e funções ponderadoras do tipo *quartic spline*. A análise numérica foi realizada considerando-se a distribuição nodal representada na Figura 7.15, onde para todos os cinco casos de comprimento de trinca considerados, apenas a distribuição nodal ao longo da trinca foi modificada, sempre sem considerar nenhum refinamento ao redor da ponta da trinca.

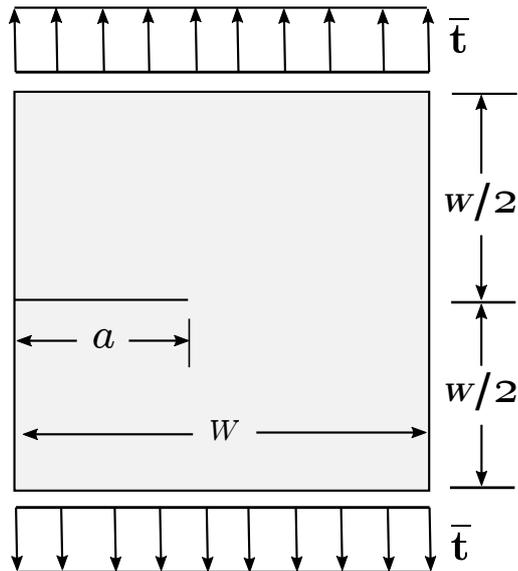


Figura 7.14 – Placa retangular com uma única trinca de borda sob carregamento em modo-I ($h/w = 0.5$).

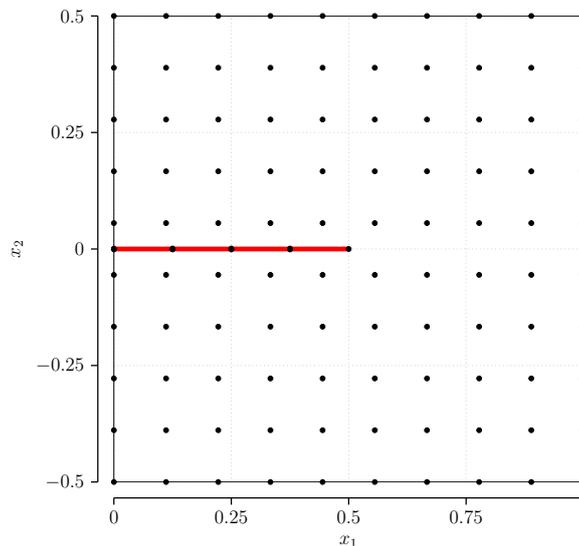


Figura 7.15 – Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $10 \times 10 = 100$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.10 e atestam a alta precisão do método,

Tabela 7.10 – Placa retangular com uma trinca de borda única sob carregamento em modo-I. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Civelek e Erdogan (1982).

a/w	$K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$			% Erro	
	GSMF	J-DBEM	Civelek	GSMF	J-DBEM
0.2	1.520	1.495	1.488	0.0216	0.005
0.3	1.967	1.858	1.848	0.0647	0.005
0.4	2.413	2.338	2.324	0.0387	0.006
0.5	2.973	3.028	3.010	0.0122	0.006
0.6	3.991	4.184	4.152	0.0387	0.008

quando comparado com Civelek e Erdogan (1982). Os resultados obtidos com o GSMF também são muito precisos quando comparados com os resultados obtidos pelo J-DBEM. Nessa análise, o fator de intensidade de tensão do modo-II é sempre menor do que 10^{-7} , tendo em vista que esse é um problema de modo-I. A configuração deformada da placa está esquematicamente representada na Figura 7.16.

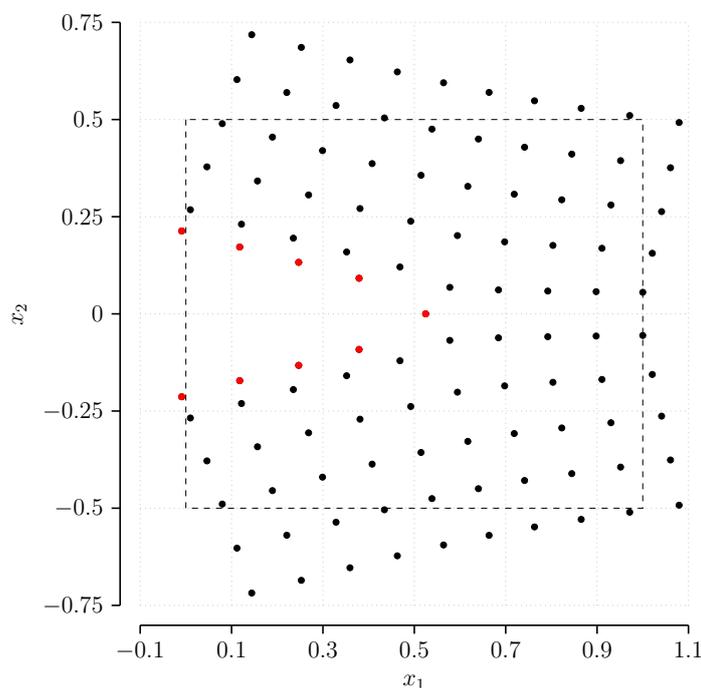


Figura 7.16 – Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo-I. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

É importante ressaltar a alta precisão obtida com essa análise, considerando uma configuração nodal simples, sem qualquer refinamento ao redor da ponta da trinca. Essa é

uma consequência direta da técnica da subtração da singularidade, implementada no GSMF, que resulta em campos de tensão regularizados ao redor da ponta da trinca.

Outra grande vantagem do GSMF, quando comparado com outros métodos sem malha, é a composição da sua matriz de rigidez, que é esparsa e com valores em banda, o que contribui para sua alta eficiência; advinda do processo de construção nodal da mesma.

7.2.2 - Placa com trinca de borda – Modo-II

Uma placa retangular com uma trinca de borda, esquematicamente representada na Figura 7.17, foi considerada para a primeira análise. O comprimento da trinca é dado por a

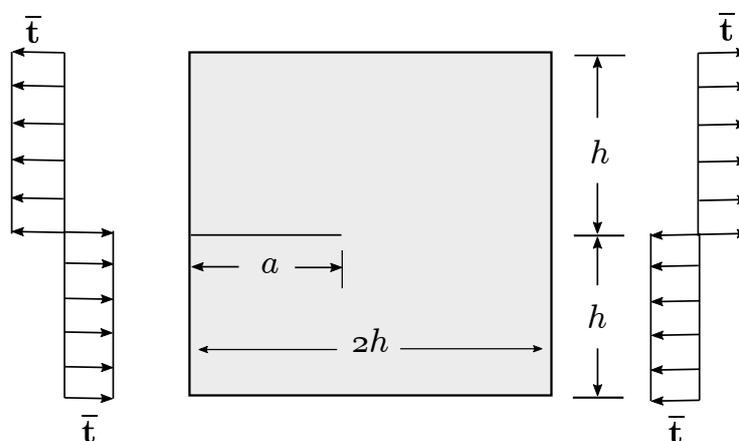


Figura 7.17 – Placa retangular com uma única trinca de borda sob carregamento em modo-II ($w = 2h$).

e a relação entre a largura e o comprimento da placa é dada por $h/w = 0.5$. A placa é carregada por uma tração uniforme $\bar{t} = \sigma$, paralela à trinca e é aplicada anti-simetricamente nas laterais, caracterizando assim um carregamento de modo-II.

Este é um exemplo muito difícil, do qual não existem resultados analíticos de referência publicados. Desta forma, os resultados obtidos com este problema, utilizando o GSMF implementado com a técnica da subtração da singularidade, foram comparados com os resultados obtidos com o J-DBEM, utilizando o *software* apresentado por Aliabadi e Portela (1999).

Cinco casos foram considerados, com $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ e 0.6 . Uma base polinomial de primeira ordem e funções ponderadoras do tipo *quartic spline* foram consideradas na aproximação com os MQM.

O GSMF foi modelado com domínios locais de colocação retangulares e parâmetros de

discretização $\alpha_s = 2 \sim 3.5$ e $\alpha_q = 0.5$, obtidos por otimização numérica. A análise numérica foi realizada considerando-se a distribuição nodal representada na Figura 7.18, onde para

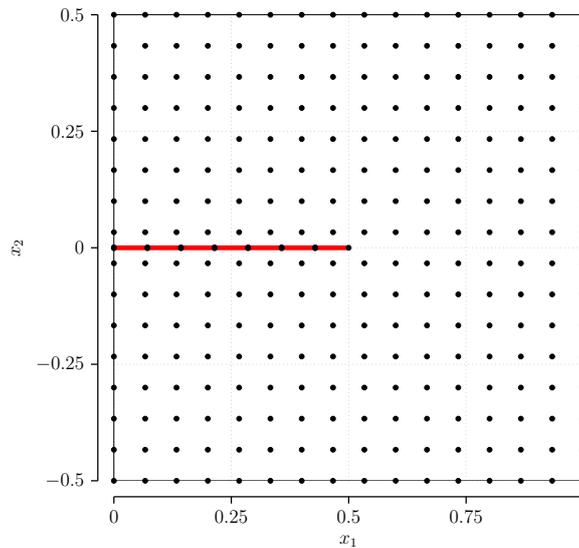


Figura 7.18 – Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $16 \times 16 = 256$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.

todos os cinco casos de comprimento de trinca considerados, apenas a distribuição nodal ao longo da trinca foi modificada, sempre sem considerar nenhum refinamento ao redor da ponta da trinca.

Os resultados obtidos apresentados na Tabela 7.11 demonstram a alta precisão do método.

Tabela 7.11 – Placa retangular com uma trinca de borda única sob carregamento em modo-II. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir dos valores obtidos com o J-DBEM.

a/w	$K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$		
	GSMF	J-DBEM	% Erro
0.2	0.416	0.435	0.0436
0.3	0.338	0.358	0.0532
0.4	0.296	0.304	0.0261
0.5	0.248	0.262	0.0522
0.6	0.218	0.223	0.0218

Nessa análise, o fator de intensidade de tensão do modo-I é sempre menor do que 10^{-3} , tendo em vista que este é um problema de modo-II. A configuração deformada da placa está esquematicamente representada na Figura 7.19.

É importante ressaltar a alta precisão obtida com essa análise, considerando uma

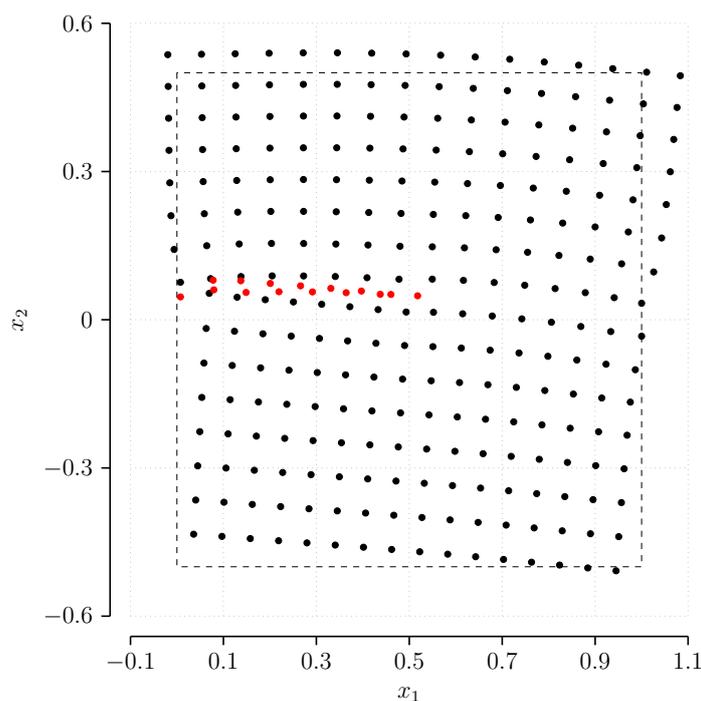


Figura 7.19 – Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo-II. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

configuração nodal relativamente simples, sem qualquer refinamento ao redor da ponta da trinca. Esta é uma característica chave do GSMF implementado com a técnica da subtração da singularidade.

7.2.3 - Placa com trinca de borda inclinada – Modo misto

Agora considere uma placa retangular com uma trinca de borda inclinada, esquematicamente representada na Figura 7.20, em deformação de modo misto devido a uma tração remota $\bar{t} = \sigma$. O comprimento da trinca é dado por a , a largura da placa é dada por W e a altura é dada por $h = w/2$.

Para a análise desse problema, três casos foram considerados, com fatores de $a/w = 0.2, 0.4$ e 0.6 para $\alpha = 30^\circ$ e dois casos, com fatores de $a/w = 0.2$ e 0.4 , para $\alpha = 60^\circ$. A aproximação com o MQM considera base polinomial de primeira ordem e funções ponderadoras do tipo *quartic spline*, assim como domínios locais de colocação retangulares e parâmetros de discretização $\alpha_s = 2 \sim 12$ e $\alpha_q = 0.5$, obtidos por otimização numérica.

A análise numérica foi realizada considerando-se a distribuição nodal representada na Figura 7.21, onde para todos os casos de comprimento de trinca considerados, apenas a

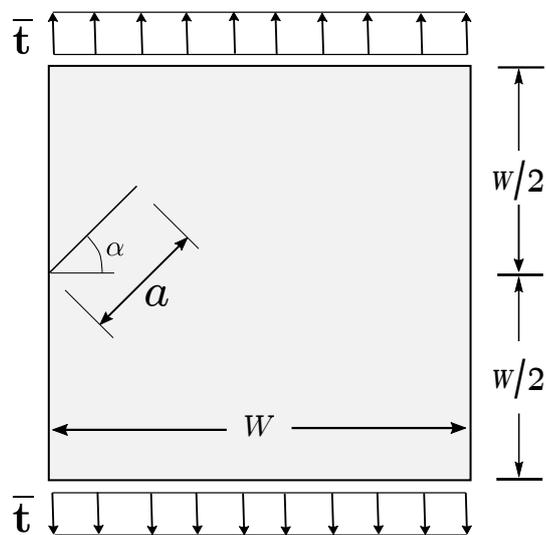


Figura 7.20 – Placa retangular com uma única trinca inclinada de borda sob tração remota.

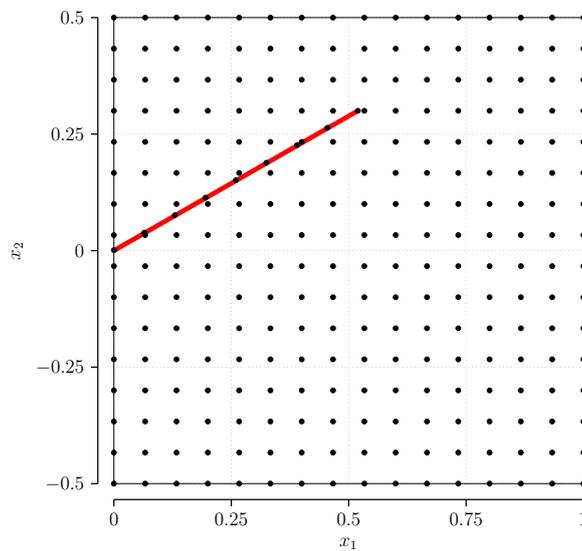


Figura 7.21 – Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $16 \times 16 = 256$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.5$. A linha vermelha representa as faces da trinca.

distribuição nodal ao longo da trinca foi modificada, sempre sem considerar nenhum refinamento ao redor da ponta da trinca.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.12 e Tabela 7.13 , respectivamente para

Tabela 7.12 – Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 30^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	1.164	1.082	1.100	0.058	0.016
0.4	1.513	1.545	1.550	0.024	0.003
0.6	2.732	2.572	2.550	0.071	0.009

Tabela 7.13 – Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 30^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.325	0.351	0.350	0.071	0.003
0.4	0.471	0.474	0.470	0.002	0.009
0.6	0.580	0.700	0.700	0.171	0.000

os valores de $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ e $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$, assim como a diferença relativa em porcentagem dos valores obtidos em Murakami (1986), para $\alpha = 30^\circ$. As tabelas 7.14 e 7.15 apresentam

Tabela 7.14 – Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 60^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).

a/W	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.543	0.495	0.500	0.086	0.010
0.4	0.603	0.592	0.600	0.055	0.013

respectivamente os valores de $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$, $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ e a diferença relativa em porcentagem dos valores obtidos em Murakami (1986), para $\alpha = 60^\circ$. Os resultados obtidos estão em perfeita concordância com aqueles obtidos em Murakami (1986) e em

Tabela 7.15 – Placa retangular com uma trinca inclinada de $\alpha = 60^\circ$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1986).

a/W	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.327	0.356	0.360	0.092	0.011
0.4	0.439	0.413	0.420	0.045	0.017

Hiroshi et al. (2000), assim como os resultados obtidos com o J-DBEM. A alta precisão obtida pode ser facilmente evidenciada, considerando a configuração nodal simples e sem qualquer refinamento ao redor da ponta da trinca.

A configuração deformada da placa está esquematicamente representada na Figura 7.22.

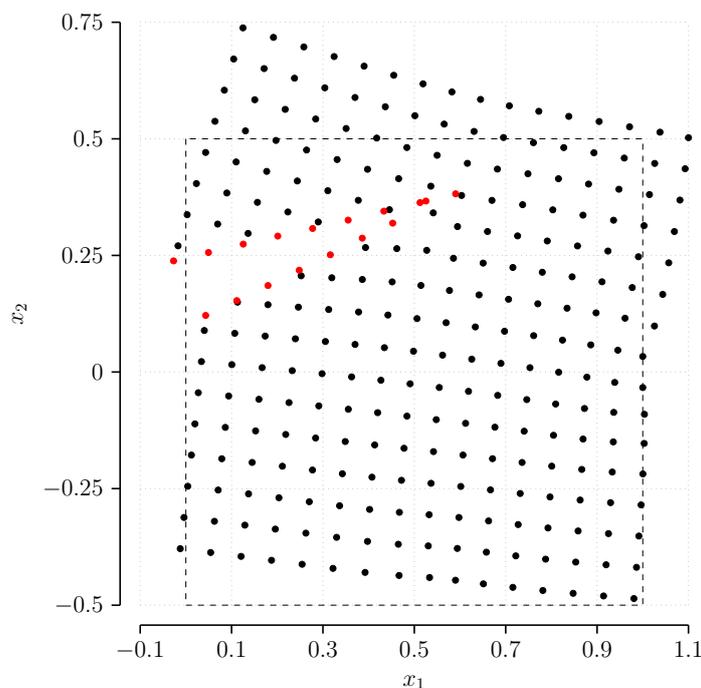


Figura 7.22 – Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.5$, sob carregamento em modo misto. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

7.2.4 - Placa com uma trinca central inclinada – Modo misto

Em muitos problemas práticos, o caminho da trinca, apesar de ser curvado na maioria dos casos, pode ser efetivamente modelado como uma trinca reta por partes. Para uma trinca reta arbitrária, o campo de Williams pode ser usado localmente, em cada ponta de trinca,

como uma solução particular, assim como demonstrado por Caicedo e Portela (2015). Desta forma, para lidar com várias trincas simultaneamente, a estratégia de modelagem da técnica da subtração da singularidade é baseada no princípio da superposição, de tal forma que, nos arredores de cada uma das pontas de trinca, o campo de Williams é usado localmente na regularização. Como uma consequência direta dessa abordagem, uma trinca central pode ser considerada como um problema com múltiplas trincas, com duas pontas de trinca.

Considere uma placa retangular com uma trinca central inclinada e reta, esquematicamente representada na Figura 7.23, carregada por uma tração uniforme \bar{t} , aplicada simetricamente

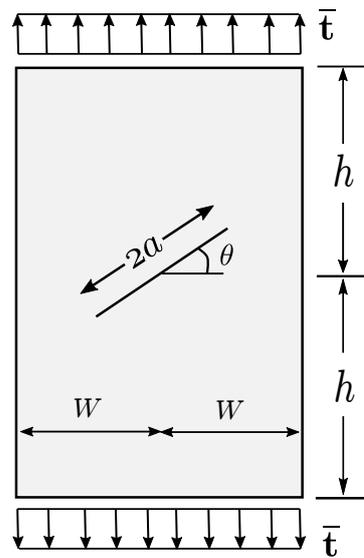


Figura 7.23 – Placa retangular com uma trinca reta central inclinada sob carregamento uniforme \bar{t} .

nas extremidades. A relação entre a largura e a altura é dada por $h/w = 2$. A placa tem um comprimento de $2a$ e faz um ângulo de $\theta = 45^\circ$ com relação a direção horizontal. Valores altamente precisos para este problema clássico foram publicados por Murakami (1987).

Para a análise deste problema, três casos foram considerados, com $a/w = 0.2, 0.4$ e 0.6 . A aproximação com o MQM considera base polinomial de primeira ordem e funções ponderadoras do tipo *quartic spline*, assim como domínios locais de colocação retangulares. O GSMF foi modelado com parâmetros de discretização $\alpha_s = 5 \sim 8$ e $\alpha_q = 0.5$, obtidos com a rotina de otimização.

A análise numérica foi realizada considerando-se a distribuição nodal representada na Figura 7.24, onde para todos os casos de comprimento de trinca considerados, apenas a distribuição nodal ao longo da trinca foi modificada, sempre sem considerar nenhum refinamento ao redor da ponta da trinca.

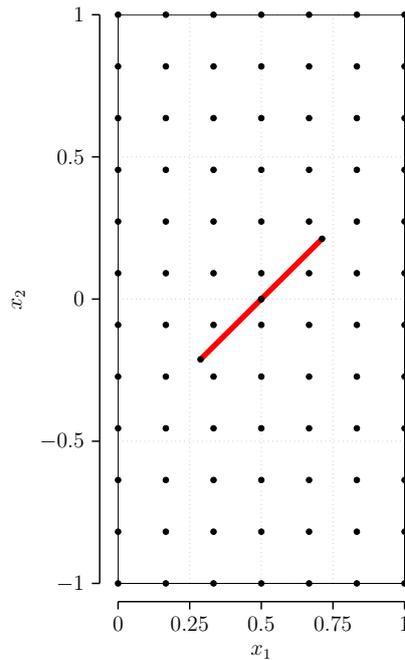


Figura 7.24 – Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $7 \times 12 = 84$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.6$. A linha vermelha representa as faces da trinca.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.16 e Tabela 7.17 , respectivamente para

Tabela 7.16 – Placa retangular com uma trinca central inclinada de $\theta = 45^\circ$, para os valores de $K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).

a/W	$K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.519	0.521	0.518	0.002	0.006
0.4	0.575	0.576	0.572	0.005	0.007
0.6	0.626	0.666	0.661	0.053	0.001

os valores de $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ e $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi a})$, assim como a diferença relativa em porcentagem dos valores obtidos em Murakami (1987), para $\theta = 45^\circ$. Para uma distribuição nodal simples, como a apresentada, os resultados obtidos com o GSMF são muito precisos, mesmo sem qualquer refinamento ao redor da ponta de nenhuma das trincas.

A configuração deformada da placa está esquematicamente representada na Figura 7.25.

Uma outra configuração nodal foi considerada, agora com um número maior de nós no segmento de trinca, com 10 nós, procurando assim melhor representar os fatores de intensidade de tensão. Os resultados obtidos com essa nova configuração foram similares

Tabela 7.17 – Placa retangular com uma trinca central inclinada de $\theta = 45^\circ$, para os valores de $K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).

a/W	$K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.529	0.508	0.507	0.043	0.002
0.4	0.532	0.529	0.529	0.005	0.001
0.6	0.585	0.569	0.567	0.032	0.003

aos obtidos nas tabelas 7.16 e 7.17, sendo apenas ligeiramente mais precisos que a configuração anterior. A configuração deformada da placa está esquematicamente representada na Figura 7.26.

7.2.5 - Placa com uma trinca interna de ângulo raso – Modo misto

Para um teste final, foi considerada uma placa retangular, com uma trinca interna de ângulo raso, representada esquematicamente na Figura 7.27. Um dos segmentos da trinca é horizontal com comprimento a enquanto o outro segmento forma um ângulo de 45° com a trinca horizontal e tem o comprimento b ; a projeção horizontal da trinca total é dada por $2c = a + \sqrt{2b/2}$. O centro da placa é o centro de encontro entre esses dois segmentos de trinca, que tem a altura equivalente ao dobro da largura, e é carregada nas pontas com uma tração uniforme de \bar{t} . Três casos foram considerados, $b/a = 0.2, 0.4$ e 0.6 , com $a/w = 0.1$.

Para esta última aplicação, uma nova rotina inovadora de otimização com AG foi preparada, adicionando a quantidade de nós no segmento de trinca como uma variável que deve ser minimizada. Sendo assim, o AG foi implementado e preparado para minimizar o tempo de processamento, o indicador de conformidade (C) e a quantidade de nós nos dois segmentos de trinca, escolhidos como funções objetivo dessa etapa. A variável α_q foi fixada em virtude da descontinuidade existente no modelo. A variável α_s a ser otimizada foi classificada como contínua e segue o intervalo $\alpha_s = 1.5 \sim 10$. A população inicial foi de 30 indivíduos, a função de aptidão foi escalonada utilizando um processo de classificação (*rank*), o operador de reprodução foi implementado baseando-se em uma seleção do tipo torneio, onde a mutação e o crossover foram limitados pelas restrições impostas. Por fim, o processo de otimização termina quando o número máximo de gerações de 50 é atingido ou quando a mudança média na função de aptidão for menor que 1×10^{-6} .

A análise numérica foi realizada considerando-se a distribuição nodal representada na

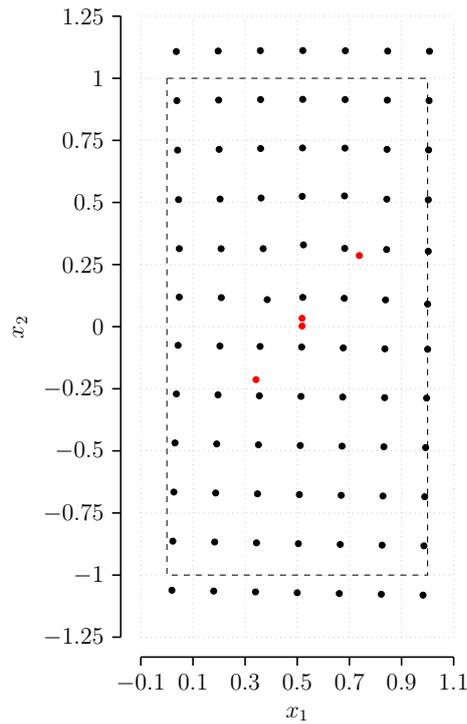


Figura 7.25 – Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.6$, sob carregamento uniforme. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

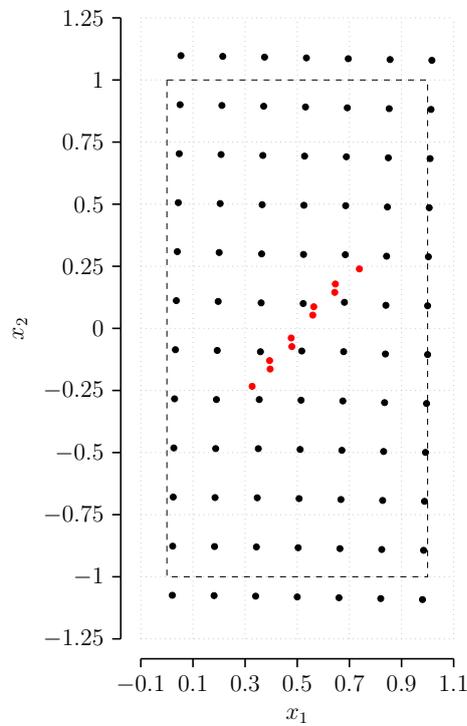


Figura 7.26 – Configuração deformada da placa, para $a/w = 0.6$, sob carregamento uniforme. Os nós vermelhos representam os nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

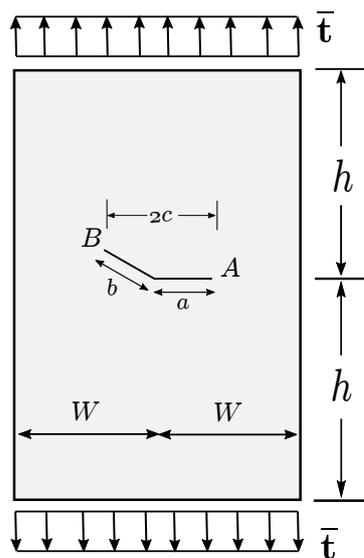


Figura 7.27 – Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso sob carregamento uniforme \bar{t} .

Figura 7.28, onde para todos os casos de comprimento de trinca considerados, apenas a distribuição nodal ao longo da trinca foi modificada, sempre sem considerar nenhum refinamento ao redor da ponta da trinca.

O fator de intensidade de tensão obtido para as pontas de trinca A e B, com uma distribuição nodal de 91 nós, são apresentados nas tabelas 7.18 e 7.19. Para efeito de

Tabela 7.18 – Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso, para os valores de $K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).

b/a	$K_I/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.988	0.993	0.995	0.007	0.002
0.4	0.987	0.989	0.990	0.002	0.001
0.6	0.923	0.987	0.986	0.063	0.001

comparação, resultados precisos foram apresentados por Murakami (1987). Novamente, para uma distribuição nodal simples, como a apresentada, os resultados obtidos com o GSMF foram muito precisos, mesmo sem qualquer refinamento ao redor da ponta de nenhuma das trincas. A otimização numérica demonstrou que apenas alguns nós no segmento de trinca são necessários para se obter bons resultados de forma rápida e precisa, tornando a abordagem ainda mais eficiente.

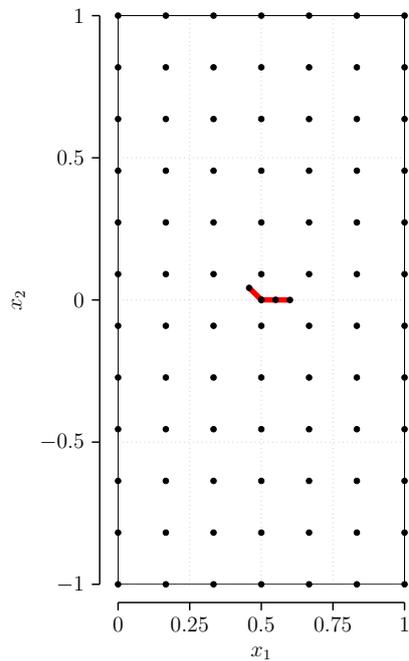


Figura 7.28 – Discretização de uma placa com uma distribuição nodal regular de $7 \times 12 = 84$ nós, com nós sobrepostos adicionais ao longo da trinca, para $a/w = 0.1$. A linha vermelha representa as faces da trinca.

Tabela 7.19 – Placa retangular com uma trinca interna de ângulo raso, para os valores de $K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$. GSMF representa os valores obtidos na presente pesquisa e J-DBEM representa os valores obtidos com o DBEM utilizando a integral J (Aliabadi e Portela, 1999). A porcentagem dos erros foi calculada a partir do valor de referência obtido em Murakami (1987).

b/a	$K_{II}/(\bar{t}\sqrt{\pi a})$			% Diferença	
	GSMF	J-DBEM	Murakami	GSMF	J-DBEM
0.2	0.032	0.030	0.028	0.125	0.067
0.4	0.037	0.036	0.033	0.108	0.083
0.6	0.031	0.032	0.030	0.032	0.063

8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1 - CONCLUSÕES

A formulação da técnica da subtração da singularidade foi estendida para o método sem malha local GSMF, resultando em uma forma eficiente e precisa de analisar deformações de modo misto de placas trincadas.

O método sem malha local, denominado *Generalized-Strain Mesh-Free formulation* (GSMF), é baseado no método dos resíduos ponderados e resulta na forma fraca local, que nada mais é do que o teorema do trabalho advindo da teoria das estruturas. Em uma região local arbitrária, o teorema do trabalho estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões estaticamente admissível e um campo de deformações cinematicamente admissível, resultando em uma formulação totalmente livre de integração numérica e com apenas termos de contorno.

Tanto distribuições nodais regulares quanto irregulares podem ser consideradas com o GSMF. Para cada nó de uma distribuição nodal, o tamanho do suporte compacto e o tamanho do domínio local de colocação são parâmetros importantes para a análise numérica, que pode afetar significativamente o desempenho da solução, como uma consequência direta do padrão da distribuição nodal. O GSMF tem a capacidade de definir automaticamente os parâmetros de discretização de uma distribuição nodal, por um processo de otimização multi-objetiva usando algoritmo genético.

A análise de placas trincadas com deformação em modo misto pode ser realizada de forma bastante eficiente com o GSMF, que utiliza a técnica da subtração da singularidade, permitindo, assim, o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão, como variáveis primárias do modelo numérico. Baseada no princípio da superposição, a técnica da subtração da singularidade regulariza o campo elástico através da subtração da singularidade de cada ponta de trinca, antes de sua solução com o método numérico. Como uma consequência dessa abordagem, a análise não necessita de distribuições nodais refinadas próximas da ponta da trinca, diferente de outros métodos numéricos conhecidos.

Os resultados numéricos, obtidos para os quatro casos de uma placa com trinca de borda com carregamento em modo-I, modo-II e modo misto, assim como o caso de uma placa com uma trinca central, mostraram uma notável precisão, para uma distribuição nodal relativamente simples, sem qualquer refinamento na ponta da trinca. Esses resultados

claramente demonstram a precisão da estratégia utilizando a técnica da subtração da singularidade, implementada no GSMF, tornando-o uma ótima ferramenta para analisar placas trincadas em modo misto.

Outra característica do GSMF que merece destaque é a composição da sua matriz de rigidez, que é esparsa e em banda, o que contribui para sua alta eficiência; advinda do processo de construção nodal da mesma.

Precisão e confiabilidade são duas características essenciais para métodos numéricos eficientes. Os resultados obtidos com a presente pesquisa estão em perfeita concordância com as soluções analíticas disponíveis. Desta forma, a alta precisão e estabilidade do GSMF implementado com a técnica da redução da singularidade, tornam o método confiável e robusto para a análise de placas com múltiplas trincas em modo misto.

8.1.1 - Publicações

Com o intuito de dar publicidade aos trabalhos que foram desenvolvidos por meio desta pesquisa e incentivar o desenvolvimento de novos trabalhos utilizando a formulação proposta, foi elaborado em paralelo o artigo inovador: *A Local Mesh Free Method with the Singularity Subtraction Technique*, que apresenta toda a base teórica necessária para a aplicação das formulações do método sem malha local com a técnica da subtração da singularidade. Adicionalmente, outros dois artigos foram publicados, baseados nos trabalhos desenvolvidos nesta pesquisa: *A Local Mesh Free Method for Linear Elasticity and Fracture Mechanics*, como um tributo ao professor Brebbia contendo as etapas iniciais do desenvolvimento das aplicações em mecânica da fratura, e *Meshfree Method with Reduced Integration and Automatic Parameter Optimization*, com toda a parte de otimização numérica dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha.

Todos os artigos foram submetidos e aceitos para publicação pela ELSEVIER (<https://www.elsevier.com/>) em seu *journal: Engineering Analysis with Boundary Elements* (<http://www.journals.elsevier.com/engineering-analysis-with-boundary-elements/>), que tem classificação A1 pela CAPES.

A ELSEVIER é a maior editora de literatura médica e científica do mundo, fazendo parte do grupo Reed Elsevier. Localizada em Amsterdã, a companhia tem grandes operações no Reino Unido, EUA, Europa e no Brasil.

8.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como foi demonstrado neste estudo, as formulações do método sem malha local resolvem com precisão, eficiência e ótima performance problemas relacionados à teoria da elasticidade clássica e mecânica da fratura linear elástica. Entretanto, ainda existem muitas áreas a serem exploradas, principalmente, considerando que este é um método novo e inovador. Sendo assim, como recomendações para trabalhos futuros, propõe-se:

- A expansão dos conceitos teóricos, procedimentos e estratégias empregadas neste estudo para a análise de domínios tridimensionais;
- A criação de novas formulações baseadas em um conjunto de campos de deformações cinematicamente admissíveis;
- Ampliação da base teórica do GSMF para a resolução de problemas de crescimento e propagação de trincas, no âmbito da mecânica da fratura linear elástica;
- A expansão dos conceitos teóricos, procedimentos e estratégias empregadas para a resolução de problemas relacionados à teoria da plasticidade;
- Otimização dos parâmetros adimensionais dos métodos sem malha utilizando outros métodos de otimização recentes como o *Symbiotic Organisms Search* e o *Particle Swarm*;
- Modificação do método de aproximação, aprimorando o método dos mínimos quadrados móveis ou substituindo por outros métodos, como o método dos mínimos quadrados móveis com polinômios ortogonais;
- Automatização completa do processo de geração de distribuições nodais em métodos sem malha.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aliabadi, M.H. e A. Portela (1999). *Crack Growth Analysis Using Boundary Elements*. Sydney Grammar School Press.
- Andújar, Rabindranath, Jaume Roset e Vojko Kilar (2011). “Beyond FEM: overview on physics simulation tools for structural engineers”. Em: *Technics Technologies Education Management* 6.3, pp. 555–571.
- Atluri, S. N., Z. D. Han e A.M. Rajendran (2004). “A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method Through the MLPG “Mixed” Approach”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences* 6.1, pp. 491–513.
- Atluri, S.N. e S. Shen (2002). “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods”. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences* 3.1, pp. 11–51.
- Atluri, S.N. e T. Zhu (1998). “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”. Em: *Computational Mechanics* 22.2, pp. 117–127.
- (2000). “New Concepts in Meshless Methods”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47, 537—556.
- Bagheri, A. et al. (2011). “Optimization of meshless local Petrov-Galerkin using genetic algorithm for 3D elasto–static problems”. Em: *International Journal of Engineering* 24.2, pp. 143–153.
- Baradaran, G.H. e M.J. Mahmoodabadi (2009). “Optimal pareto parametric analysis of two dimensional steady–state heat conduction problems by MLPG method”. Em: *International Journal of Engineering* 22.4, pp. 387–406.
- Belytschko, T. e T. Black (1999). “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing”. Em: *International journal for numerical methods in engineering* 45.1, 601–620.
- Belytschko, T., Y. Y. Lu e L. Gu (1994a). “Element-free Galerkin methods”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2, pp. 229–256. ISSN: 1097-0207.

- Belytschko, T., L. Gu e Y. Y. Lu (1994b). “Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods”. Em: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 2.3A, pp. 519–534.
- Belytschko, T. et al. (1996). “Smoothing and Accelerated Computations in the Element Free Galerkin Method”. Em: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 74.1–2, pp. 111–126.
- Bittencourt, T. N. et al. (1996). “Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D lefm problems”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 55.2, pp. 321–334.
- Bonet, J. e T. Lok (1999). “Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180.2, 97—115.
- Bordas, S., T. Rabczuk e G. Zi (2008). “Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 75.5, pp. 943–960.
- Bouchard, P. O., F. Bay e Y. Chaste (2003). “Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.35–36, pp. 3887–3908.
- Bouillard, P. e S. Suleau (1998). “Element-free Galerkin method for helmholtz problems: formulation and numerical assessment of the pollution effect”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 102.4, 317–335.
- Brahtz, J. H. A. (1933). “Stress distribution in a reentrant corner”. Em: *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* 55.1, pp. 31–37.
- Brebbia, Carlos Alberto e Stephen Walker (2013). *Boundary element techniques in engineering*. Elsevier.
- Caicedo, J. e A. Portela (2015). “Cracked plate analysis with the Dual Boundary Element Method and Williams eigenexpansion”. Em: *Engineering analysis with boundary elements* 52.1, pp. 16–23.
- (2017). “Direct computation of stress intensity factors in finite element method”. Em: *European Journal of Computational Mechanics* 26.3, pp. 309–335.
- Carpinteri, A., G. Ferro e G. Ventura (2004). “The partition of unity quadrature in elementfree crack modeling”. Em: *Computers and Structures* 81.18–19, pp. 1783–1794.

- Chen, Youping, James D. Lee e Azim Eskandarian (2006). *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Vol. 1. Springer Science Business Media, p. 200.
- Civelek, M. B. e F. Erdogan (1982). “Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip”. Em: *International Journal of Fracture* 19.2, pp. 139–159.
- Coelho, C.A.C., G.B. Lamont e D.A. Van Veldhuizen (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Springer New York.
- Deb, K. (2001). *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons.
- Deb, K. et al. (2002). “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”. Em: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6.2, pp. 182–197.
- Duarte, C.A. e J.T. Oden (1996). “Hp Clouds—an Hp Meshless Method”. Em: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 12, 673—705.
- Duflot, M. (2006). “A Meshless Method with Enriched Weight Functions for Three-Dimensional Crack Propagation”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65.12, pp. 1970–2006.
- Ebrahimnejad, M., N. Fallah e A.R. Khoei (2015). “Adaptive refinement in the meshless finite volume method for elasticity problems”. Em: *Computers & Mathematics with Applications* 69.12, pp. 1420–1443.
- Eftis, J., D.L. Jones e H. Liebowitz (1990). “Load Biaxiality and Fracture: Synthesis and Summary”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 36.4, pp. 537–574.
- Fenner, D.G. (1973). “Elastic Stress Singularity Analysis Using the Eigenfunction-Expansion Method”. Ph.D. University of London, Imperial College.
- Fichera, G (2006). *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems*. Springer.
- Finalyson, B.A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Vol. 87. Academic Press, p. 472. ISBN: 0122570502.
- Fleming, M. et al. (1997). “Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.8, pp. 1483–1504.
- Fredholm, I. (1906). “Solution d’un problème fondamental de la théorie de l’élasticité”. Em: *Arkiv för Matematik Astronomi och Fysk* 2 28.1, pp. 1–8.
- Gelfand, I.M. e G.E. Shilov (1964). *Generalized Functions, Vol. I: Properties and Operations*.

- Gen, M. e R. Cheng (2000). *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*. Wiley.
- Gingold, Robert A e Joseph J Monaghan (1977). “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”. Em: *Monthly notices of the royal astronomical society* 181.3, pp. 375–389.
- Goldberg, David E e John H Holland (1988). “Genetic algorithms and machine learning”. Em: *Machine learning* 3.2, pp. 95–99.
- Gu, Y. T. e L. C. Zhang (2008). “Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 75.5, pp. 986–1004.
- Haupt, Randy L e Sue Ellen Haupt (2004). *Practical genetic algorithms*. John Wiley & Sons.
- Hildebrand, Francis Begnaud (1962). *Advanced calculus for applications*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, p. 354. ISBN: 0130111899.
- Hiroshi, T., C.P. Paul e R.I. George (2000). *Stress Intensity Factors Handbook*. ASME.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT press.
- Irwin, G.R. (1957). “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 24, pp. 361–364.
- Jamil, M. e E.Y.K. Ng (2013). “Evaluation of Meshless Radial Basis Collocation Method (RBCM) for Heterogeneous Conduction and Simulation of Temperature Inside the Biological Tissues”. Em: *International Journal of Thermal Sciences* 68, pp. 42–52.
- Kansa, E.J. (1990). “Multiquadrics: A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics”. Em: *Computers and Mathematics with Applications* 19.8–9, pp. 127–145.
- Karihaloo, B. L. e Q. Z. Xiao (2001). “Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 68.15, pp. 1609–1630.
- Kirchhoff, G. (1859). “Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes”. Em: *Für die reine und angewandte Mathematik* 56.1, 285–313.
- Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt Jr. e M.P. Vecchi (1983). “Optimization by simulated annealing”. Em: *Science* 220.4598, pp. 671–680.

- Krysl, P. e T. Belytschko (1997). “Element-Free Galerkin Method: Convergence of the Continuous and Discontinuous Shape Functions”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148.3–4, pp. 257–277.
- Lancaster, Peter e Kes Salkauskas (1981). “Surfaces generated by moving least squares methods”. Em: *Mathematics of computation* 37.155, pp. 141–158.
- Lee, S.H. e Y.C. Yoon (2004). “Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61, 22–48.
- Libersky, L.D. et al. (1993). “High Strain Lagrangian Hydrodynamics”. Em: *Journal of Computational Physics* 109, 67–75.
- Liu, G. R. e Y. T. Gu (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media.
- Liu, G.R. (2009). *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC press.
- Liu, G.R. e Y.T. Gu (1999). “A point interpolation method”. Em: *Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics*, pp. 1009–1014.
- (2001a). “A Local Point Interpolation Method for Stress Analysis of Two-Dimensional Solids”. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 11.2, 221–236.
- (2001b). “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids”. Em: *Journal of Sound and vibration* 246.1, pp. 29–46.
- (2003). “A meshfree method: meshfree weak–strong (MWS) form method, for 2-D solids”. Em: *Computational Mechanics* 33.1, pp. 2–14.
- Liu, G.R. et al. (2002a). “Point Interpolation Method Based on Local Residual Formulation Using Radial Basis Functions”. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 14, 713–732.
- Liu, W.K., S. Jun e Y.F. Zhang (1995). “Reproducing Kernel Particle Methods”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20, 1081–1106.
- Liu, W.K., T. Belytschko e J.T. Oden (1996). “Meshless Methods: Special Issue”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Liu, X. et al. (2002b). “Radial Basis Point Interpolation Collocation Method For 2D Solid Problem”. Em: *Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods*, pp. 35–40.

- Lucy, L.B. (1977). “A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis”. Em: *Astronomical Journal* 82.12, 1013—1024.
- Mase, George Thomas (1999). *Continuum mechanics for engineers*. 2^a ed. CRC Press, p. 381. ISBN: 0849318556.
- Melenk, J.M. e I. Babuska (1996). “The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, 289—314.
- Moussaoui, A. e T. Bouziane (2013). “Comparative Study of the Effect of the Parameters of Sizing Data on Results by the Meshless Methods (MLPG)”. Em: *World Journal of Mechanics* 3.1, pp. 82–87.
- Murakami, Y. (1986). *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press.
- (1987). *Linear Elliptic Differential Equation and Eigen Problems*. Pergamon Press.
- Muravin, B. e E. Turkel (2002). “Advance Diffraction Method as a Tool for Solution of Complex Non-Convex Boundary Problems. Implementation and Practical Applications”. Em: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering: Meshfree Methods for Partial Differential Equations*. Ed. por M. Griebel e M.A. Schweitzer. Vol. 26. Springer Verlag.
- Muskhelishvili, N.I. (2010). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Netherlands.
- Nayroles, B., G. Touzot e P. Villon (1992). “Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements”. Em: *Computational Mechanics* 10, 307—318.
- Nguyen, V. P. et al. (2008). “Meshless methods: a review and computer implementation aspects”. Em: *Mathematics and Computers in Simulation* 79.3, pp. 763–813.
- Oliveira, T. e A. Portela (2016). “Weak-Form Collocation – a Local Meshless Method in Linear Elasticity”. Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 6, pp. 491–513.
- (2017). “Performance of the weak-form collocation meshless formulation”. Em: *Proceedings of the 6th International Symposium on Solid Mechanics*. 6th International Symposium on Solid Mechanics (MecSol). Ed. por E. L. Cardoso e M. Jr. Vaz. Joinville, Brazil: ABCM.
- Oliveira, T. et al. (2019). “A local mesh free method for linear elasticity and fracture mechanics”. Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 101, pp. 221–242.

- Oñate, E. e S. Idelsohn (1998). “A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems”. Em: *Computational Mechanics* 21.5, 283—292.
- Oñate, E. et al. (1996). “A finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, pp. 3839–3867.
- Oñate, E., F. Perazzo e J. Miquel (2001). “A Finite Point Method for Elasticity Problems”. Em: *Computers and Structures* 79, pp. 2151–2163.
- Organ, D.J., M.A. Fleming e T. Belytschko (1996). “Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies by Diffraction and Transparency”. Em: *Computational Mechanics* 18.3–4, pp. 225–235.
- Parsopoulos, K.E. e M.N. Vrahatis (2002). “Recent approaches to global optimization problems through particle swarm optimization”. Em: *Natural Computing* 1.235, pp. 671–680.
- Portela, A. (1993). *Dual boundary element analysis of crack growth*. reprint. Vol. 14. Computational Mechanics Publications, p. 176. ISBN: 9781853121876.
- Portela, A. e A. Charafi (2002). *Finite elements using Maple: a symbolic programming approach*. 1ª ed. Springer Science & Business Media. ISBN: 9783642627552.
- Portela, A., M.H. Aliabadi e D.P. Rooke (1991). “Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.3, pp. 445–470.
- Rabczuk, T. e T. Belytschko (2007). “A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.29–30, pp. 2777–2799.
- Rao, B.N. e S. Rahman (2004). “An Enriched Meshless Method for Non-Linear Fracture Mechanics”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59.2, pp. 197–223.
- Rao, S.S. (2009). *Engineering Optimization: Theory and Practice*. John Wiley & Sons.
- Reddy, N (2006). *An introduction to the Finite Element Method*. 3ª ed. Vol. 3. McGraw-Hill, p. 761. ISBN: 0070513554.
- Rösler, R. (1987). “On the Wedge/Notch Eigenvalues”. Em: *International Journal of Fracture* 33.1, pp. 61–67.

- Schaback, R. (2010). “Unsymmetric meshless methods for operator equations”. Em: *Numerische Mathematik* 114.1, pp. 629–651.
- Sih, G.C. e H. Liebowitz (1968). *Mathematical Theories of Brittle Fracture*. Fracture – An Advanced Treatise. Academic Press, p. 124.
- Sokolnikoff, I. S. (1956). *Mathematical theory of elasticity*. Vol. 83. McGraw-Hill New York.
- Sternberg, E. e W.T. Koiter (1958). “The Wedge Under a Concentrated Couple: A Paradox in Two Dimensional Elasticity”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 25, pp. 575–581.
- Strouboulis, T., I. Babuska e K. Copps (2000). “The design and analysis of the generalized finite element method”. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 181.1, pp. 43–69.
- Swegle, J.W., D.L. Hicks e S.W. Attaway (1995). “Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis”. Em: *Journal of Computational Physics* 116.1, pp. 123–134.
- Tong, P., T. H. H. Pian e S. J. Lasry (1973). “A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7.3, pp. 297–308.
- Vasilopoulos, D. (1988). “On the Determination of Higher Order Terms of Singular Elastic Stress Fields Near Corners”. Em: *Numerische Mathematik* 53.1, pp. 51–95.
- Wen, P. H. e M.H. Aliabadi (2007). “Applications of meshless method to fracture mechanics with enriched radial basis functions”. Em: *Durability of Structures and Health Monitoring* 3.18–19, pp. 107–109.
- Williams, M. L. (1952). “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 19.4, pp. 526–528.
- Xiao, Q. Z., B. L. Karihaloo e X. Y. Liu (2004). “Direct determination of SIF and higher order terms of mixed-mode cracks by a hybrid crack element”. Em: *International Journal of Fracture* 125.15, pp. 207–225.
- Zhang, X. et al. (2001). “Least-Squares Collocation Meshless Method”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51.9, 1089—1100.
- Zhu, T., J. Zhang e S.N. Atluri (1998). “A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach”. Em: *Computational Mechanics* 21, 223—235.

Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor e Robert Leroy Taylor (2000). *The Finite Element Method: The basis*. Butterworth-Heinemann, p. 689.