

**PUNÇÃO EM LAJES LISAS: MÉTODOS DE CÁLCULO,  
PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

**EDUARDO VELOSO DOS SANTOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**PUNÇÃO EM LAJES LISAS: MÉTODOS DE CÁLCULO,  
PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

**EDUARDO VELOSO DOS SANTOS**

ORIENTADOR: GUILHERME SALES SOARES DE AZEVEDO MELO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.DM – 11A/18

BRASÍLIA / DF: JUNHO – 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**PUNÇÃO EM LAJES LISAS: MÉTODOS DE CÁLCULO,  
PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

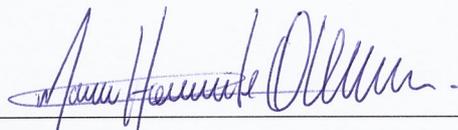
**EDUARDO VELOSO DOS SANTOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

**APROVADA POR:**



**Prof. Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo, Ph.D (UnB)**  
(Orientador)



**Prof. Marcos Honorato de Oliveira, D.Sc (UnB)**  
(Examinador interno)



**Prof. Leandro Mouta Trautwein, D.Sc (UNICAMP)**  
(Examinador externo)

BRASÍLIA/DF, 7 DE JUNHO DE 2018

## FICHA CATALOGRÁFICA

SANTOS, EDUARDO VELOSO DOS

**Punção em Lajes Lisas: Métodos de Cálculo, Prescrições Normativas e Exemplos de Aplicação.** [Distrito Federal] 2018.

xlii, 225 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Punção

2. Lajes lisas

3. Cálculo

4. Exemplos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Mestre)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTOS, E. V. (2018). Punção em Lajes Lisas: Métodos de Cálculo, Prescrições Normativas e Exemplos de Aplicação. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM – 11A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 225p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Eduardo Veloso dos Santos.

TÍTULO: Punção em Lajes Lisas: Métodos de Cálculo, Prescrições Normativas e Exemplos de Aplicação.

GRAU: Mestre em Estruturas e Construção Civil. ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

*Eduardo Veloso dos Santos*

Eduardo Veloso dos Santos

SHDB QL:32, Conjunto:12, Casa:01

CEP: 71.676-160 Brasília – DF – Brasil

e-mail: edduveloso@gmail.com

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço:

Aos meus familiares por todo o apoio imprescindível em minha vida.

Ao professor orientador Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo por me guiar e incentivar nesta pesquisa, bem como pelo valioso apoio dedicado a mim durante minha graduação e mestrado na Universidade de Brasília.

Ao Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC-UnB) por todo o aprendizado que tive como aluno do programa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Aos colegas, professores e funcionários da Universidade de Brasília.

## **RESUMO: PUNÇÃO EM LAJES LISAS: MÉTODOS DE CÁLCULO, PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

Autor: Eduardo Veloso dos Santos.

Orientador: Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil.

Brasília, 7 de Junho de 2018.

Em uma estrutura de edificação convencional, as lajes se apoiam em vigas, e estas se apoiam nos pilares. No sistema estrutural de lajes lisas, as lajes se apoiam diretamente sobre os pilares, dispensando as vigas. Este sistema resulta em uma série de vantagens construtivas, porém, potencializa o efeito dos esforços cortantes nas regiões de ligação da laje ao pilar, de modo que a laje tende a ser perfurada pelo apoio com o pilar. Esse fenômeno, que é crítico no dimensionamento de lajes lisas, é denominado punção.

Nesta pesquisa, é realizada uma revisão dos modelos de cálculo e prescrições normativas relativas à resistência à punção adotadas por três relevantes normas de projeto de estruturas de concreto: a NBR 6118:2014, o EUROCODE 2:2004 e o ACI 318:2014, além das recomendações do *fib* MODEL CODE:2010. A pesquisa objetiva criar um material atualizado, abrangente e esclarecedor sobre o tema da punção em lajes lisas. São trabalhadas as diversas situações de ocorrência do fenômeno em um pavimento: em ligações laje-pilar internas, de borda e de canto. São esclarecidas dúvidas recorrentes no meio técnico-científico a respeito do fenômeno da punção, especialmente quando o carregamento é excêntrico, ocasião em que aparecem os parâmetros “*W*” (módulo de resistência plástica) no modelo de cálculo da NBR 6118:2014 e do EUROCODE 2:2004, e “*J*” (análogo ao momento de inércia polar) no modelo do ACI 318:2014.

Além de sintetizar os modelos e prescrições normativas, estes são utilizados para dimensionar as ligações laje-pilar de uma edificação à título de exemplo, e para prever a carga de ruptura de um modelo experimental de ligação laje-pilar de borda em concreto protendido.

Constatou-se que o dimensionamento pelo ACI 318:2014 foi o mais conservador, requerendo mais armaduras de punção, enquanto o dimensionamento pela NBR 6118:2014 foi o menos conservador. Para o modelo experimental exemplificado, constata-se que o EUROCODE 2:2004 contém simplificações para os casos de ligações laje-pilar de borda e de canto que, apesar de simplificar os cálculos, podem resultar em previsões de carga de ruptura consideravelmente superiores à carga experimental, ou seja, contra a segurança.

**Palavras-chave:** Punção; Lajes lisas; Cálculo; Exemplos.

## **ABSTRACT: PUNCHING SHEAR IN FLAT SLABS: CALCULATION METHODS, NORMATIVE PRESCRIPTIONS AND EXAMPLES**

Author: Eduardo Veloso dos Santos.

Supervisor: Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo.

Post-graduation Program in Structures and Civil Construction.

Brasília, June 7th, 2018.

A conventional structure of a building has slabs supported on beams, and beams supported on columns. The structural system with flat slabs has slabs supported directly on columns, and no beams are required. This system leads to plenty of constructive advantages, but on the other hand it highlights the effect of shear forces in the slab's connections with columns, so that the slab tends to be perforated by the supporting column. This phenomenon, which is critical in the design of flat slabs, is known as punching shear.

In this research, a review is presented about the calculation models and normative prescriptions adopted by three relevant standards for designing concrete structures: the NBR 6118:2014, the EUROCODE 2:2004 and the ACI 318:2014, as well as the recommendations of *fib* MODEL CODE:2010. The research aims to create an up-to-date, wide-ranging and enlightening material about punching shear in flat slabs. The various scenarios of the phenomenon are studied on a pavement: internal, edge and corner slab-column connections. It clarifies common doubts among the technical-scientific people regarding the punching shear phenomenon, especially when the required load is eccentric, when the "W" (plastic resistance module) parameters appear in the calculation model of NBR 6118:2014 and EUROCODE 2:2004, and also the "J" (analogous to the polar moment of inertia) parameters in the ACI 318:2014 model.

In addition to reviewing the normative models and prescriptions, those are applied to design the slab-column connections of a building and to predict the ultimate load of an experimental edge connection made of prestressed concrete.

It was verified that the ACI 318:2014 design was the most conservative, requiring more shear reinforcement, while the NBR 6118:2014 design was the least conservative. For the experimental model exemplified, it was noted that EUROCODE 2:2004 contains simplifications for the cases of edge and corner connections which, although they simplify the calculations, they can result in significantly higher ultimate load predictions than the experimental load, that is, against safety.

**Keywords:** Punching shear; Flat slabs; Calculation; Examples.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.2. MOTIVAÇÃO .....	9
1.3. OBJETIVOS.....	9
1.4. METODOLOGIA .....	10
1.5. ESTRUTURA DO TRABALHO.....	10
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>12</b>
2.1. CARACTERÍSTICAS DA RUPTURA POR PUNÇÃO.....	12
2.2. PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM A RESISTÊNCIA À PUNÇÃO .....	15
2.2.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO.....	15
2.2.2. TAXA DE ARMADURA DE FLEXÃO TRACIONADA.....	16
2.2.3. DIMENSÕES E GEOMETRIA DO PILAR.....	16
2.2.4. ALTURA ÚTIL DA LAJE E A CONSIDERAÇÃO DO <i>SIZE EFFECT</i> .....	17
2.2.5. PRESENÇA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	18
<b>3. MODELO DE CÁLCULO E PRESCRIÇÕES NORMATIVAS .....</b>	<b>21</b>
3.1. NBR 6118:2014 – PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO – PROCEDIMENTO.....	24
3.1.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL.....	24
3.1.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL .....	25
3.1.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	28
3.1.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS .....	30
3.1.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA .....	35

3.1.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO.....	41
3.1.7. PROTENSÃO.....	47
3.1.8. VERIFICAÇÕES .....	48
3.1.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS.....	50
3.2. EUROCODE 2:2004 – <i>DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES – GENERAL RULES AND RULES FOR BUILDINGS</i> .....	54
3.2.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL.....	54
3.2.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL .....	54
3.2.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	58
3.2.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS.....	60
3.2.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA .....	61
3.2.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO.....	64
3.2.7. PROTENSÃO.....	66
3.2.8. VERIFICAÇÕES .....	66
3.2.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS.....	68
3.3. ACI 318:2014 – <i>BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE AND COMMENTARY</i> .....	70
3.3.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL.....	70
3.3.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL .....	71
3.3.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	73
3.3.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS.....	74
3.3.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA .....	79
3.3.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO.....	82

3.3.7. PROTENSÃO.....	83
3.3.8. VERIFICAÇÕES .....	85
3.3.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS.....	87
3.4. <i>fib</i> MODEL CODE <i>FOR CONCRETE STRUCTURES</i> 2010 .....	91
3.4.1. ESTIMATIVAS DA ROTAÇÃO $\psi$ DA LAJE.....	92
3.4.2. CÁLCULOS PRELIMINARES .....	96
3.4.3. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL, E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA AUSÊNCIA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO .....	98
3.4.4. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA PRESENÇA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	98
3.4.5. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	101
3.4.6. PROTENSÃO.....	105
3.4.7. VERIFICAÇÕES .....	106
3.4.8. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS.....	108
<b>4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....</b>	<b>110</b>
4.1. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELA NBR 6118:2014.....	117
4.1.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2 .....	117
4.1.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2 .....	122
4.1.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1 .....	130
4.2. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO EUROCODE 2:2004 .....	137
4.2.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2 .....	138
4.2.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2 .....	142
4.2.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1 .....	145

4.3. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO ACI 318:2014.....	148
4.3.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2 .....	148
4.3.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2 .....	152
4.3.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1 .....	158
4.4. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO <i>fib</i> MODEL CODE:2010.....	163
4.4.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2 .....	163
4.4.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2 .....	167
4.4.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1 .....	173
4.5. PREVISÃO DA CARGA DE RUPTURA EXPERIMENTAL.....	179
4.5.1. PREVISÃO PELA NBR 6118:2014 .....	183
4.5.2. PREVISÃO PELO EUROCODE 2:2004.....	187
4.5.3. PREVISÃO PELO ACI 318:2014.....	189
4.5.4. PREVISÃO PELO <i>fib</i> MODEL CODE:2010 .....	192
<b>5. ANÁLISE DOS MODELOS DE CÁLCULO.....</b>	<b>197</b>
5.1. ELABORAÇÃO DE UM PROGRAMA DE CÁLCULO.....	198
5.2. ANÁLISE PARAMÉTRICA .....	207
5.2.1. INFLUÊNCIA DA ALTURA ÚTIL .....	208
5.2.2. INFLUÊNCIA DA DIMENSÃO DO PILAR.....	211
5.2.3. INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE LINHAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO .....	212
5.2.4. INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CAMADAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	214
5.2.5. INFLUÊNCIA DA DISTÂNCIA DO PILAR À PRIMEIRA CAMADA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	215

5.2.6. INFLUÊNCIA DA DISTÂNCIA ENTRE AS CAMADAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO.....	216
5.2.7. INFLUÊNCIA DO MOMENTO FLETOR SOLCITANTE.....	217
<b>6. CONCLUSÕES .....</b>	<b>219</b>
6.1. SUJESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	221
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>222</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
Tabela 3.1 – Valores de $k_y$ e $k_x$ [adaptado – NBR 6118:2014] .....	31
Tabela 3.2 – Diâmetro máximo das armaduras de punção .....	99
Tabela 4.1 – Esforços de projeto nos pilares e esforços transferidos da laje ao pilar .....	113
Tabela 4.2 – Esforços transferidos da laje para o pilar .....	114
Tabela 4.3 – Parâmetros para cálculo de $d$ e $\rho$ .....	116
Tabela 4.4 – Características gerais de cada ligação laje-pilar .....	116
Tabela 4.5 – Cálculo de $W_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	117
Tabela 4.6 – Cálculo de $W_{1,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	118
Tabela 4.7 – Cálculo de $W_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	119
Tabela 4.8 – Cálculo de $W_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	120
Tabela 4.9 – Cálculo de $x_{cg,u_0}$ por trechos do perímetro crítico .....	123
Tabela 4.10 – Cálculo de $x_{cg,u_0}^*$ por trechos do perímetro crítico .....	123
Tabela 4.11 – Cálculo de $x_{cg,u_1}$ por trechos do perímetro crítico .....	123
Tabela 4.12 – Cálculo de $x_{cg,u_1}^*$ por trechos do perímetro crítico .....	124
Tabela 4.13 – Cálculo de $W_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	124
Tabela 4.14 – Cálculo de $W_{1,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	124
Tabela 4.15 – Cálculo de $W_{0,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	125
Tabela 4.16 – Cálculo de $W_{1,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	125
Tabela 4.17 – Cálculo de $x_{cg,u_{out}}$ por trechos do perímetro crítico .....	127
Tabela 4.18 – Cálculo de $x_{cg,u_{out}}^*$ por trechos do perímetro crítico .....	127
Tabela 4.19 – Cálculo de $W_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	128
Tabela 4.20 – Cálculo de $W_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	129
Tabela 4.21 – Cálculo de $x_{cg,u_0}$ por trechos do perímetro crítico .....	131

Tabela 4.22 – Cálculo de $x_{cg,u_0^*}$ por trechos do perímetro crítico .....	131
Tabela 4.23 – Cálculo de $x_{cg,u_1}$ por trechos do perímetro crítico.....	131
Tabela 4.24 – Cálculo de $x_{cg,u_1^*}$ por trechos do perímetro crítico.....	131
Tabela 4.25 – Cálculo de $W_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	132
Tabela 4.26 – Cálculo de $W_{1,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	132
Tabela 4.27 – Cálculo de $x_{cg,u_{out}}$ por trechos do perímetro crítico .....	135
Tabela 4.28 – Cálculo de $x_{cg,u_{out}^*}$ por trechos do perímetro crítico .....	135
Tabela 4.29 – Cálculo de $W_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	136
Tabela 4.30 – Parâmetros já calculados comuns à NBR 6118:2014 e ao EUROCODE 2:2004 .....	137
Tabela 4.31 – Cálculo de $W_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	140
Tabela 4.32 – Cálculo de $W_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	140
Tabela 4.33 – Cálculo de $W'_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico .....	144
Tabela 4.34 – Cálculo de $J_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	148
Tabela 4.35 – Cálculo de $J_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	150
Tabela 4.36 – Cálculo de $J_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico.....	151
Tabela 4.37 – Cálculo de $x_{cg,b_0}$ por trechos do perímetro crítico.....	152
Tabela 4.38 – Cálculo de $J_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	153
Tabela 4.39 – Cálculo de $J_{0,x}$ por trechos do perímetro crítico.....	153
Tabela 4.40 – Cálculo de $x_{cg,b_{out}}$ por trechos do perímetro crítico.....	155
Tabela 4.41 – Cálculo de $J_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	156
Tabela 4.42 – Cálculo de $J_{out,x}$ por trechos do perímetro crítico.....	156
Tabela 4.43 – Cálculo de $x_{cg,b_0}$ por trechos do perímetro crítico.....	158
Tabela 4.44 – Cálculo de $J_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	159
Tabela 4.45 – Cálculo de $x_{cg,b_{out}}$ por trechos do perímetro crítico.....	161
Tabela 4.46 – Cálculo de $J_{out,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	161
Tabela 4.47 – Cálculo de $x_{cg,b_1}$ por trechos do perímetro crítico .....	167

Tabela 4.48 – Cálculo de $x_{cg,b_{out}}$ por trechos do perímetro crítico .....	170
Tabela 4.49 – Cálculo de $x_{cg,b_1}$ por trechos do perímetro crítico .....	173
Tabela 4.50 – Cálculo de $x_{cg,b_{out}}$ por trechos do perímetro crítico .....	176
Tabela 4.51 – Força e inclinação das cordoalhas de protensão.....	181
Tabela 4.52 – Cálculo de $x_{cg,u_0}$ por trechos do perímetro crítico .....	183
Tabela 4.53 – Cálculo de $x_{cg,u_1}$ por trechos do perímetro crítico.....	184
Tabela 4.54 – Cálculo de $x_{cg,u_0}^*$ por trechos do perímetro crítico .....	184
Tabela 4.55 – Cálculo de $x_{cg,u_1}^*$ por trechos do perímetro crítico .....	184
Tabela 4.56 – Cálculo de $W_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico .....	185
Tabela 4.57 – Cálculo de $W_{1,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	185
Tabela 4.58 – Cálculo de $x_{cg,b_0}$ por trechos do perímetro crítico.....	189
Tabela 4.59 – Cálculo de $J_{0,y}$ por trechos do perímetro crítico.....	190
Tabela 4.60 – Cálculo de $x_{cg,b_1}$ por trechos do perímetro crítico.....	192
Tabela 5.1 – Resumo dos dimensionamentos das ligações laje-pilar à punção .....	197
Tabela 5.2 – Resumo das cargas de ruptura previstas para o modelo L14 de BARBÁN (2008) .....	198

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
Figura 1.1 – Lajes sobre vigas.....	1
Figura 1.2 – Deslocamentos nas lajes (m).....	2
Figura 1.3 – Momento fletor nas lajes na direção x-x (kNm/m).....	2
Figura 1.4 – Momento fletor nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 3 .....	2
Figura 1.5 – Momento fletor nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 2 .....	3
Figura 1.6 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x (kN/m).....	3
Figura 1.7 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 3 .....	3
Figura 1.8 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 2.....	4
Figura 1.9 – Lajes lisas.....	4
Figura 1.10 – Superfície tronco-piramidal de punção.....	5
Figura 1.11 – Lajes cogumelo .....	5
Figura 1.12 – <i>Pipers Row Car Park</i> , em <i>Wolverhampton</i> , Inglaterra [WOOD (1997)] .....	7
Figura 1.13 – <i>135 Deguire Boulevard</i> , em <i>Montreal</i> , Canadá, 2008 [ <a href="http://www.tvanouvelles.ca">http://www.tvanouvelles.ca</a> ] .....	7
Figura 1.14 – Pátio de estacionamento, em <i>Christchurch</i> , Nova Zelândia, 2011 [ <a href="https://reidmiddleton.wordpress.com">https://reidmiddleton.wordpress.com</a> ] .....	7
Figura 1.15 – Colapso parcial em uma piscina, em <i>Krasnodar</i> , Rússia, 2013 [ <a href="http://www.yugopolis.ru">http://www.yugopolis.ru</a> ].....	8
Figura 2.1 – Inclinação das fissuras características da punção [modificado – EUROCODE 2:2004] .....	12
Figura 2.2 – Modelo de bielas e tirantes .....	13
Figura 2.3 – Modos de ruptura por punção em lajes lisas [modificado – FERREIRA (2010)]13	13
Figura 2.4 – Classificações da punção em função do tipo de carregamento [modificado – TASSINARI (2011)].....	14

Figura 2.5 – Armadura contra colapso progressivo .....	15
Figura 2.6 – Influência da taxa de armadura de flexão tracionada .....	16
Figura 2.7 – Tipos de armaduras de punção para lajes lisas [FERREIRA (2010)].....	19
Figura 2.8 – Distribuições ruins das armaduras de punção [modificado – FERREIRA (2010)] .....	20
Figura 2.9 – Formas de distribuição das armaduras de punção .....	20
Figura 3.1 – Esquema dos esforços em uma ligação laje-pilar .....	21
Figura 3.2 – Exemplo das denominações de linhas e camadas de armaduras de punção .....	23
Figura 3.3 – Referencial cartesiano .....	23
Figura 3.4 – Perímetro crítico $u_0$ em pilares internos [modificado – NBR 6118:2014] .....	24
Figura 3.5 – Perímetro crítico $u_1$ em pilares internos [modificado – NBR 6118:2014] .....	25
Figura 3.6 – Definição da altura útil e dos perímetros críticos no caso de ábaco ou capitel [modificado – NBR 6118:2014].....	26
Figura 3.7 – Disposição da armadura de punção. Vista em corte [modificado – NBR 6118:2014] .....	27
Figura 3.8 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar internas [modificado – NBR 6118:2014] .....	29
Figura 3.9 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar internas.....	30
Figura 3.10 – Distribuição das tensões de cisalhamento decorrentes do momento fletor em uma ligação laje-pilar interna .....	32
Figura 3.11 – Distribuição das tensões de cisalhamento decorrentes do momento fletor em uma ligação laje-pilar interna .....	33
Figura 3.12 – Traçado dos perímetros críticos $u_0$ e $u_0^*$ em ligações laje-pilar de borda .....	35
Figura 3.13 – Traçado dos perímetros críticos $u_1$ e $u_1^*$ em ligações laje-pilar de borda [modificado – NBR 6118:2014].....	35
Figura 3.14 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar de borda .....	36
Figura 3.15 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}^*$ em ligações laje-pilar de borda .....	37

Figura 3.16 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar de borda.....	38
Figura 3.17 – Translação de $F_{sd}$ , de onde surge o momento de correção $M_{sd,y,i}^*$ .....	39
Figura 3.18 – Traçado dos perímetros críticos $u_0$ e $u_0^*$ em ligações laje-pilar de canto.....	41
Figura 3.19 – Traçado dos perímetro críticos $u_1$ e $u_1^*$ em ligações laje-pilar de canto [modificado – NBR 6118:2014].....	41
Figura 3.20 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar de canto.....	42
Figura 3.21 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}^*$ em ligações laje-pilar de canto .....	43
Figura 3.22 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar de canto .....	45
Figura 3.23 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de $8d$ do pilar...	50
Figura 3.24 – Parâmetros para o cálculo de $W_{i,x}$ por trecho .....	50
Figura 3.25 – Definição da altura útil e dos perímetros de críticos no caso de ábaco ou capitel [modificado – EUROCODE 2:2004] .....	56
Figura 3.26 – Disposição das armaduras de punção .....	57
Figura 3.27 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar internas [modificado – EUROCODE 2:2004].....	59
Figura 3.28 – Momentos fletores nas duas direções ortogonais [modificado – EUROCODE 2:2004] .....	61
Figura 3.29 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar de borda .....	62
Figura 3.30 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}^*$ em ligações laje-pilar de borda.....	63
Figura 3.31 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}$ em ligações laje-pilar de canto.....	64
Figura 3.32 – Traçado dos perímetros críticos $u_{out}^*$ em ligações laje-pilar de canto .....	65
Figura 3.33 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de $6d$ do pilar...	69
Figura 3.34 – Perímetro crítico $b_0$ à distância $d/2$ do pilar [modificado – ACI 318:2014] ....	70
Figura 3.35 – Parâmetro $\beta$ em pilares de seção transversal côncava [modificado – ACI 318:2014] .....	71
Figura 3.36 – Definição da altura útil e dos perímetros críticos nos casos adoção de ábaco ou capitel .....	72

Figura 3.37 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar internas [modificado – ACI 318:2014] .....	74
Figura 3.38 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar internas .....	75
Figura 3.39 – Dimensões $b_{x,i}$ e $b_{y,i}$ .....	77
Figura 3.40 – Distribuição linear do campo de tensões decorrentes do momento fletor .....	77
Figura 3.41 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar de borda .....	79
Figura 3.42 – Perímetro crítico em ligações laje-pilar de borda [modificado – ACI 318:2014] .....	79
Figura 3.43 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar de borda .....	80
Figura 3.44 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar de borda .....	82
Figura 3.45 – Perímetro crítico em ligações laje-pilar de canto [modificado – ACI 318:2014] .....	82
Figura 3.46 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar de canto .....	83
Figura 3.47 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de $10h$ do pilar. ....	87
Figura 3.48 – Parâmetros $J_{i,y}$ e $J_{i,x}$ em faces de perímetros críticos poligonais .....	88
Figura 3.49 – Parâmetros $J_{i,y}$ e $J_{i,x}$ em faces de perímetros críticos circunferenciais.....	90
Figura 3.50 – Diferenciação das alturas úteis $d$ e $d_v$ [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010] .....	91
Figura 3.51 – Perímetro crítico básico em volta da área carregada [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010].....	92
Figura 3.52 – Perímetro crítico básico para grandes áreas carregadas [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010] .....	92
Figura 3.53 – Rotação $\psi$ da laje [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010] .....	93
Figura 3.54 – Determinação das excentricidades $e_{u,x,i}$ e $e_{u,y,l}$ [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010].....	95
Figura 3.55 – Regras para disposição das armaduras de punção [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010].....	99

Figura 3.56 – Armaduras de punção ativadas na falha [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010].....	100
Figura 3.57 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar internas [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010].....	102
Figura 3.58 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar de borda [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010] .....	103
Figura 3.59 – Perímetro crítico $b_{out}$ para ligações laje-pilar de canto [modificado – <i>fib</i> MODEL CODE:2010] .....	104
Figura 3.60 – Verificação gráfica da carga característica de ruptura.....	108
Figura 3.61 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje.....	109
Figura 4.1 – Modelo do edifício no software SAP2000.....	110
Figura 4.2 – Deformações de projeto no pavimento-tipo.....	111
Figura 4.3 – Mapeamento dos esforços de projeto no pavimento-tipo ao longo da direção $\bar{x}$ .....	111
Figura 4.4 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 1 .....	112
Figura 4.5 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 2 .....	112
Figura 4.6 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 3 .....	112
Figura 4.7 – Esforços de projeto nos pilares .....	113
Figura 4.8 – Esforços nos tramos de pilar no referencial global do SAP2000 .....	114
Figura 4.9 – Armaduras de flexão do pavimento .....	115
Figura 4.10 – Perímetros críticos para a ligação B2 pela NBR 6118:2014 .....	117
Figura 4.11 – Perímetros críticos para a ligação A2 pela NBR 6118:2014 .....	122
Figura 4.12 – Perímetros críticos para a ligação A1 pela NBR 6118:2014 .....	130
Figura 4.13 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo EUROCODE 2:2004.....	138
Figura 4.14 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo EUROCODE 2:2004 .....	142
Figura 4.15 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo EUROCODE 2:2004 .....	145
Figura 4.16 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo ACI 318:2014.....	148

Figura 4.17 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo ACI 318:2014 .....	152
Figura 4.18 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo ACI 318:2014 .....	158
Figura 4.19 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010 .....	163
Figura 4.20 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010.....	167
Figura 4.21 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010.....	173
Figura 4.22 – Detalhamento das armaduras de flexão passivas e do esquema de carregamento, em planta [modificado – BARBÁN (2008)] .....	179
Figura 4.23 – Detalhamento das monocordoalhas de protensão [modificado – BARBÁN (2008)].....	180
Figura 4.24 – Perímetros críticos para o modelo L14 pela NBR 6118:2014.....	183
Figura 4.25 – Perímetro crítico para o modelo L14 pelo ACI 318:2014 .....	189
Figura 4.26 – Perímetros críticos para o modelo L14 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010.....	192
Figura 5.1 – Menu inicial do programa.....	199
Figura 5.2 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pela NBR 6118:2014 .....	200
Figura 5.3 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo EUROCODE 2:2004.....	201
Figura 5.4 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo ACI 318:2014.....	201
Figura 5.5 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010 .....	202
Figura 5.6 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pela NBR 6118:2014 .....	203
Figura 5.7 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo EUROCODE 2:2004.....	203
Figura 5.8 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo ACI 318:2014.....	204
Figura 5.9 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010 .....	204
Figura 5.10 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pela NBR 6118:2014.....	205
Figura 5.11 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo EUROCODE 2:2004 .....	205
Figura 5.12 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo ACI 318:2014 .....	206
Figura 5.13 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo <i>fib</i> MODEL CODE:2010.....	206
Figura 5.14 – Influência da altura útil, $d$ .....	209
Figura 5.15 – Influência da altura útil, $d$ , nas tensões resistentes .....	210

Figura 5.16 – Influência da dimensão do pilar, $c$ .....	212
Figura 5.17 – Influência da quantidade de linhas de armaduras de punção, $n$ .....	213
Figura 5.18 – Influência da quantidade de camadas de armaduras de punção, $q$ .....	214
Figura 5.19 – Influência da distância do pilar à primeira camada de armaduras de punção, $s_0$ .....	215
Figura 5.20 – Influência da distância entre camadas de armaduras de punção, $s_r$ .....	216
Figura 5.21 – Influência do momento fletor solicitante, $M_{sd,y}$ .....	218

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$A_i$	Área de uma face da seção crítica $b_i$ [mm <sup>2</sup> ];
$A_{sw}$	Área de aço da seção transversal das armaduras de punção por camada [mm <sup>2</sup> ] (abordagens – NBR 6118:2014, EUROCODE 2:2004 e ACI 318:2014);
	Área de aço da seção transversal das armaduras de punção contidas na região entre $0,35d_v$ e $d_v$ [mm <sup>2</sup> ] (abordagem – <i>fib</i> MODEL CODE:2010);
$A_{s,x}$	Área de aço das armaduras de flexão na direção $x$ [mm <sup>2</sup> ];
$A_{s,y}$	Área de aço das armaduras de flexão na direção $y$ [mm <sup>2</sup> ];
$a$	Constante real [adimensional];
$a_n$	Maior dimensão do pilar [mm];
$b$	Constante real [mm];
$b_c$	Perímetro crítico interno ao capitel ou ábaco [mm];
$b_{c,out}$	Perímetro crítico externo ao capitel ou ábaco [mm];
$b_i$	$i$ -ésimo perímetro crítico [mm], podendo representar: $b_0, b_c, b_{out}$ ou $b_{c,out}$ (abordagem – ACI 318:2014); $b_1$ ou $b_{out}$ (abordagem – <i>fib</i> MODEL CODE:2010);
$b_n$	Dimensão do pilar perpendicular a $a_n$ [mm];
$b_{out}$	Perímetro crítico externo à região das armaduras de punção [mm];
$b_s$	Largura da faixa entre pilares [mm];
$b_{u,i}$	Diâmetro do círculo cuja área é a mesma da região interna ao $i$ -ésimo perímetro crítico básico [mm];
$b_{u,out}$	Diâmetro do círculo cuja área é a mesma da região interna a $b_{out}$ [mm];
$b_{u,1}$	Diâmetro do círculo cuja área é a mesma da região interna a $b_1$ [mm];

$b_{x,i}$	Dimensão projetada no eixo $x$ do $i$ -ésimo perímetro crítico [mm];
$b_{x,out}$	Dimensão projetada no eixo $x$ perímetro $u_{out}$ [mm];
$b_{x,0}$	Dimensão projetada no eixo $x$ perímetro $u_0$ [mm];
$b_{y,i}$	Dimensão projetada no eixo $y$ do $i$ -ésimo perímetro crítico [mm];
$b_{y,out}$	Dimensão projetada no eixo $y$ perímetro $u_{out}$ [mm];
$b_{y,0}$	Dimensão projetada no eixo $y$ perímetro $u_0$ [mm];
$b_0$	Perímetro crítico afastado $d/2$ da face do pilar [mm];
$b_{0,i}$	Perímetro crítico resistente ao cortante para o $i$ -ésimo perímetro crítico [mm];
$b_{0,out}$	Perímetro crítico resistente ao cortante, relativo à $b_{out}$ [mm];
$b_{0,1}$	Perímetro crítico resistente ao cortante, relativo à $b_1$ [mm];
$b_1$	Perímetro crítico básico afastado $0,5d_v$ do pilar [mm];
$C$	Superfície crítica na face do pilar (abordagem – NBR 6118:2014) [mm];
$C'$	Superfície crítica afastada $2d$ do pilar (abordagem – NBR 6118:2014) [mm];
$C''$	Superfície crítica afastada $2d$ das armaduras de punção externas (abordagem – NBR 6118:2014) [mm];
$C'_1$	Contorno crítico interno ao capitel ou ábaco (abordagem – NBR 6118:2014) [mm];
$C'_2$	Contorno crítico externo ao capitel ou ábaco (abordagem – NBR 6118:2014) [mm];
$c$	Lado do pilar quadrado; ou diâmetro do pilar circular [mm];
$c_x$	Dimensão do pilar paralela ao eixo $x$ [mm];
$c_y$	Dimensão do pilar paralela ao eixo $y$ [mm];
$d$	Altura útil da laje [mm];
$d_a$	Altura útil da laje no perímetro $u_c$ , na existência de capitel ou ábaco [mm];
$d_c$	Altura útil da laje na face do pilar, na existência de capitel ou ábaco [mm];

$d_g$	Diâmetro máximo do agregado [mm];
$d_H$	Altura útil da laje na face do pilar, na existência de capitel ou ábaco [mm];
$d_v$	Altura útil para caracterização da superfície de ruptura por punção [mm];
$d_{v,out}$	Altura útil para caracterização da superfície de ruptura por punção no perímetro $b_{out}$ [mm];
$d_x$	Altura útil da laje na direção $x$ [mm];
$d_y$	Altura útil da laje na direção $y$ [mm];
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço das armaduras de flexão [MPa];
$E_{sw}$	Módulo de elasticidade do aço das armaduras de punção [MPa];
$e_{P,i}$	Excentricidade da força $N_{Pk,i}$ em relação ao centro geométrico da seção, tomada na posição onde os cabos interceptam o $i$ -ésimo perímetro crítico.
$e_{u,i}$	Excentricidade da resultante das força solicitantes em relação ao centro geométrico do $i$ -ésimo perímetro crítico [mm];
$e_{u,out}$	Excentricidade da resultante das força solicitantes em relação ao centro geométrico de $b_{out}$ [mm];
$e_{u,máx,i}$	Maior excentricidade entre $e_{u,x,i}$ e $e_{u,y,i}$ [mm];
$e_{u,x,i}$	Excentricidade da força solicitante na direção $x$ em relação ao centroide do $i$ -ésimo perímetro crítico básico [mm];
$e_{u,x,out}$	Excentricidade da força solicitante na direção $x$ em relação ao centroide do perímetro $b_{out}$ [mm];
$e_{u,x,1}$	Excentricidade da força solicitante na direção $x$ em relação ao centroide do perímetro $b_1$ [mm];
$e_{u,y,i}$	Excentricidade da força solicitante na direção $y$ em relação ao centroide do $i$ -ésimo perímetro crítico básico [mm];
$e_{u,y,out}$	Excentricidade da força solicitante na direção $y$ em relação ao centroide do perímetro $b_{out}$ [mm];

$e_{u,y,l}$	Excentricidade da força solicitante na direção $y$ em relação ao centroide do perímetro $b_1$ [mm];
$e_{u,l}$	Excentricidade da resultante das força solicitantes em relação ao centro geométrico de $b_1$ [mm];
$e_x$	Excentricidade da força solicitante na direção $x$ em relação ao centro geométrico do pilar [mm];
$e_y$	Excentricidade da força solicitante na direção $y$ em relação ao centro geométrico do pilar [mm];
$F$	Força [N];
$F_{Pk,j}$	Força na $j$ -ésima cordoalha de protensão [N];
$F_{Sd}$	Carga solicitante de projeto na ligação laje-pilar [N];
$F_{Sd,\bar{z}}$	Carga vertical de projeto transferida ao pilar [kN];
$F_{Sd,\bar{z},inf}$	Carga vertical solicitante de projeto no tramo inferior do pilar [kN];
$F_{Sd,\bar{z},sup}$	Carga vertical solicitante de projeto no tramo superior do pilar [kN];
$F_{Sk}$	Carga solicitante característica na ligação laje-pilar [N];
$f_{bk}$	Tensão característica de aderência das armaduras ao concreto [MPa];
$f'_c$	Resistência à compressão especificada do concreto [MPa];
$f_{ck}$	Tensão de resistência característica do concreto à compressão [MPa];
$f_{pc,c}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro $b_c$ [MPa];
$f_{pc,c,out}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro $b_{c,out}$ [MPa];
$f_{pc,i}$	Tensão normal devida à protensão no $i$ -ésimo perímetro crítico [MPa];
$f_{pc,out}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro $b_{out}$ [MPa];
$f_{pc,0}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro $b_0$ [MPa];
$f_{yk}$	Tensão de escoamento característica do aço [MPa];
$f_{ywk}$	Tensão de escoamento característica das armaduras de punção observados os limites de norma [MPa];

$h$	Altura total da laje; [mm];
$I_{\Delta b,x}$	Momento de 2ª ordem de um trecho $\Delta b$ da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,x}$ [mm <sup>4</sup> ];
$I_{\Delta b,y}$	Momento de 2ª ordem de um trecho $\Delta b$ da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,y}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{i,x}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,x}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{i,y}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,y}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{out,x}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica $b_{out}$ em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,x}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{out,y}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica $b_{out}$ em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,y}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{0,x}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica $b_0$ em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,x}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{0,y}$	Análogo ao momento de inércia polar da seção crítica $b_0$ em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,y}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{\Delta b,x}$	Análogo ao momento de inércia polar de um trecho $\Delta b$ da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,x}$ [mm <sup>4</sup> ];
$J_{\Delta b,y}$	Análogo ao momento de inércia polar de um trecho $\Delta b$ da seção crítica em relação ao eixo de ação do momento fletor $M_{Sd,y}$ [mm <sup>4</sup> ];
$k_{dg}$	Coefficiente de engrenamento dos agregados [adimensional];
$k_{e,i}$	Coefficiente de excentricidade para o $i$ -ésimo perímetro crítico [adimensional];
$k_{e,out}$	Coefficiente de excentricidade para o perímetro $b_{out}$ [adimensional];
$k_{e,1}$	Coefficiente de excentricidade para o perímetro $b_1$ [adimensional];
$k_{sys}$	Coefficiente para cálculo da resistência da biela [adimensional];
$k_x$	Coefficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,x}$ transmitida por

	cisalhamento [adimensional];
$k_{x,ext}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,x}$ transmitida por cisalhamento em ligações laje pilar de borda ou de canto [adimensional];
$k_y$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,y}$ transmitida por cisalhamento [adimensional];
$k_{y,ext}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,y}$ transmitida por cisalhamento em ligações laje pilar de canto [adimensional];
$k_{\psi,d,i}$	Coeficiente relacionado à rotação de projeto da laje calculada pelo $i$ -ésimo perímetro crítico [adimensional];
$k_{\psi,d,out}$	Coeficiente relacionado à rotação de projeto da laje calculada pelo perímetro $b_{out}$ [adimensional];
$k_{\psi,d,1}$	Coeficiente relacionado à rotação de projeto da laje calculada pelo perímetro $b_1$ [adimensional];
$k_{\psi,k,i}$	Coeficiente relacionado à rotação característica da laje calculada pelo $i$ -ésimo perímetro crítico [adimensional];
$k_{\psi,k,1}$	Coeficiente relacionado à rotação característica da laje calculada pelo perímetro $b_1$ [adimensional];
$\ell_c$	Distância entre a borda do capitel ou ábaco e a face do pilar [mm];
$\ell_H$	Distância entre a borda do ábaco ou capitel e a face do pilar [mm];
$\ell_{H,x}$	Distância entre a borda do ábaco ou capitel e a face do pilar na direção $x$ [mm];
$\ell_{H,y}$	Distância entre a borda do ábaco ou capitel e a face do pilar na direção $y$ [mm];
$\ell_{min}$	Menor lado do ábaco ou capitel [mm];
$\ell_{o,x}$	Dimensão da abertura da laje na direção $x$ [mm];
$\ell_{o,y}$	Dimensão da abertura da laje na direção $y$ [mm];
$M_{Sd}$	Momento solicitante de projeto na ligação laje-pilar [N·mm];
$M_{Sd,x}$	Momento solicitante de projeto na direção $x$ [N·mm];

$M_{Sd,\bar{x}}$	Momento fletor transferido ao pilar na direção $\bar{x}$ [kN·m];
$M_{Sd,x,i}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $x$ relativo ao $i$ -ésimo perímetro crítico reduzido [N·mm];
$M_{Sd,\bar{x},inf}$	Momento fletor na direção $\bar{x}$ no tramo inferior do pilar [kN·m];
$M_{Sd,x,out}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $x$ [N·mm]; relativo a $u_{out}^*$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); relativo a $b_{out}$ (abordagem – ACI 318:2014);
$M_{Sd,\bar{x},sup}$	Momento fletor na direção $\bar{x}$ no tramo superior do pilar [kN·m];
$M_{Sd,x,0}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $x$ [N·mm]; relativo a $u_0^*$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); relativo a $b_0$ (abordagem – ACI 318:2014);
$M_{Sd,x,1}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $x$ relativo a $u_1^*$ [N·mm];
$M_{Sd,y}$	Momento solicitante de projeto na direção $y$ [N·mm];
$M_{Sd,\bar{y}}$	Momento fletor transferido ao pilar na direção $\bar{y}$ [kN·m];
$M_{Sd,y,i}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $y$ relativo ao $i$ -ésimo perímetro crítico reduzido [N·mm];
$M_{Sd,\bar{y},inf}$	Momento fletor na direção $\bar{y}$ no tramo inferior do pilar [kN·m];
$M_{Sd,y,out}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $y$ [N·mm]; relativo a $u_{out}^*$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); relativo a $b_{out}$ (abordagem – ACI 318:2014);
$M_{Sd,\bar{y},sup}$	Momento fletor na direção $\bar{y}$ no tramo superior do pilar [kN·m];
$M_{Sd,y,0}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $y$ [N·mm]; relativo a $u_0^*$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); relativo a $b_0$ (abordagem – ACI 318:2014);
$M_{Sd,y,1}^*$	Momento fletor equilibrante de projeto na direção $y$ relativo a $u_1^*$ [N·mm];

$M_{Sk}$	Momento solicitante característico na ligação laje-pilar [N·mm];
$M_{Sk,x}$	Momento solicitante característico na direção $x$ [N·mm];
$M_{Sk,x,i}^*$	Momento fletor equilibrante característico na direção $x$ relativo ao $i$ -ésimo perímetro crítico reduzido [N·mm];
$M_{Sk,y}$	Momento solicitante característico na direção $y$ [N·mm];
$M_{Sk,y,i}^*$	Momento fletor equilibrante característico na direção $y$ relativo ao $i$ -ésimo perímetro crítico reduzido [N·mm];
$M_x$	Momento transferido da laje ao pilar na direção $y$ [N·mm];
$M_{\bar{x}-\bar{x}}$	Momento fletor por unidade de largura na direção $\bar{x}$ da laje [kN·m/m];
$M_y$	Momento transferido da laje ao pilar na direção $x$ [N·mm];
$m_{P,i}$	Momento médio de descompressão na largura da faixa $b_s$ devido aos cabos de protensão no $i$ -ésimo perímetro crítico [N·mm/mm];
$m_{Rd}$	Momento resistente de projeto por unidade de largura da laje [N·mm/mm];
$m_{Rk}$	Momento resistente característico por unidade de largura da laje [N·mm/mm];
$m_{sd,i}$	Momento solicitante médio de projeto por unidade de largura da laje no $i$ -ésimo perímetro crítico [N·mm/mm];
$m_{sd,out}$	Momento solicitante médio de projeto por unidade de largura da laje no perímetro $b_{out}$ [N·mm/mm];
$m_{sd,1}$	Momento solicitante médio de projeto por unidade de largura da laje no perímetro $b_1$ [N·mm/mm];
$m_{sk,i}$	Momento solicitante médio característico por unidade de largura da laje no $i$ -ésimo perímetro crítico [N·mm/mm];
$m_{sk,1}$	Momento solicitante médio característico por unidade de largura da laje no perímetro $b_1$ [N·mm/mm];
$n$	Quantidade de linhas de armaduras de punção [adimensional];
$N_{Pk,i}$	Soma da força normal das cordoalhas que interceptam o $i$ -ésimo perímetro

	crítico [N];
$N_{Pk,0}$	Soma da força normal das cordoalhas [N]: no perímetro $u_0$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_0$ (abordagem – ACI 318:2014);
$N_{Pk,1}$	Soma da força normal das cordoalhas que interceptam o perímetro $u_1$ [N];
$P1$	Carga aplicada no modelo experimental [kN];
$P2$	Carga aplicada no modelo experimental [kN];
$q$	Quantidade de camadas de armaduras de punção [adimensional];
$R$	Raio da face circular do perímetro crítico [mm];
$r$	Raio de um trecho circunferencial $\Delta u$ [mm]; Distância à origem no sistema de coordenada polares [mm];
$r_{cont}$	Distância do perímetro $u_{c,out}$ ao centroide do pilar [mm];
$r_s$	Distância entre o centro geométrico do pilar e o ponto onde o momento fletor na laje se anula [mm];
$r_{s,x}$	Distância na direção $x$ entre o centro geométrico do pilar e o ponto onde o momento fletor na laje se anula [mm];
$r_{s,y}$	Distância na direção $y$ entre o centro geométrico do pilar e o ponto onde o momento fletor na laje se anula [mm];
$s_c$	Distância entre linhas de armaduras de punção tomada na última camada [mm];
$s_{c2}$	Distância entre linhas de armaduras de punção na segunda camada [mm];
$s_r$	Distância entre as camadas de armaduras de punção [mm];
$s_0$	Distância da primeira camada de armadura de punção ao pilar [mm];
$u_c$	Perímetro crítico interno ao capitel ou ábaco [mm];
$u_c^*$	Perímetro crítico reduzido interno ao capitel ou ábaco [mm];
$u_{c,out}$	Perímetro crítico externo ao capitel ou ábaco [mm];

$u_{c,out}^*$	Perímetro crítico reduzido externo ao capitel ou ábaco [mm];
$u_i$	i-ésimo perímetro crítico, podendo representar $u_0$ , $u_1$ , $u_c$ , $u_{out}$ ou $u_{c,out}$ [mm];
$u_i^*$	i-ésimo perímetro crítico reduzido, podendo representar $u_0^*$ , $u_1^*$ , $u_{out}^*$ , $u_c^*$ , ou $u_{c,out}^*$ [mm];
$u_{out}$	Perímetro crítico externo à região das armaduras de punção [mm];
$u_{out}^*$	Perímetro crítico reduzido na região externa às armaduras de punção [mm];
$u_0$	Perímetro crítico na face do pilar [mm];
$u_0^*$	Perímetro crítico reduzido na face do pilar [mm];
$u_1$	Perímetro crítico afastado $2d$ da face do pilar [mm];
$u_1^*$	Perímetro crítico reduzido afastado $2d$ da face do pilar [mm];
$V_{exp}$	Carga de ruptura do modelo experimental [N];
$V_{Pk,i}$	Força cortante devido à protensão no i-ésimo perímetro crítico [N];
$V_{Pk,0}$	Força cortante devido à protensão [N]; no perímetro $u_0$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_0$ (abordagem – ACI 318:2014);
$V_{Pk,1}$	Força cortante devido à protensão no perímetro $u_1$ [N];
$V_{Rd}$	Carga resistente de projeto [N];
$V_{Rd,c}$	Carga resistente de projeto relativa à tração diagonal [N];
$V_{Rd,c,out}$	Carga resistente de projeto relativa à tração diagonal fora da região do capitel ou ábaco [N];
$V_{Rd,cs}$	Carga resistente de projeto relativa à tração diagonal na presença de armaduras de punção [N];
$V_{Rd,máx}$	Carga resistente de projeto relativa à compressão diagonal do concreto [N];
$V_{Rd,out}$	Carga resistente de projeto relativa à tração diagonal fora da região das armaduras de punção [N];

$V_{Rk}$	Carga resistente característica [N];
$V_{Rk,c}$	Carga resistente característica relativa à tração diagonal [N];
$V_{Rk,cs}$	Carga resistente característica relativa à tração diagonal na presença de armaduras de punção [N];
$V_{Rk,máx}$	Carga resistente característica relativa à compressão diagonal do concreto [N];
$V_{Rk,out}$	Carga resistente característica relativa à tração diagonal do concreto fora da região das armaduras de punção [N];
$V_{\bar{x}=\bar{z}}$	Esforço cortante por unidade de largura na direção $\bar{x}$ da laje [kN/m];
$W_{i,x}$	Módulo de resistência plástica do i-ésimo perímetro crítico relativo ao momento $M_{Sd,x}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{i,y}$	Módulo de resistência plástica do i-ésimo perímetro crítico relativo ao momento $M_{Sd,y}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{out,x}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_{out}$ relativo ao momento $M_{Sd,x}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{out,y}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_{out}$ relativo ao momento $M_{Sd,y}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{0,x}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_0$ relativo ao momento $M_{Sd,x}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{0,y}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_0$ relativo ao momento $M_{Sd,y}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{1,x}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_1$ relativo ao momento $M_{Sd,x}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{1,y}$	Módulo de resistência plástica do perímetro $u_1$ relativo ao momento $M_{Sd,y}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];

$W_{\Delta u, x}$	Módulo de resistência plástica do trecho $\Delta u$ relativo ao momento $M_{Sd, x}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$W_{\Delta u, y}$	Módulo de resistência plástica do trecho $\Delta u$ relativo ao momento $M_{Sd, y}$ e calculado em relação ao centroide da superfície crítica [mm <sup>2</sup> ];
$x$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $x, y, z$ [adimensional];
$\bar{x}$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ [adimensional];
$x_a$	Abcissa do ponto vértice “a” do perímetro crítico [mm];
$x_b$	Abcissa do ponto vértice “b” do perímetro crítico [mm];
$x_c$	Abcissa do centro do trecho $\Delta u$ [mm];
$x_{cg, b_i}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $b_i$ [mm];
$x_{cg, b_{out}}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $b_{out}$ [mm];
$x_{cg, b_0}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $b_0$ [mm];
$x_{cg, b_1}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $b_1$ [mm];
$x_{cg, u_i}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_i$ [mm];
$x_{cg, u_i}^*$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_i^*$ [mm];
$x_{cg, u_{out}}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_{out}$ [mm];
$x_{cg, u_{out}}^*$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_{out}^*$ [mm];
$x_{cg, u_0}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_0$ [mm];
$x_{cg, u_0}^*$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_0^*$ [mm];
$x_{cg, u_1}$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_1$ [mm];
$x_{cg, u_1}^*$	Abcissa do centro geométrico do perímetro $u_1^*$ [mm];
$x_{cg, \Delta b}$	Abcissa do centro geométrico do trecho de perímetro $\Delta b$ [mm];
$x_{cg, \Delta u}$	Abcissa do centro geométrico do trecho de perímetro $\Delta u$ [mm];
$x_{cg, \Delta u}^*$	Abcissa do centro geométrico do trecho de perímetro $\Delta u^*$ [mm];
$x_1$	Abcissa do início do trecho reto $\Delta u$ [mm];

$x_2$	Abcissa do final do trecho reto $\Delta u$ [mm];
$y$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $x, y, z$ [adimensional];
$\bar{y}$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ [adimensional];
$y_a$	Ordenada do ponto vértice “a” do perímetro crítico [mm];
$y_b$	Ordenada do ponto vértice “b” do perímetro crítico [mm];
$y_c$	Ordenada do centro do trecho $\Delta u$ [mm];
$y_{cg, b_i}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $b_i$ [mm];
$y_{cg, b_{out}}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $b_{out}$ [mm];
$y_{cg, b_0}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $b_0$ [mm];
$y_{cg, b_1}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $b_1$ [mm];
$y_{cg, u_i}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_i$ [mm];
$y_{cg, u_i^*}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_i^*$ [mm];
$y_{cg, u_{out}}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_{out}$ [mm];
$y_{cg, u_{out}^*}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_{out}^*$ [mm];
$y_{cg, u_0}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_0$ [mm];
$y_{cg, u_0^*}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_0^*$ [mm];
$y_{cg, u_1}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_1$ [mm];
$y_{cg, u_1^*}$	Ordenada do centro geométrico do perímetro $u_1^*$ [mm];
$y_{cg, \Delta b}$	Ordenada do centro geométrico do trecho de perímetro $\Delta b$ [mm];
$y_{cg, \Delta u}$	Ordenada do centro geométrico do trecho de perímetro $\Delta u$ [mm];
$z$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $x, y, z$ [adimensional];
$\bar{z}$	Direção do sistema de coordenadas cartesianas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ [adimensional];
$\alpha$	Ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje [rad];
$\alpha_j$	Ângulo de inclinação da j-ésima cordoalha de protensão [rad];

$\alpha_s$	Constante que caracteriza a posição da ligação laje pilar no pavimento [adimensional];
$\beta$	Razão entre a maior e a menor dimensão do pilar [adimensional];
$\beta_{Sd,c}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto [adimensional]: no perímetro $u_c$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_c$ (abordagem – ACI 318:2014);
$\beta_{Sd,c,out}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto [adimensional]: no perímetro $u_{c,out}$ (abordagens – NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_{c,out}$ (abordagem – ACI 318:2014);
$\beta_{Sd,i}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto no i-ésimo perímetro crítico [adimensional];
$\beta_{Sd,out}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto [adimensional]: no perímetro $u_{out}$ (abordagens – NBR6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_{out}$ (abordagem – ACI 318:2014);
$\beta_{Sd,0}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto [adimensional]: no perímetro $u_0$ (abordagens – NBR6118:2014 e EUROCODE 2:2004); no perímetro $b_0$ (abordagem – ACI 318:2014);
$\beta_{Sd,1}$	Fator de excentricidade da carga solicitante de projeto no perímetro $u_1$ [adimensional];
$\beta_{Sk,i}$	Fator de excentricidade da carga solicitante característica no i-ésimo perímetro crítico [adimensional];
$\beta_{Sk,0}$	Fator de excentricidade da carga solicitante característica no perímetro $u_0$ [adimensional];
$\beta_{Sk,1}$	Fator de excentricidade da carga solicitante característica no perímetro $u_1$ [adimensional];
$\gamma_c$	Coefficiente de minoração da resistência do concreto [adimensional];

$\gamma_p$	Coeficiente de majoração das solicitações decorrentes da protensão [adimensional];
$\gamma_s$	Coeficiente de minoração da resistência do aço [adimensional];
$\gamma_{v,x,i}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,x}$ que é transmitida por cisalhamento no i-ésimo perímetro crítico [adimensional];
$\gamma_{v,y,i}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,y}$ que é transmitida por cisalhamento no i-ésimo perímetro crítico [adimensional];
$\gamma_{v,x,out}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,x}$ que é transmitida por cisalhamento no perímetro $b_{out}$ [adimensional];
$\gamma_{v,y,out}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,y}$ que é transmitida por cisalhamento no perímetro $b_{out}$ [adimensional];
$\gamma_{v,x,0}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,x}$ que é transmitida por cisalhamento no perímetro $b_0$ [adimensional];
$\gamma_{v,y,0}$	Coeficiente que fornece a parcela do momento fletor $M_{Sd,y}$ que é transmitida por cisalhamento no perímetro $b_0$ [adimensional];
$\Delta b$	Trecho reto ou circunferencial do perímetro crítico [mm];
$\Delta u$	Trecho reto ou circunferencial do perímetro crítico [mm];
$\varepsilon_{cu}$	Deformação de projeto relativa ao esmagamento do concreto [adimensional];
$\varepsilon_{yd}$	Deformação de projeto relativa ao escoamento do aço [adimensional];
$\eta_1$	Primeiro coeficiente de aderência concreto-aço [adimensional];
$\eta_2$	Segundo coeficiente de aderência concreto-aço [adimensional];
$\eta_3$	Terceiro coeficiente de aderência concreto-aço [adimensional];
$\eta_4$	Quarto coeficiente de aderência concreto-aço [adimensional];
$\theta$	Inclinação da superfície teórica de ruptura por punção (abordagem – EUROCODE 2:2004) [rad];
	Ângulo do sistema de coordenada polares [rad];

$\theta_1$	Ângulação do início de um trecho circunferencial $\Delta u$ [rad];
$\theta_2$	Ângulação do final de um trecho circunferencial $\Delta u$ [rad];
$\lambda$	Fator redutor das propriedades mecânicas de concretos de baixa densidade [adimensional];
$v$	Tensão de cisalhamento [MPa];
$v_{cp,c}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_c$ [MPa];
$v_{cp,c,out}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_{c,out}$ [MPa];
$v_{cp,out}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_{out}$ [MPa];
$v_{cp,0}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_0$ [MPa];
$v_{cp,1}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_1$ [MPa];
$v_{F_{Sd}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida à carga $F_{Sd}$ [MPa];
$v_{M_{Sd,x}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $M_{Sd,x}$ [MPa];
$v_{M_{Sd,y}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $M_{Sd,y}$ [MPa];
$v_{pc,c}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $b_c$ [MPa];
$v_{pc,c,out}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $b_{c,out}$ [MPa];
$v_{pc,i}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no i-ésimo perímetro crítico [MPa];
$v_{pc,0}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $b_0$ [MPa];
$v_{Rd}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto [MPa];
$v_{Rd,c}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal tracionada de concreto [MPa];
$v_{Rd,cs}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal tracionada na presença de armaduras de punção [MPa];
$v_{Rd,máx}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal comprimida de concreto [MPa];

$V_{Rk,c}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal tracionada de concreto [MPa];
$V_{Rk,cs}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal tracionada na presença de armaduras de punção [MPa];
$V_{Rk,máx}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal comprimida de concreto [MPa];
$V_{Sd}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto [MPa];
$V_z$	Componente vertical da tensão de cisalhamento [MPa];
$\xi$	Parâmetro que caracteriza o <i>size effect</i> [adimensional];
$\xi_H$	Parâmetro que caracteriza o <i>size effect</i> calculado com altura útil $d_H$ [adimensional];
$\rho$	Taxa de armadura de flexão tracionada da laje [adimensional];
$\rho_x$	Taxa de armadura de flexão tracionada da laje na direção $x$ [adimensional];
$\rho_y$	Taxa de armadura de flexão tracionada da laje na direção $y$ [adimensional];
$\sigma$	Tensão normal [MPa];
$\sigma_{cpk,c}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro crítico $u_c$ [MPa];
$\sigma_{cpk,c,out}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro crítico $u_{c,out}$ [MPa];
$\sigma_{cpk,i}$	Tensão normal devida à protensão no $i$ -ésimo perímetro crítico [MPa];
$\sigma_{cpk,out}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro crítico $u_{out}$ [MPa];
$\sigma_{cpk,l}$	Tensão normal devida à protensão no perímetro $u_l$ [MPa];
$\sigma_{swd}$	Tensão de projeto ativada nas armaduras de punção [MPa];
$\sigma_{swk}$	Tensão característica ativada nas armaduras de punção [MPa];
$\tau$	Tensão de cisalhamento [MPa];
$\tau_{cp,c}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_c$ [MPa];
$\tau_{cp,c,out}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_{c,out}$ [MPa];

$\tau_{cp,i}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no i-ésimo perímetro crítico [MPa];
$\tau_{cp,out}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_{out}$ [MPa];
$\tau_{cp,0}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_0$ [MPa];
$\tau_{cp,1}$	Tensão de cisalhamento devida à protensão no perímetro $u_1$ [MPa];
$\tau_{F_{sd}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida à carga $F_{sd}$ [MPa];
$\tau_{M_{sd,x}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $M_{sd,x}$ [MPa];
$\tau_{M_{sd,y}}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $M_{sd,y}$ [MPa];
$\tau_{(M_{sd,x}-M_{sd,x,i}^*)}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $(M_{sd,x} - M_{sd,x,i}^*)$ [MPa];
$\tau_{(M_{sd,y}-M_{sd,y,i}^*)}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto devida ao momento $(M_{sd,y} - M_{sd,y,i}^*)$ [MPa];
$\tau_{Rd}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto [MPa];
$\tau_{Rd1}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal tracionada de concreto [MPa];
$\tau_{Rd2}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal comprimida de concreto [MPa];
$\tau_{Rd3}$	Tensão de cisalhamento resistente de projeto relativa à diagonal tracionada na presença de armaduras de punção [MPa];
$\tau_{Rk}$	Tensão de cisalhamento resistente característica [MPa];
$\tau_{Rk1}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal tracionada de concreto [MPa];
$\tau_{Rk2}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal comprimida de concreto [MPa];
$\tau_{Rk3}$	Tensão de cisalhamento resistente característica relativa à diagonal tracionada na presença de armaduras de punção [MPa];

$\tau_{Sd}$	Tensão de cisalhamento solicitante de projeto [MPa];
$\tau_{Sk}$	Tensão de cisalhamento solicitante característica [MPa];
$\emptyset$	Diâmetro das armaduras [mm];
$\phi$	Coefficiente de segurança para esforços cortantes [adimensional];
$\varphi$	Ângulo [rad];
$\varphi_w$	Diâmetro da armadura de punção [mm];
$\varphi_{w,máx}$	Indicação do diâmetro máximo permitido para a armadura de punção [mm];
$\Psi$	Constante real [adimensional];
$\psi$	Rotação da laje [rad];
$\psi_{d,i}$	Rotação de projeto da laje pelo nível de aproximação adotado relativa ao i-ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{d,1}$	Rotação de projeto da laje pelo nível de aproximação adotado relativa ao perímetro $b_1$ [rad];
$\psi_{k,i}$	Rotação característica da laje pelo nível de aproximação adotado relativa ao i-ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{k,1}$	Rotação característica da laje pelo nível de aproximação adotado relativa ao perímetro $b_1$ [rad];
$\psi_{I,d}$	Rotação de projeto da laje pelo nível I de aproximação [rad];
$\psi_{I,k}$	Rotação característica da laje pelo nível I de aproximação [rad];
$\psi_{II,d,i}$	Rotação de projeto da laje pelo nível II de aproximação referente ao i-ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{II,k,i}$	Rotação característica da laje pelo nível II de aproximação referente ao i-ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{III,d,i}$	Rotação de projeto da laje pelo nível III de aproximação referente ao i-ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{III,d,out}$	Rotação de projeto da laje pelo nível III de aproximação referente a $b_{out}$ [rad];

$\psi_{III,d,1}$	Rotação de projeto da laje pelo nível III de aproximação referente a $b_1$ [rad];
$\psi_{III,k,i}$	Rotação característica da laje pelo nível III de aproximação referente ao $i$ -ésimo perímetro crítico [rad];
$\psi_{III,k,1}$	Rotação característica da laje pelo nível III de aproximação referente $b_1$ [rad];
$\Omega$	Inclinação da face do perímetro crítico em relação o eixo $y$ [rad];

# 1. INTRODUÇÃO

Na fase de concepção da estrutura de uma edificação, a escolha do sistema estrutural mais adequado deve ser feita considerando uma série de parâmetros, como a finalidade da edificação, o processo construtivo a ser utilizado, o projeto arquitetônico, as cargas de utilização, o tamanho dos vãos a vencer, a disponibilidade de equipamentos na obra, os materiais empregados, a qualificação da mão de obra, os custos e a interação da estrutura com os demais subsistemas da edificação.

Para pavimentos em que o vão a ser vencido pelas lajes é pequeno, de até 5 metros, normalmente se emprega o sistema convencional em que as lajes se apoiam em vigas. A Figura 1.1 ilustra este sistema estrutural, podendo ser aplicado com lajes maciças ou nervuradas.

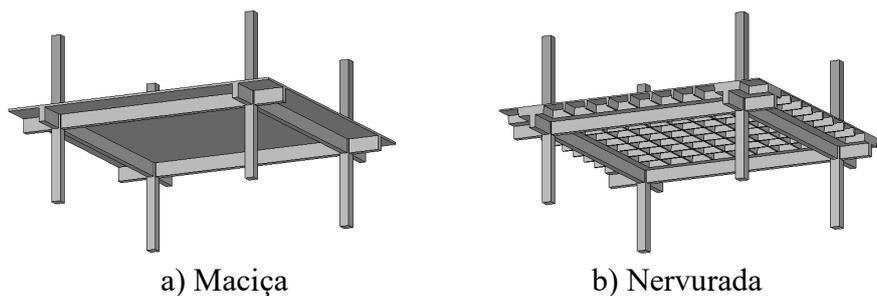


Figura 1.1 – Lajes sobre vigas

À medida que se diminui a altura das vigas, por exemplo, por imposição arquitetônica, maior espessura é requerida para a laje, pois os esforços ora suportados pelo elemento de enrijecimento – as vigas – passam a ser suportados pela própria laje. A Figura 1.2 ilustra essa transição, mostrando três pórticos cujos esforços foram calculados no software SAP2000 valendo-se do método dos elementos finitos e considerando comportamento linear elástico. Todos os pórticos têm pilares de  $35 \times 35 \times 300$  cm e laje de  $15 \times 400 \times 400$  cm. Na Figura 1.2(a), a laje se apoia nos quatro cantos em vigas de seção  $20 \times 50$  cm, na Figura 1.2(b), em vigas de  $20 \times 25$  cm, e na Figura 1.2(c) não há vigas. Nota-se que os deslocamentos na laje aumentam bastante à medida que vigamento é removido.

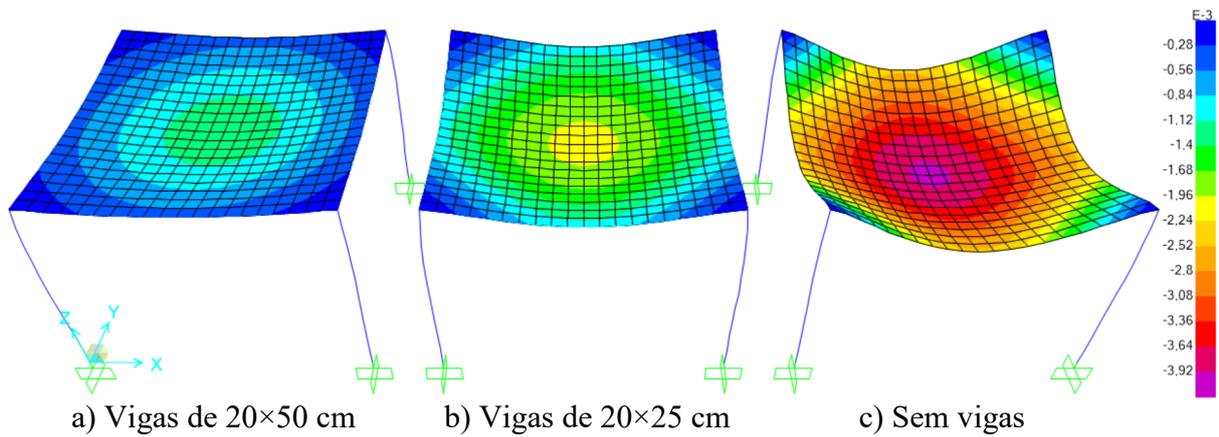


Figura 1.2 – Deslocamentos nas lajes (m)

Na Figura 1.3 são mapeados os momentos fletores nas lajes na direção x-x, permitindo observar que estes aumentam à medida que se remove o vigamento.

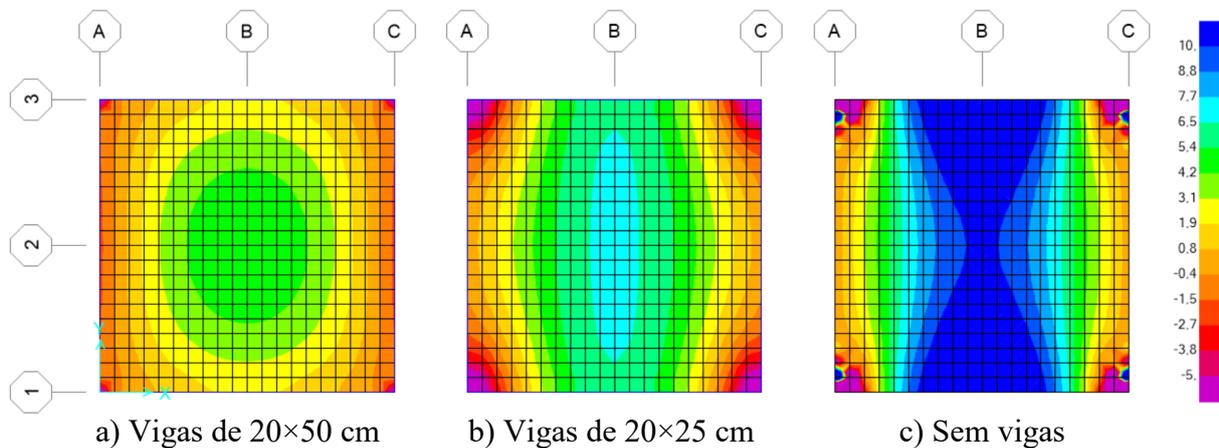


Figura 1.3 – Momento fletor nas lajes na direção x-x (kNm/m)

Os momentos ao longo dos alinhamentos 3 e 2 da Figura 1.3 são plotados, respectivamente, nas Figuras 1.4 e 1.5, mostrando que no alinhamento 3 a diferença é mais expressiva entre os momentos nas lajes dos pórticos quando removidas as vigas.

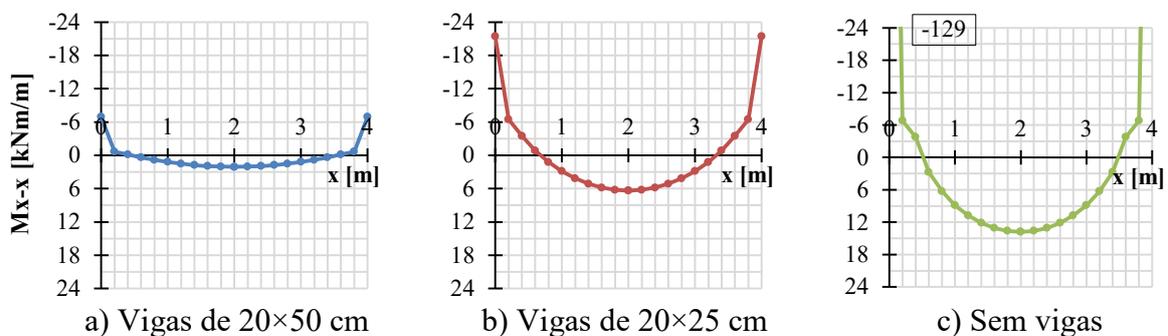


Figura 1.4 – Momento fletor nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 3

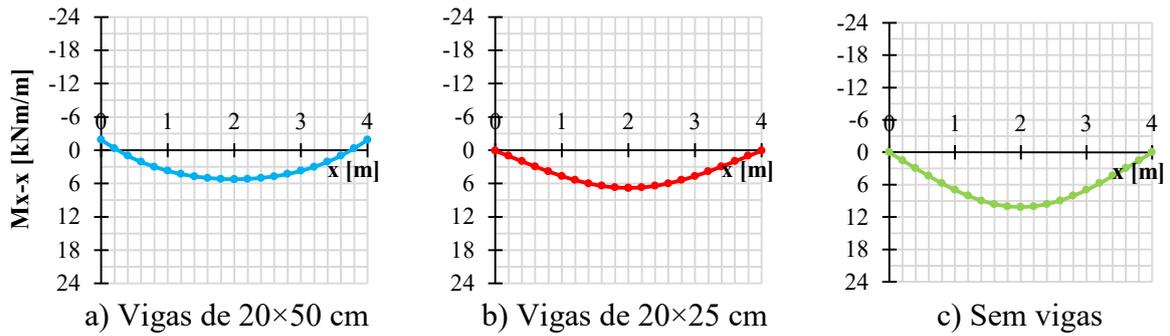


Figura 1.5 – Momento fletor nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 2

Na Figura 1.6 são mapeados os esforços cortantes x-z, permitindo observar que estes são mais intensos no alinhamento 3 onde a laje se apoia à viga e, à medida que as vigas são removidas, o cortante se concentra mais próximo aos pilares.

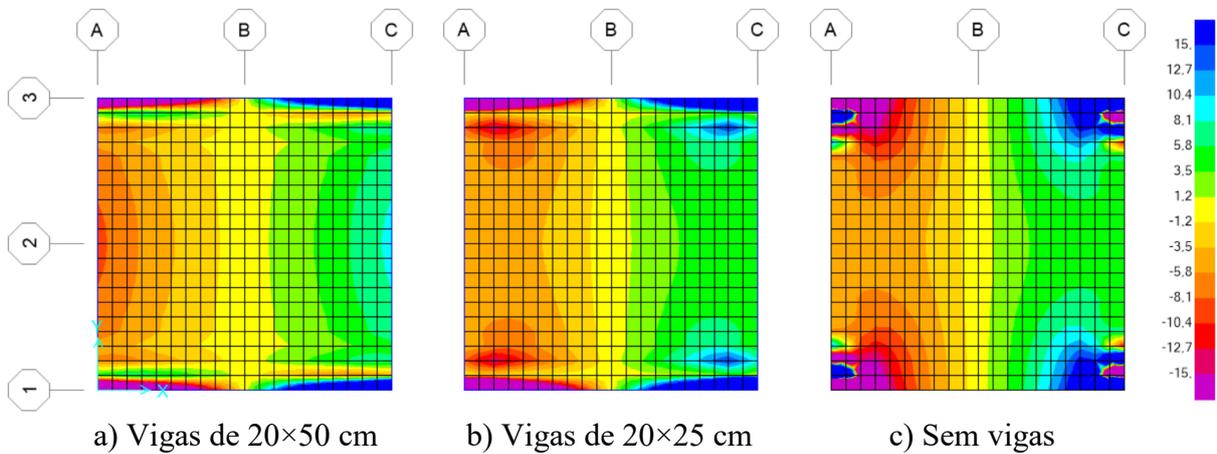


Figura 1.6 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x (kN/m)

Os esforços cortantes ao longo dos alinhamentos 3 e 2 da Figura 1.6 são plotados, respectivamente, nas Figuras 1.7 e 1.8.

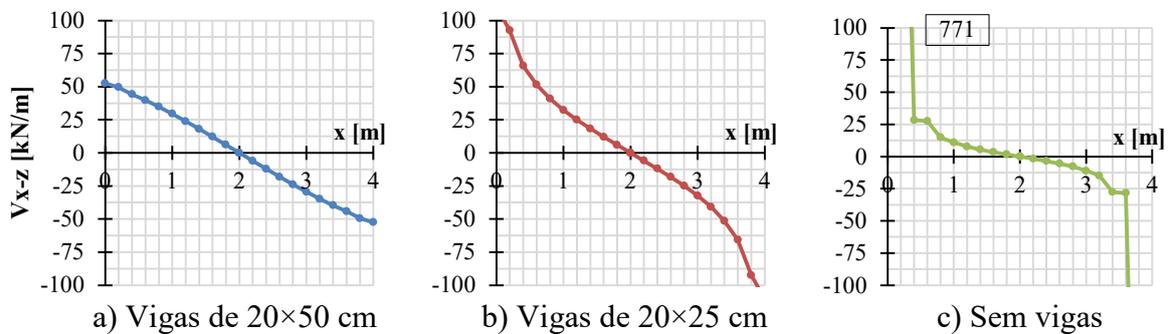


Figura 1.7 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 3

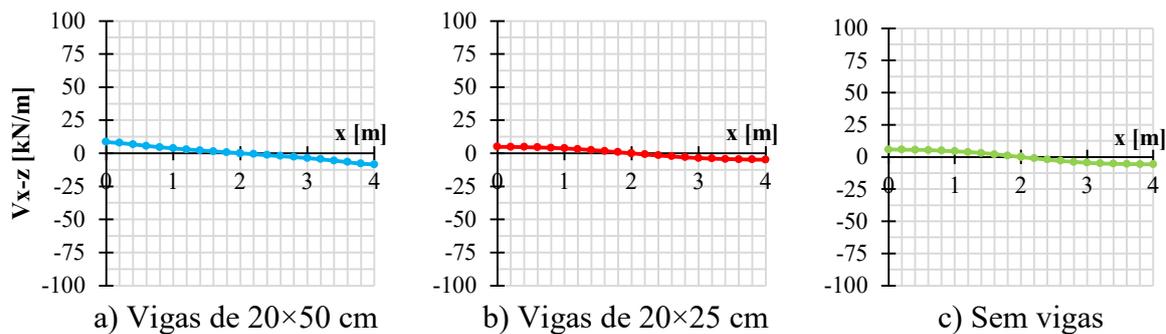


Figura 1.8 – Esforço cortante nas lajes na direção x-x ao longo do alinhamento 2

No alinhamento 2 a diferença entre os pórticos é inexpressiva quando removidas as vigas, mas no alinhamento 3 o cortante é aliviado no meio vão e concentrado nas proximidades do pilar

Quando as lajes são apoiadas diretamente nos pilares, dispensando os vigamentos, passam a ser denominadas lajes lisas. A utilização do sistema estrutural com lajes lisas, ilustrado na Figura 1.9, é usual em vários países na América do Norte e Europa. No Brasil a adoção deste sistema também é comum, especialmente em edifícios comerciais.

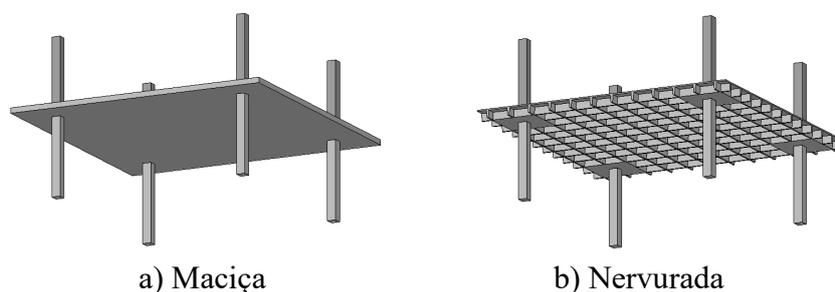


Figura 1.9 – Lajes lisas

Esta concepção resulta em uma série de vantagens construtivas proporcionadas pela eliminação das vigas, como: menor pé-direito requerido por pavimento, possibilitando a adoção de mais pavimentos para a mesma altura do edifício; simplificação das formas, o que pode permitir maior agilidade no processo construtivo e redução de custos com materiais e mão de obra; maior flexibilidade de *layout* dos imóveis; e maior facilidade de disposição das instalações prediais em geral.

Porém, o sistema estrutural em lajes lisas também apresenta desvantagens quando comparado aos sistemas com vigas, como: obtenção de estruturas mais flexíveis, exigindo do projetista

maior atenção quanto às flechas nos vãos dos pavimentos; redução da rigidez do edifício para resistir aos esforços horizontais; e, principalmente, a ocorrência de elevado esforço cortante nas regiões de ligação da laje ao pilar, de modo que a laje tende a ser “perfurada” pelo apoio, fenômeno conhecido como punção.

A resistência à punção na ligação laje-pilar é um dos parâmetros mais críticos no dimensionamento de lajes lisas, por isso, quando associado ao sistema de lajes nervuradas, é comum manter maciços os trechos próximos aos pilares, como mostrado na Figura 1.9(b). A ruptura por punção é caracterizada por ser frágil e repentina, bem como por formar uma superfície tronco-piramidal na extremidade do pilar onde a laje se desvincula deste, como exemplificado na Figura 1.10.

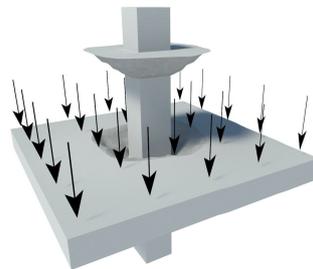


Figura 1.10 – Superfície tronco-piramidal de punção

Uma ruptura localizada deste tipo provoca a redistribuição dos esforços a outras ligações laje-pilar da estrutura, podendo levá-las também a colapsar, gerando um efeito sequenciado conhecido como colapso progressivo, com consequências mais graves à edificação.

É possível reduzir a intensidade das tensões de cisalhamento na ligação laje-pilar através do aumento da seção transversal do pilar ou da espessura da laje nas proximidades dessa ligação, com o uso, respectivamente, de capitéis ou ábacos, ilustrados na Figura 1.11.

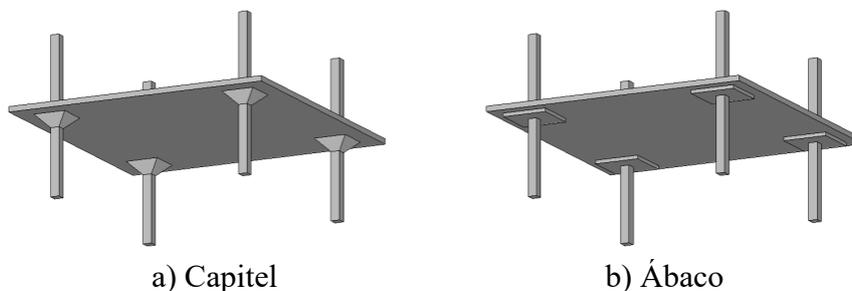


Figura 1.11 – Lajes cogumelo

Existem outras formas de melhorar a resistência à punção, como, por exemplo, aumentar a seção do pilar, a espessura da laje, a taxa de armadura de flexão da laje ou a resistência à compressão do concreto. Porém, a maneira mais eficiente de elevar a resistência à punção na ligação laje-pilar é utilizando armaduras de punção, como estribos ou *studs*, por exemplo.

Quanto à nomeação do inventor do sistema de lajes lisas, segundo GASPARINI (2002), há controvérsia, uma vez que o sistema surgiu de maneira independente em diferentes localidades, e na mesma época – meados de 1900 – sendo trabalhado pelo engenheiro suíço Robert Maillart, e nos Estados Unidos pelo engenheiro americano Claude A. P. Turner. No entanto, foi Turner quem empregou o sistema de lajes lisas pela primeira vez, no edifício Johnson-Bovey (1905–1906), em *Minneapolis*, EUA.

Desde o início da utilização deste sistema, alguns acidentes têm sido registrados, geralmente associados à ruptura por punção. Segundo MELO (1990) o primeiro caso registrado de ruptura por punção ocorreu no edifício *Prest-o-Lite*, em *Indianapolis*, EUA, em 1911, onde as lajes se desligaram completamente dos pilares, levando a estrutura à ruína. Outros casos de ruptura por punção têm sido registrados em edificações por todo o mundo, como:

O caso mostrado na Figura 1.12, do edifício *Pipers Row Car Park*, em *Wolverhampton*, Inglaterra, onde houve colapso parcial da estrutura (WOOD, 1997);

O caso mostrado na Figura 1.13, do edifício *135 Deguire Boulevard*, em Montreal, Canadá, 2008, onde houve colapso parcial;

O caso mostrado na Figura 1.14, ocorrido após um terremoto em *Christchurch*, Nova Zelândia, em 2011, onde houve o colapso parcial de um pátio de estacionamento.

O caso mostrado na Figura 1.15, da piscina do complexo desportivo do estádio *Kuban*, em *Krasnodar*, Rússia, 2013, onde houve colapso parcial da estrutura.



Figura 1.12 – *Pipers Row Car Park*, em *Wolverhampton*, Inglaterra [WOOD (1997)]



Figura 1.13 – *135 Deguire Boulevard*, em *Montreal*, Canadá, 2008  
[<http://www.tvanouvelles.ca>]



Figura 1.14 – Pátio de estacionamento, em *Christchurch*, Nova Zelândia, 2011  
[<https://reidmiddleton.wordpress.com>]



Figura 1.15 – Colapso parcial em uma piscina, em *Krasnodar*, Rússia, 2013  
[<http://www.yugopolis.ru>]

Observando quão recentes são as datas destes acidentes, pode-se inferir que o estudo do fenômeno da punção é ainda de grande relevância, mesmo após pouco mais de um século do início de sua utilização em edificações. Ainda hoje, não há um modelo de cálculo definitivo para a verificação da punção em lajes lisas de concreto.

Um modelo de cálculo clássico foi desenvolvido por KINNUNEN e NYLANDER (1960), baseado no equilíbrio de esforços em fatias da laje, externas à fissura de punção estendendo-se até o ponto onde os momentos fletores se anulam. Com o passar dos anos este modelo tem servido como inspiração para novas propostas.

Atualmente, as principais normas de projeto apresentam modelos semi-empíricos em que a resistência é avaliada em uma seção crítica da laje, ligeiramente afastada do pilar ou das armaduras de punção. Essa abordagem resulta em boas aproximações para a resistência à punção na maioria dos casos, porém, nem sempre é capaz de acertar o modo de ruptura.

Nas últimas décadas, um interessante modelo mecânico tem sido desenvolvido, denominado Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, de MUTTONI (2008). Recentemente, esta proposta foi incorporada ao *fib* MODEL CODE:2010. Segundo esta teoria, a resistência da laje à punção depende da magnitude da abertura de uma fissura crítica. Em lajes, a abertura dessa fissura pode ser correlacionada com a rotação sofrida pela laje a cada nível de carga solicitante. Quanto maior a abertura da fissura crítica, menor o contato entre as partes íntegras de concreto e, portanto, menor a capacidade de resistir por meio de esforços de cisalhamento.

Além disso, o modelo considera que esta fissura tende a contornar os agregados graúdos e, por isso, leva em conta a resistência promovida pelo engrenamento dos agregados.

Observa-se que os modelos até então desenvolvidos já identificaram muitas variáveis envolvidas no fenômeno da punção, como, por exemplo, a resistência à compressão do concreto, a altura útil da laje, a taxa de armadura de flexão, a forma da seção transversal do pilar, dentre outras. Esta complexidade faz com que numerosas pesquisas experimentais sejam realizadas com o intuito de contribuir para a elaboração ou para o aprimoramento de modelos teóricos de cálculo.

A obtenção de um modelo matemático que reflita bem o comportamento real da estrutura é de extrema importância para a segurança estrutural, além de permitir a elaboração de projetos mais econômicos, com uso mais eficiente dos materiais.

## **1.2. MOTIVAÇÃO**

A inexistência de uma referência devidamente atualizada para estudo dos principais modelos de cálculo de verificação da punção é a principal motivação para a elaboração deste trabalho. Além disso, as recorrentes dúvidas levantadas por estudantes, pesquisadores e projetistas sobre as prescrições normativas relacionadas à punção também evidenciam a necessidade de se criar um material elucidativo a respeito do fenômeno. Um material que traga deduções, normalmente ausentes nos textos normativos, exemplos de aplicação e análises pode contribuir para o entendimento dos modelos de cálculo existentes e pode ser um facilitador para a criação de novas ideias para o desenvolvimento do tema.

## **1.3. OBJETIVOS**

O objetivo deste estudo é criar um material atual sobre o tema da punção em lajes lisas de concreto. Deseja-se com esta publicação oferecer aos estudantes de engenharia, pesquisadores

e projetistas de estruturas uma base sobre o tema da punção para estudo e/ou consulta. Os objetivos específicos são:

- 1) Estudar o fenômeno da punção em suas diferentes possibilidades de ocorrência: em pilares internos, de borda e de canto, com ou sem protensão
- 2) Trabalhar o entendimento dos modelos de cálculo mais relevantes da atualidade, investigando suas principais dificuldades.
- 3) Sintetizar matematicamente os procedimentos de cálculo dos diferentes modelos de forma a facilitar sua aplicação.

#### **1.4. METODOLOGIA**

Neste estudo são apresentados os modelos de cálculo para a verificação da punção adotados pelos textos normativos vigentes da NBR 6118:2014, do EUROCODE 2:2004, do ACI 318:2014 e do código *fib* MODEL CODE:2010. As verificações de segurança estrutural são equacionadas neste trabalho, tratando da forma mais detalhada possível o roteiro de cálculo proposto por cada norma.

A fim de consolidar os estudos, variados exemplos de aplicação são trabalhados neste texto, cobrindo situações de projeto estrutural bem como situações comuns em pesquisas experimentais. Estes mesmos exemplos são utilizados para comparar os resultados de dimensionamento pelas diferentes normas.

#### **1.5. ESTRUTURA DO TRABALHO**

O trabalho está dividido em 6 capítulos.

O presente Capítulo 1 introduz o leitor no tema da punção em lajes lisas de concreto e expõe a proposta do trabalho.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica onde alguns fundamentos teóricos são apresentados.

No Capítulo 3 são tratados os modelos de cálculo e prescrições das normas NBR 6118:2014, EUROCODE 2:2004 e ACI 318:2014 bem como do código *fib* MODEL CODE:2010.

No Capítulo 4 é feita a análise dos esforços em um pavimento em lajes lisas e o dimensionamento das ligações laje-pilar à punção utilizando as prescrições normativas supracitadas, fornecendo uma abordagem prática das formulações expostas no Capítulo 3. É demonstrada também a utilização dos modelos de cálculo para prever a carga de ruptura de um modelo experimental de ligação laje-pilar ensaiado à punção.

No Capítulo 5 é feita a análise dos dimensionamentos desenvolvidos no Capítulo 4.

O Capítulo 6 é reservado para as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Maiores detalhes sobre a ruptura por punção de lajes lisas e os parâmetros que influenciam a resistência da ligação laje-pilar são apresentados no decorrer deste capítulo.

### 2.1. CARACTERÍSTICAS DA RUPTURA POR PUNÇÃO

As características mais destacadas de uma ruptura por cisalhamento, como é o caso da punção em lajes lisas, são: a formação de fissuras inclinadas na laje ao redor dos apoios ou cargas concentradas, e a não observância de grandes deslocamentos na laje antes da ruptura, ou seja, a ruptura é frágil, repentina. As fissuras são inclinadas devido à orientação das tensões principais. Em lajes sem armaduras de punção, modelos como o do EUROCODE 2:2004 admitem uma inclinação de  $26,6^\circ$  das fissuras características do punção da laje, como mostra a Figura 2.1.

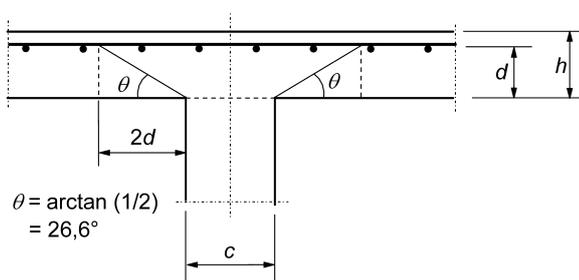


Figura 2.1 – Inclinação das fissuras características da punção [modificado – EUROCODE 2:2004]

Em lajes lisas com armaduras de punção, a ruptura por punção pode ocorrer de três modos distintos: por esmagamento da biela próxima à face do pilar; por esgotamento da resistência à tração diagonal do concreto e do aço das armaduras de punção; e ainda, fora da região das armaduras de punção, por esgotamento da resistência à tração diagonal do concreto. Este último modo de ruptura é semelhante ao que ocorre nas lajes sem armaduras de punção. A Figura 2.2 ilustra as orientações das diagonais de compressão e de tração em um modelo de bielas e tirantes, dando destaque para a orientação das tensões principais num ponto próximo

ao pilar. A Figura 2.3 exemplifica as características intrínsecas de cada modo de ruptura descrito.

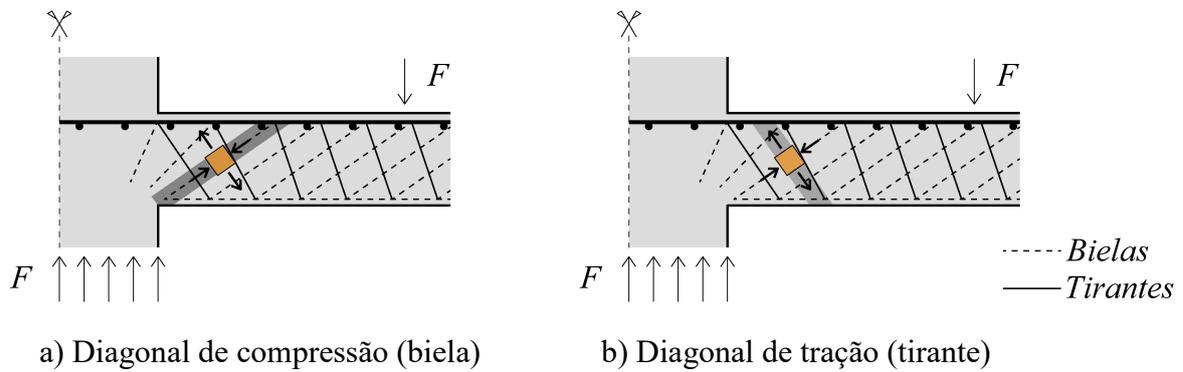


Figura 2.2 – Modelo de bielas e tirantes

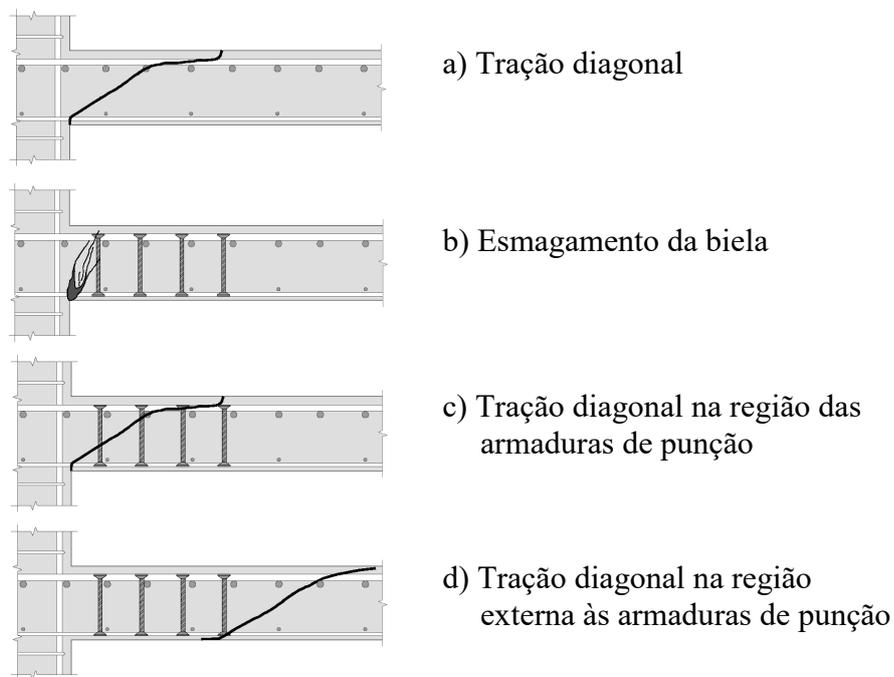


Figura 2.3 – Modos de ruptura por punção em lajes lisas  
 [modificado – FERREIRA (2010)]

Como bem observado por TASSINARI (2011), pode-se classificar a punção com base na simetria do carregamento da laje em volta do pilar, o que influencia diretamente a resistência à punção. Reinterpretando as classificações de TASSINARI (2011), tem-se:

- Punção centrada: quando a resultante do carregamento coincide com o centro geométrico do pilar, não havendo transferência de momento fletor ao pilar; Ocorre

quando o carregamento possui dois planos de simetria cuja interseção coincide com o centro geométrico do pilar. Punção centrada pode ser observada, por exemplo, em ligações com pilares internos de pavimentos com vãos iguais em todas as direções. Pode também ocorrer em ligações com pilares internos de pavimentos com vãos regulares nas duas direções  $x$  e  $y$ , porém, de medidas diferentes em cada direção, como mostrado na Figura 2.4(a).

- Punção excêntrica: quando a resultante do carregamento não coincide com o centro geométrico do pilar. Há transferência de momento fletor ao pilar; Ocorre, por exemplo, em ligações com pilares de borda, pilares de canto ou mesmo com pilares internos quando há grandes aberturas próximas à ligação laje-pilar ou quando os vãos são todos desiguais, como mostrado na Figura 2.4(b).

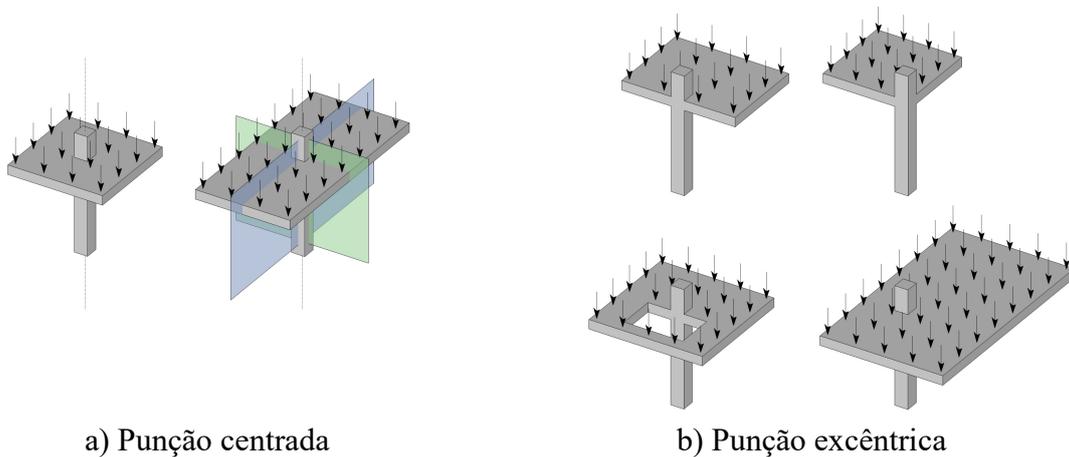


Figura 2.4 – Classificações da punção em função do tipo de carregamento [modificado – TASSINARI (2011)]

Após uma ruptura localizada por punção ocorre a redistribuição dos esforços às outras ligações laje-pilar adjacentes que, caso não suportem o acréscimo de tensão, podem punccionar também. O sequenciamento deste efeito é o que se denomina colapso progressivo. Segundo MELO (1990), a resistência pós-puncionamento das ligações laje-pilar é fundamental para evitar o colapso progressivo. Tal resistência deve ser garantida pela utilização de uma armadura específica, disposta longitudinalmente na parte inferior da laje, e que intercepte o pilar. A Figura 2.5 ilustra a armadura contra colapso progressivo sustentando a laje na fase de pós-puncionamento, onde se pode notar a ineficiência das armaduras de flexão negativas para

sustentar a laje desvinculada do pilar, pois estas são forçadas contra a fina e fissurada camada de cobrimento e, por isso, são facilmente arrancadas à medida que a laje tende a rotacionar.

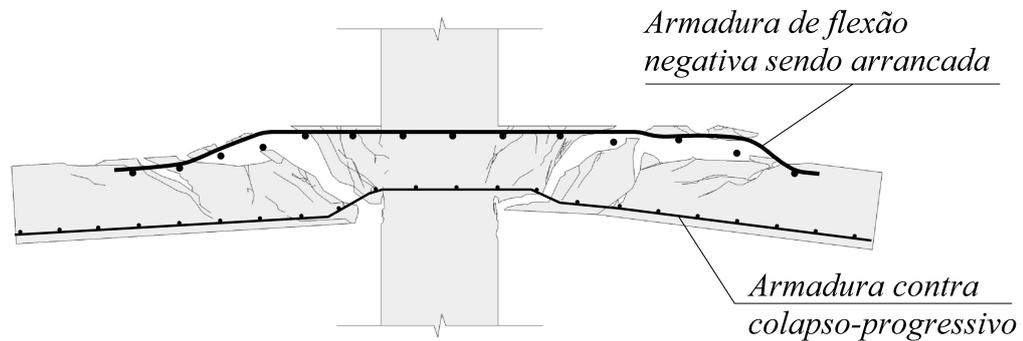


Figura 2.5 – Armadura contra colapso progressivo

## 2.2. PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM A RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

Inúmeros ensaios indicam que a resistência à punção de lajes lisas de concreto é influenciada pela resistência à compressão do concreto; pela taxa de armadura de flexão; pelas dimensões e geometria do pilar; pela altura útil da laje; e, principalmente, pela presença de armaduras de punção. Estes são os parâmetros mais difundidos na literatura científica, porém, ressalta-se que uma das complexidades relativas ao fenômeno da punção é enumerar todos os parâmetros que o influenciam.

### 2.2.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

Fundamentalmente, a ruptura por cisalhamento de uma estrutura de concreto é função direta da resistência à tração do concreto. Como em geral esta resistência é obtida correlacionando-a com a resistência à compressão do concreto, as formulações teóricas existentes e as pesquisas experimentais costumam apresentar a resistência ao cisalhamento diretamente como função da resistência à compressão do concreto.

Pesquisas como as de GRAF (1933) e MOE (1961) avaliaram a influência do aumento da resistência à compressão do concreto, concluindo que este provoca aumento da capacidade resistente da ligação laje-pilar. Uma contribuição mais conclusiva da influência deste

parâmetro foi proposta por MARZOUK e HUSSEIN (1991) que defendem que a resistência à punção da laje varia com a raiz cúbica da resistência à compressão do concreto. Esta tendência de variação também é defendida por vários autores.

### 2.2.2. TAXA DE ARMADURA DE FLEXÃO TRACIONADA

O aumento da taxa de armadura de flexão tracionada nas proximidades do pilar também melhora a capacidade resistente da ligação laje-pilar. Esta taxa é calculada, para uma faixa de largura da laje, como a razão entre a área de armadura de flexão tracionada e o produto da altura útil da laje pela largura da faixa considerada.

Segundo REGAN (1981), o aumento da taxa de armadura de flexão desloca a linha neutra da laje aumentando a zona de concreto comprimido, como representado na Figura 2.6. Na zona comprimida o concreto encontra-se não fissurado e, portanto, íntegro para resistir ao cisalhamento. Pesquisadores como REGAN e BRÆSTRUP (1985), e SHERIF e DILGER (2000) defendem que a resistência à punção é função da raiz cúbica da taxa de armadura de flexão tracionada da laje.

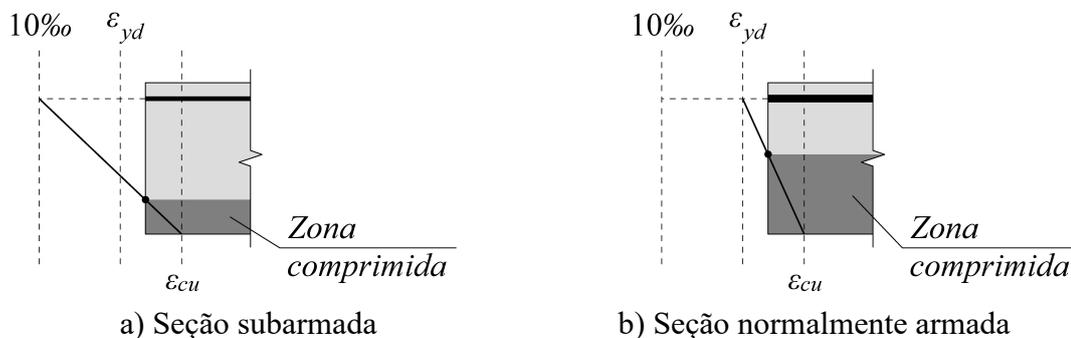


Figura 2.6 – Influência da taxa de armadura de flexão tracionada

### 2.2.3. DIMENSÕES E GEOMETRIA DO PILAR

As dimensões da seção transversal dos pilares também afetam a resistência à punção uma vez que definem o fluxo de tensões na região de ligação da laje ao pilar. Quanto maior a região carregada, ou seja, o pilar, menores tensões se desenvolvem, propiciando maior capacidade de

carga da ligação. É intuitivo que um pilar mais fino tenha maior facilidade em “perfurar” a laje. Neste sentido, a adoção de capitéis visa aumentar as dimensões do pilar apenas na região de ligação com a laje, suavizando a transferência de esforços entre a laje e o pilar.

Quanto à geometria do pilar, em experimentos como os de VANDERBILT (1972), foram observadas concentrações de tensões nas lajes nas proximidades dos vértices de pilares quadrados, o que não ocorre com pilares de seção circular. VANDERBILT (1972) concluiu ainda que lajes apoiadas em pilares de seção quadrada ou retangular tendem a apresentar menor resistência à punção devido a esta concentração de tensões.

#### **2.2.4. ALTURA ÚTIL DA LAJE E A CONSIDERAÇÃO DO *SIZE EFFECT***

O aumento da altura útil da laje melhora a resistência à punção das lajes lisas devido à maior espessura de concreto disponível para resistir ao cisalhamento. Neste sentido, a adoção de ábacos visa aumentar a espessura da laje apenas na região de ligação com o pilar.

No entanto, este aumento de resistência com a altura útil da laje não é linear, devendo-se levar em conta a influência do *size effect*, ou efeito de escala. Este efeito decorre de observações entre modelos experimentais de tamanhos diferentes mas geometricamente semelhantes, observando-se que a influência das dimensões dos materiais constituintes do concreto na resistência do modelo difere à medida que as dimensões da estrutura são alteradas. Em lajes lisas sujeitas à punção, por exemplo, o aumento altura útil da laje provoca aumento da carga resistente à punção, porém observa-se que a tensão média resistente diminui, caracterizando o *size effect* neste tipo de ruptura ( $V_{Rk} = \tau_{Rk} \cdot u_i \cdot d$ ).

Por razões econômicas e limitações físicas, é comum que os laboratórios de estruturas busquem avaliar a resistência à punção em modelos reduzidos de lajes em vez de modelos em escala real. No entanto, como alertado por GRAF (1938) e RICHART (1948) a resistência ao cisalhamento das lajes não varia de modo proporcional à sua espessura. Por exemplo, uma laje com espessura de 30 cm não chega a ser duas vezes mais resistente que outra, com propriedades semelhantes, porém, de 15 cm de espessura. Isso significa que a tensão

resistente média é menor na laje de 30 cm de espessura. Segundo BAZANT e CAO (1987), o *size effect* é caracterizado por esta comparação da tensão média resistente entre estruturas geometricamente semelhantes, fabricadas com os mesmos materiais, mas com diferentes alturas úteis, *d*. Ainda segundo os autores, quando o mecanismo de falha é frágil e dependente da propagação de fissuras, como é o caso da punção, não basta realizar uma análise do limite de resistência plástico do material: o *size effect* deve ser levado em consideração.

### **2.2.5. PRESENÇA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO**

Uma maneira eficiente de aumentar a resistência da ligação laje-pilar é utilizando armaduras de punção, uma vez que não prejudicam as características do projeto arquitetônico, nem aumentam consideravelmente o custo total do empreendimento em comparação com outras soluções como: utilização de capitéis ou ábacos; utilização de concreto mais resistente; aumento das dimensões dos pilares ou da laje ou o aumento da taxa de armadura de flexão. Diversos tipos de armaduras de punção já foram testados buscando avaliar sua eficiência técnica e construtiva, como os ilustrados na Figura 2.7.

No entanto, para a eficácia de tais armaduras é preciso garantir boas condições de ancoragem, o que nem sempre é fácil uma vez que estas são posicionadas perpendicularmente às lajes, que são normalmente delgadas. Além disso, estas armaduras devem ser corretamente dispostas na laje: próximas ao pilar e próximas entre si, de modo que interceptem as fissuras de cisalhamento. GOMES (1991), OLIVEIRA *et al* (2000) e BROMS (2000) *apud* FERREIRA (2010), mostraram que o correto uso de armaduras de punção pode ser tão eficaz que provoca até mesmo a mudança do modo de ruptura da laje para a flexão. A Figura 2.8 mostra duas distribuições ruins como contraexemplo, nas quais as armaduras de punção não são ativadas pelo mecanismo de falha.

Um modelo de armadura de punção ideal seria tal que permitisse boa ancoragem, que pudesse ser facilmente instalado nas proximidades dos pilares sem interferir nas armaduras de flexão, e que fosse de baixo custo econômico.

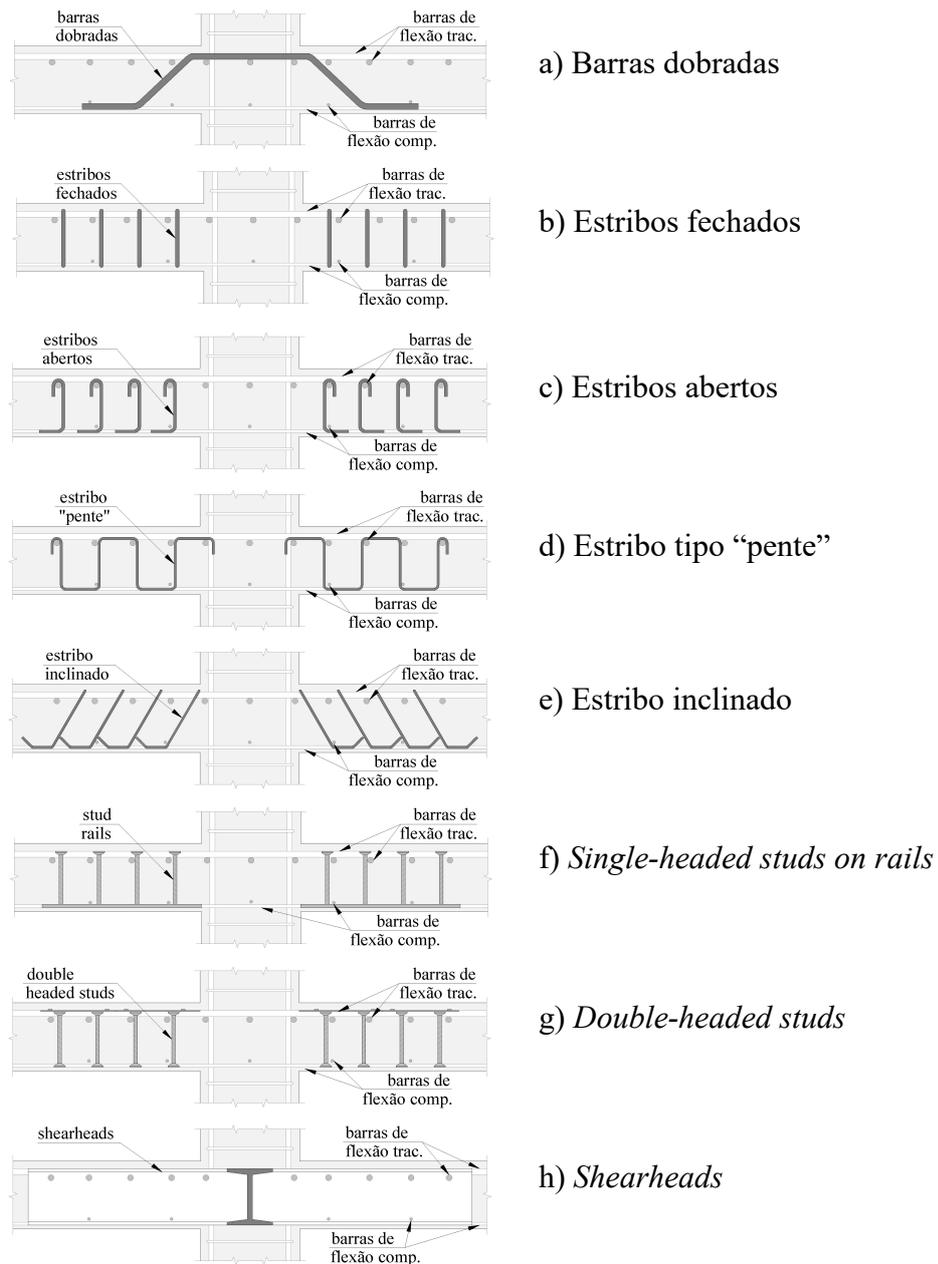


Figura 2.7 – Tipos de armaduras de punção para lajes lisas [FERREIRA (2010)]

Quanto à disposição das armaduras de punção na laje, o arranjo ideal, teoricamente, seria aquele em que estas fossem distribuídas igualmente em torno da superfície de ruptura, por exemplo, em uma conformação radial, o que nem sempre é fácil de ser obtido devido à interferência com as armaduras de flexão. Por isso, muitas vezes opta-se por distribuições em cruz. A Figura 2.9 ilustra as formas de distribuição radial e em cruz.

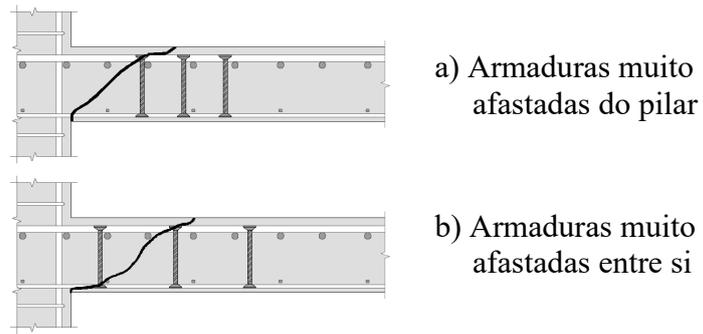


Figura 2.8 – Distribuições ruins das armaduras de punção  
[modificado – FERREIRA (2010)]

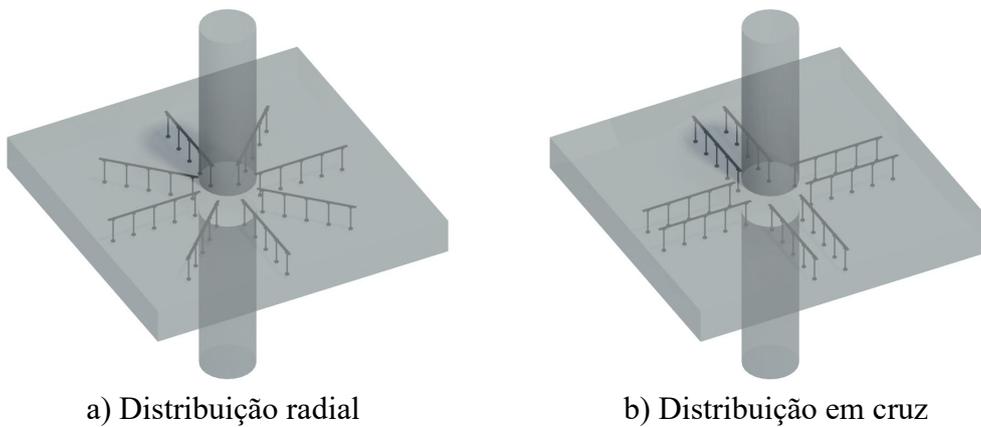


Figura 2.9 – Formas de distribuição das armaduras de punção

### 3. MODELO DE CÁLCULO E PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

Serão apresentadas neste trabalho as formulações das normas NBR 6118:2014, EUROCODE 2:2004, ACI 318:2014 e da recomendação do *fib* MODEL CODE:2010 referentes à verificação de lajes lisas à punção.

Nos modelos de cálculo de várias das normas existentes, a tensão solicitante é verificada em uma área crítica transversal ao plano da laje, delimitada por um perímetro crítico em torno do pilar. Essa abordagem permite a elaboração de expressões semiempíricas para as tensões resistentes, devidamente calibradas para o perímetro crítico adotado no modelo de cálculo. Quando em algum trecho do perímetro crítico a tensão solicitante de projeto se iguala à tensão resistente de projeto é atingido o estado limite último. Analogamente, em situação experimental, quando a tensão solicitante característica se iguala à tensão resistente característica, ocorre a ruptura da ligação laje-pilar.

No apoio com o pilar, a laje transfere esforços por meio de tensões solicitantes normais e de cisalhamento que, quando integradas ao longo da superfície crítica, podem ser representados, simplificadaamente, por uma carga vertical e duas componentes ortogonais de momentos fletores, conforme ilustra a Figura 3.1.

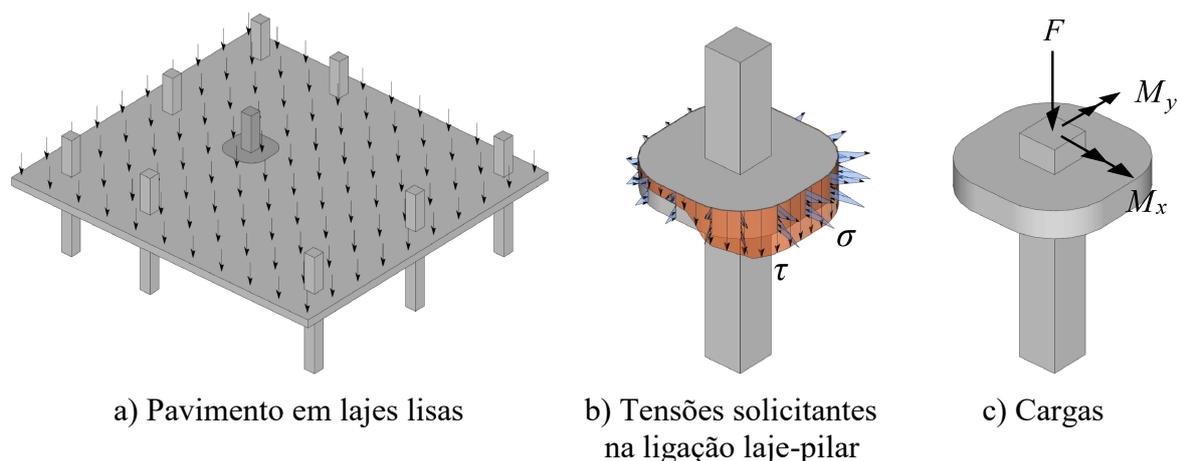


Figura 3.1 – Esquema dos esforços em uma ligação laje-pilar

Assim, com os esforços provenientes da análise estrutural, pode-se calcular a tensão máxima solicitante e compará-la com a tensão resistente conforme prescrito pela norma adotada.

Desta maneira são verificadas as resistências relativas:

- Ao esmagamento da biela;
- À tração diagonal;
- À tração diagonal na região externa às armaduras de punção.

A cada tipo de verificação são utilizadas diferentes expressões para a tensão resistente e diferentes traçados para os perímetros críticos. A carga resistente e o modo de ruptura são determinados pela falha que ocorrer com a menor carga solicitante.

Nos modelos adotados pelas normas, a altura útil das lajes armadas em duas direções é calculada como a média aritmética da altura útil de cada direção ortogonal  $x$  e  $y$  no plano da laje.

$$d = \frac{d_x + d_y}{2} \quad \text{Equação 3.1}$$

A taxa de armadura de flexão é calculada como a média geométrica das taxas em cada direção.

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \quad \text{Equação 3.2}$$

Para cálculo de  $\rho_x$  e  $\rho_y$ , considera-se a largura de laje que contém o pilar acrescida de uma margem de  $3d$  além das faces do pilar.

Nas próximas seções são apresentados os modelos de cálculo e prescrições das normativas supracitadas. Neste texto, será utilizada uma única simbologia para referir-se à carga vertical transferida da laje ao pilar, sendo  $F_{Sk}$  a carga solicitante característica, e  $F_{Sd}$  a carga solicitante de projeto. O mesmo será feito para o momento fletor transferido da laje ao pilar, sendo  $M_{Sk}$  e  $M_{Sd}$ . As cargas resistentes serão denominadas por  $V_{Rk}$  e  $V_{Rd}$ .

Quando adotadas armaduras de punção, são definidas as linhas e as camadas destas armaduras de acordo com o exemplo ilustrado na Figura 3.2, onde constam 12 linhas e 4 camadas.

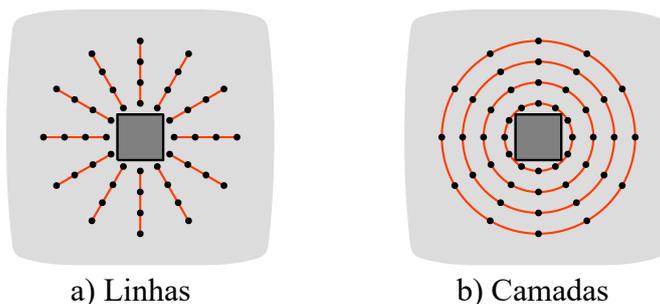


Figura 3.2 – Exemplo das denominações de linhas e camadas de armaduras de punção

Para a validade das expressões apresentadas ao longo deste capítulo, o referencial cartesiano levógiro definido na Figura 3.3 deve ser adotado. Com relação ao referencial, deve-se observar que:

- A origem sempre coincidirá com o centro geométrico do pilar, à altura do plano médio da laje;
- O eixo  $z$  é crescente no mesmo sentido da carga solicitante  $F_{sd}$  (ou  $F_{sk}$ );
- Em ligações laje-pilar de borda, a laje deve estar compreendida no semieixo  $x$  positivo;
- Em ligações laje-pilar de canto, a laje deve estar compreendida no quarto quadrante:  $x$  positivo e  $y$  negativo.

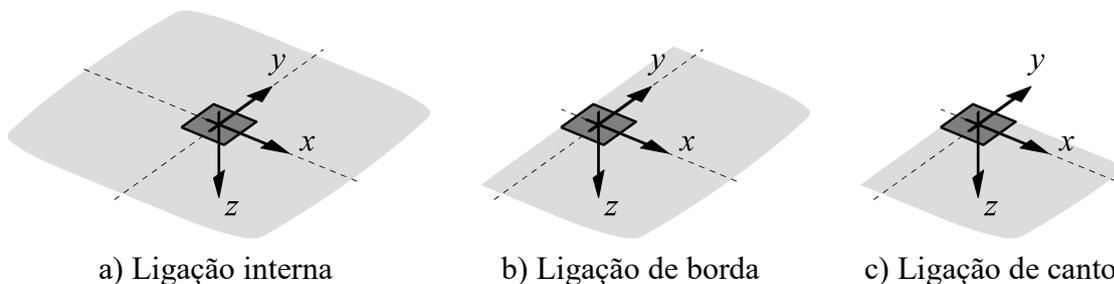


Figura 3.3 – Referencial cartesiano

Para que melhor se adequem aos referenciais definidos na Figura 3.3 e às explicações deste texto, os subíndices de alguns parâmetros de cálculo serão modificados em relação à simbologia apresentada pelos textos normativos. Interpretações do autor são apresentadas ao longo deste capítulo, sempre diferenciadas com fonte em *itálico*. Recomenda-se, a leitura das próximas seções em paralelo com o texto original de cada norma.

### 3.1. NBR 6118:2014 – PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO – PROCEDIMENTO

A seção 19.5 da NBR 6118:2014 é dedicada ao cálculo de lajes à punção. Para a segurança de projeto, a norma adota os coeficientes de minoração das resistências do concreto,  $\gamma_c$ , e do aço,  $\gamma_s$ , iguais a 1,4 e 1,15, respectivamente, segundo item 12.4.1 da NBR 6118:2014.

#### 3.1.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL

“Na primeira superfície crítica (contorno  $C$ ), do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento.” Item 19.5.1 da norma. A Figura 3.4 exemplifica o contorno  $C$ , que neste texto será denominado perímetro crítico  $u_0$ .

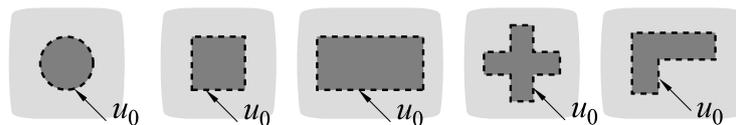


Figura 3.4 – Perímetro crítico  $u_0$  em pilares internos  
[modificado – NBR 6118:2014]

Do item 19.5.3.1 da norma, a tensão resistente vale:

$$\tau_{Rd2} = \frac{0,27}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{ck} \quad \text{Equação 3.3}$$

A norma brasileira permite que o valor de  $\tau_{Rd2}$  seja ampliado em 20% em ligações laje-pilar internas quando os vãos que chega a essa ligação não diferem mais de 50% e não existem aberturas na laje nas proximidades da ligação.

Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 na Equação 3.3 em vez de 1,4; obtém-se a tensão característica  $\tau_{Rk2}$ .

### 3.1.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL

“Na segunda superfície crítica (contorno  $C'$ ) afastada  $2d$  do pilar ou carga concentrada, deve ser verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também é feita através de uma tensão de cisalhamento, no contorno  $C'$ .” Item 19.5.1 da norma. A Figura 3.5 exemplifica o contorno  $C'$ , que neste texto será denominado perímetro crítico  $u_1$ , afastado  $2d$  do pilar.

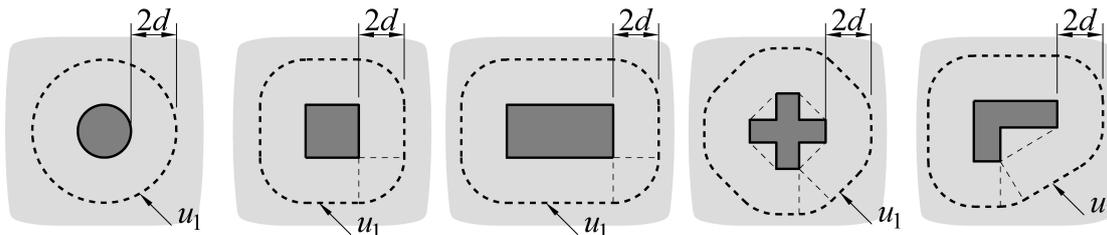


Figura 3.5 – Perímetro crítico  $u_1$  em pilares internos  
[modificado – NBR 6118:2014]

Nos casos de pilares cuja seção transversal é um polígono côncavo, a exemplo dos pilares em cruz e em “L” na Figura 3.5, o perímetro crítico é tomado afastado  $2d$  do polígono convexo que envolve a seção do pilar.

Do item 19.5.3.2 da norma, a resistência na ausência de armaduras de punção é dada por:

$$\tau_{Rd1} = \frac{0,182}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} \quad \text{Equação 3.4}$$

Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 na Equação 3.4 em vez de 1,4; obtém-se a tensão característica  $\tau_{Rk1}$ .

Caso a resistência se mostre insuficiente, podem ser previstos capitéis ou ábacos. Nesta situação a norma dispõe que: “Quando existir capitel, devem ser feitas duas verificações nos contornos críticos  $C'_1$  e  $C'_2$  (...)” Item 19.5.2.5 da norma. A Figura 3.6 exemplifica os contornos  $C'_1$  e  $C'_2$ , neste texto denominados perímetros críticos  $u_c$  e  $u_{c,out}$ , sendo que:

$d_c$  é a altura útil da laje na face do pilar;

$u_c$  é o perímetro crítico afastado  $2d_c$  da face do pilar;

$d$  é a altura útil da laje no contorno  $u_{c,out}$ ;

$u_{c,out}$  é o perímetro crítico afastado  $2d$  do final do ábaco ou capitel;

$d_a$  é a altura útil da laje no contorno  $u_c$ . Deve-se notar que no caso de adoção de ábaco esta altura é descontada da possível superfície tronco-cônica de ruptura formada em  $u_{c,out}$ ;

$\ell_c$  é a distância entre a borda do ábaco ou capitel e a face do pilar.

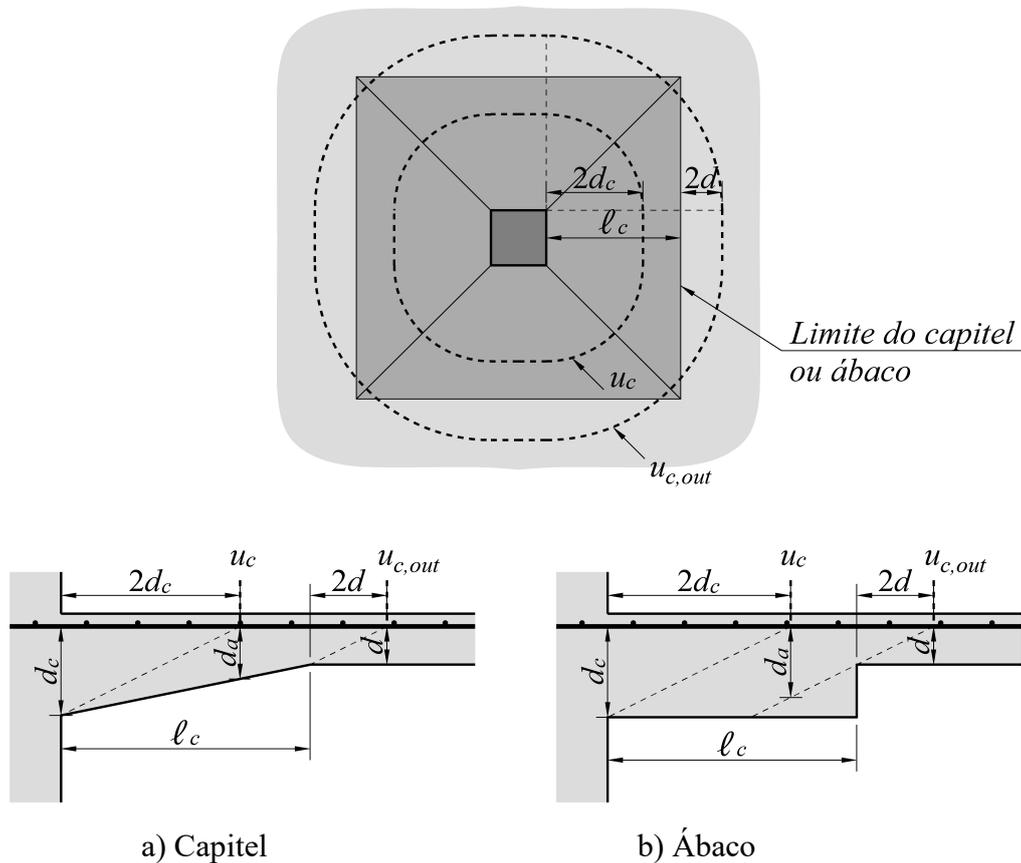


Figura 3.6 – Definição da altura útil e dos perímetros críticos no caso de ábaco ou capitel [modificado – NBR 6118:2014]

Então:

- Se  $\ell_c \leq 2(d_c - d)$ , basta verificar o perímetro  $u_{c,out}$ .
- Se  $2(d_c - d) < \ell_c \leq 2d_c$ , basta verificar o perímetro  $u_c$ .
- Se  $\ell_c > 2d_c$ , é necessário verificar ambos os perímetros  $u_c$  e  $u_{c,out}$ .

Se a resistência do concreto se mostrar insuficiente e a adoção de ábacos ou capitéis for ineficaz ou indesejada, devem ser adotadas armaduras de punção, conforme item 19.5.1 da norma: “Caso haja necessidade, a ligação deve ser reforçada por armadura transversal”.

As armaduras de punção devem ser dispostas levando em conta as distâncias  $s_0$ , da primeira camada de armaduras ao pilar, não maior que  $0,5d$ ; e  $s_r$ , distância entre camadas, não maior que  $0,75d$ ; conforme exemplifica a Figura 3.7. A figura também mostra o perímetro  $u_{out}$  e a distância  $s_c$ , que serão importantes na verificação da região externa às armaduras de punção.

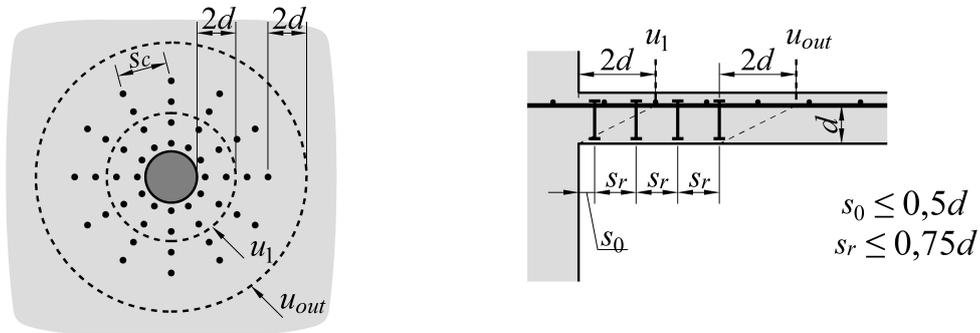


Figura 3.7 – Disposição da armadura de punção. Vista em corte [modificado – NBR 6118:2014]

Do item 19.5.3.3 da norma, a tensão resistente na presença de armaduras de punção vale:

$$\tau_{Rd3} = \frac{0,14}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk} \cdot \text{sen} \alpha}{\gamma_s \cdot u_1 \cdot d} \quad \text{Equação 3.5}$$

Onde  $A_{sw}$  é área de aço das armaduras de punção por camada;

$\alpha$  é a inclinação das armaduras de punção em relação ao plano da laje;

$f_{ywk}$  é a tensão de escoamento das armaduras de punção, devendo verificar as seguintes limitações:

$$\text{Se estribo: } f_{ywk} = \min \begin{cases} 287,5 \text{ e } f_{yk} & \text{se } h \leq 150 \text{ mm} \\ (0,925 \cdot h + 111,25) \cdot 1,15 \text{ e } f_{yk} & \text{se } 150 \text{ mm} < h < 350 \text{ mm} \\ 500,25 \text{ e } f_{yk} & \text{se } h \geq 350 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{Equação 3.6}$$

Se stud :  $f_{ywk} = \min \{ 345 \text{ e } f_{yk} \}$

Tais limitações se devem à deficiência na ancoragem dessas armaduras em lajes delgadas. Quando as armaduras passam a contribuir efetivamente a laje já se encontra bastante fissurada, o que também compromete a ancoragem. Isso dificulta que maiores níveis de

*tensão sejam atingidos, de modo que as armaduras de punção muitas vezes não chegam a escoar na ruptura por punção.*

Tomando  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  iguais a 1 na Equação 3.5 em vez de 1,4 e 1,15; obtém-se a tensão característica  $\tau_{Rk3}$ .

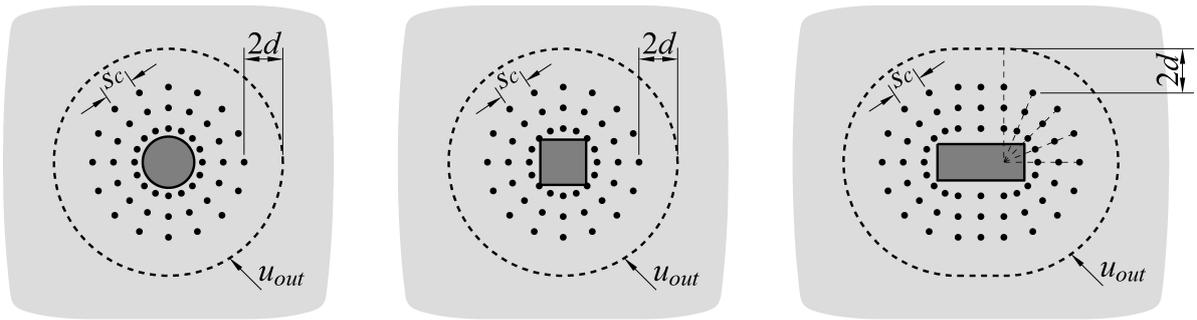
A norma prevê ainda, no item 19.5.3.5, armadura de punção obrigatória mesmo que a resistência à tração diagonal do concreto seja suficiente nos casos em que a estabilidade global da estrutura dependa da resistência da laje à punção. Neste cenário de projeto, a armadura de punção deve equilibrar o mínimo de 50% de  $F_{Sd}$ , ou seja:

$$1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{yk} \cdot \sin \alpha}{\gamma_s \cdot u_1 \cdot d} \geq 0,5 \left( \frac{F_{Sd}}{u_1 \cdot d} \right) \quad \text{Equação 3.7}$$

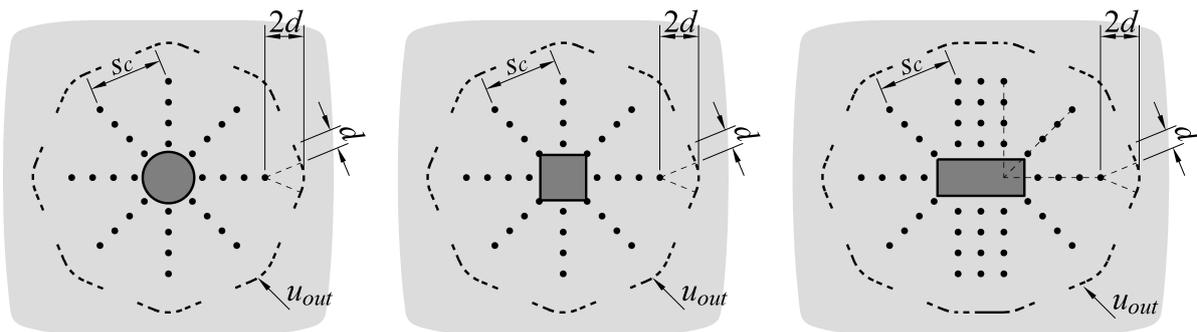
### **3.1.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO**

“A terceira superfície crítica (contorno  $C''$ ) apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal.” Item 19.5.1 da norma. A Figura 3.8 exemplifica o contorno  $C''$ , que neste texto será denominado  $u_{out}$ . Note, da figura, que quando o espaçamento  $s_c$  na camada mais externa de armaduras é maior que  $2d$ , o perímetro crítico  $u_{out}$  deve ser descontínuo conforme mostrado na Figura 3.8(b) e (d).

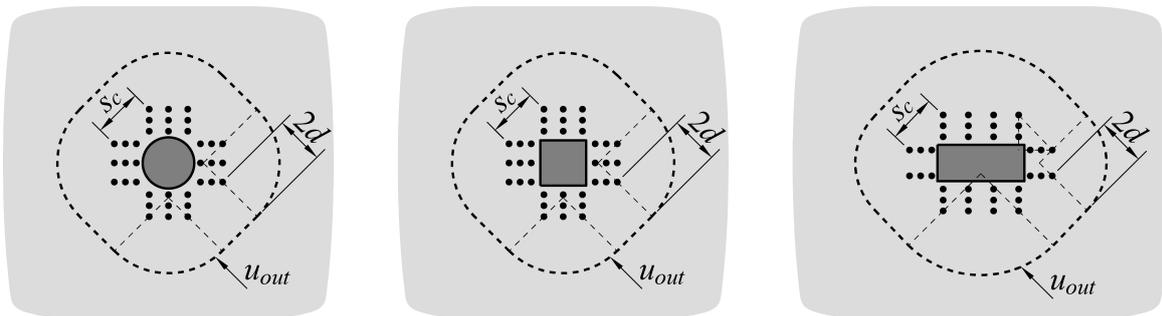
Emprega-se a mesma resistência à tração diagonal dada pela Equação 3.4.



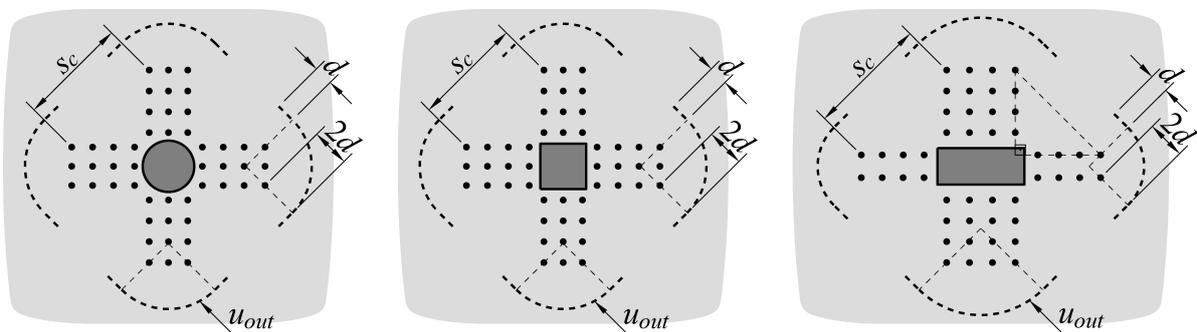
a)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$



c)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$



d)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

Figura 3.8 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar internas  
[modificado – NBR 6118:2014]

### 3.1.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS

Nas seções anteriores são tratadas apenas as tensões resistentes. Desta seção em diante são tratadas as tensões solicitantes, as quais diferem caso a verificação se dê em ligações laje-pilar internas, de borda ou de canto.

A tensão solicitante depende da carga transferida da laje ao pilar, podendo ser uma carga centrada ou com excentricidade. Segundo item 19.5.2.2 da norma: “No caso em que, além da força vertical, existe transferência de momento da laje para o pilar, o efeito de assimetria deve ser considerado”. Devido ao efeito do momento fletor, em certos trechos do perímetro crítico haverá acréscimo na tensão solicitante e, em outros trechos, decréscimo. Admitindo duas componentes de momentos fletores, a tensão solicitante precisa ser estudada em quatro trechos do perímetro crítico, sendo o maior valor, em módulo, determinante para a resistência à punção. A Figura 3.9 mostra as tensões de cisalhamento nos quatro trechos do perímetro crítico em ligações laje-pilar internas.

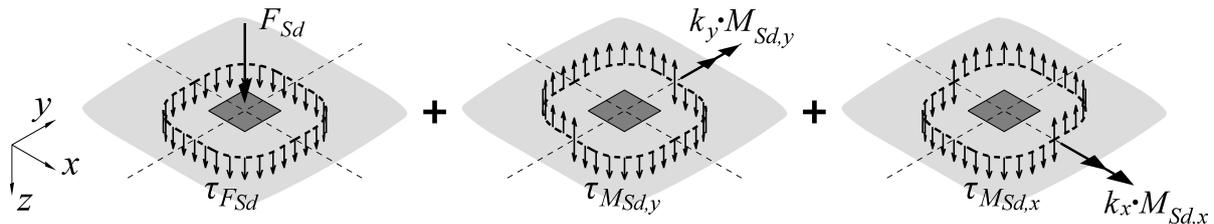


Figura 3.9 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar internas

Na Equação 3.8 cada combinação de sinais de soma e subtração é referente à tensão em algum trecho do perímetro crítico.

$$\tau_{Sd} = \max \begin{cases} \left| \tau_{F_{Sd}} - \tau_{M_{Sd,y}} + \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{M_{Sd,y}} + \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{M_{Sd,y}} - \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} - \tau_{M_{Sd,y}} - \tau_{M_{Sd,x}} \right| \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.8 \end{array}$$

Como o sentido do eixo z coincide com o de  $F_{Sd}$ , o que torna  $\tau_{F_{Sd}}$  sempre positivo, a expressão pode ser simplificada:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u_i \cdot d} + \frac{k_y \cdot |M_{Sd,y}|}{W_{i,y} \cdot d} + \frac{k_x \cdot |M_{Sd,x}|}{W_{i,x} \cdot d} \quad \text{Equação 3.9}$$

Onde  $u_i$  designa o perímetro crítico no qual a tensão solicitante está sendo analisada, podendo ser  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_{out}$ ,  $u_c$  ou  $u_{c,out}$ ;

$F_{Sd}$  é a carga vertical solicitante transferida da laje para o pilar;

$M_{Sd,y}$  é o momento fletor solicitante transferido da laje para o pilar na direção  $y$ ;

$M_{Sd,x}$  é o momento fletor solicitante transferido da laje para o pilar na direção  $x$ ;

$W_{i,y}$  e  $W_{i,x}$  são parâmetros definidos como o módulo de resistência plástica do perímetro  $u_i$ :

$$W_{i,y} = \int_{u_i} |x| du_i \quad \text{Equação 3.10}$$

$$W_{i,x} = \int_{u_i} |y| du_i \quad \text{Equação 3.11}$$

Sendo  $du_i$  o comprimento infinitesimal do perímetro crítico  $u_i$ .

$k_y$  e  $k_x$  são os coeficientes que fornecem a fração do momento fletor que é transmitida por cisalhamento (o restante é transmitido por esforços normais e torçores). *Tal coeficiente depende da rigidez do pilar na direção da ação do momento fletor, e pode ser obtido em função da razão entre os seus lados. Quanto mais rígido for o pilar para fletir, maior parcela do momento será transferida por cisalhamento.* A Tabela 3.1 fornece os valores de  $k_y$  e  $k_x$ , além de  $k_{y,ext}$  e  $k_{x,ext}$ , que serão utilizados na análise de ligações laje-pilar de extremidade, ou seja, ligações de borda (Seção 3.1.5) e de canto (Seção 3.1.6).

Tabela 3.1 – Valores de  $k_y$  e  $k_x$  [adaptado – NBR 6118:2014]

$c_y/c_x$	0,5	1,0	2,0	3,0
$k_y$	0,70	0,60	0,45	0,40
$k_x$	0,45	0,60	0,70	0,80
$k_{y,ext}$	0,6	0,45	0,375	0,35
$k_{x,ext}$	0,375	0,45	0,60	0,65

Onde  $c_y$  é a dimensão do pilar ao longo da direção  $y$ , e  $c_x$  é a dimensão do pilar ao longo da direção  $x$ .

Para diferentes razões  $c_y/c_x$ , o autor sugere que os coeficientes  $k_y$  e  $k_x$  sejam calculados pela Equação 3.12, adaptada de CORDOVIL (1997):

$$k_y = \begin{cases} 0,1(c_x/c_y) + 0,5 & \text{se } c_x/c_y \geq 1 \\ 0,3(c_x/c_y) + 0,3 & \text{se } c_x/c_y < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.12(a) \end{array}$$

$$k_x = \begin{cases} 0,1(c_y/c_x) + 0,5 & \text{se } c_y/c_x \geq 1 \\ 0,3(c_y/c_x) + 0,3 & \text{se } c_y/c_x < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.12(b) \end{array}$$

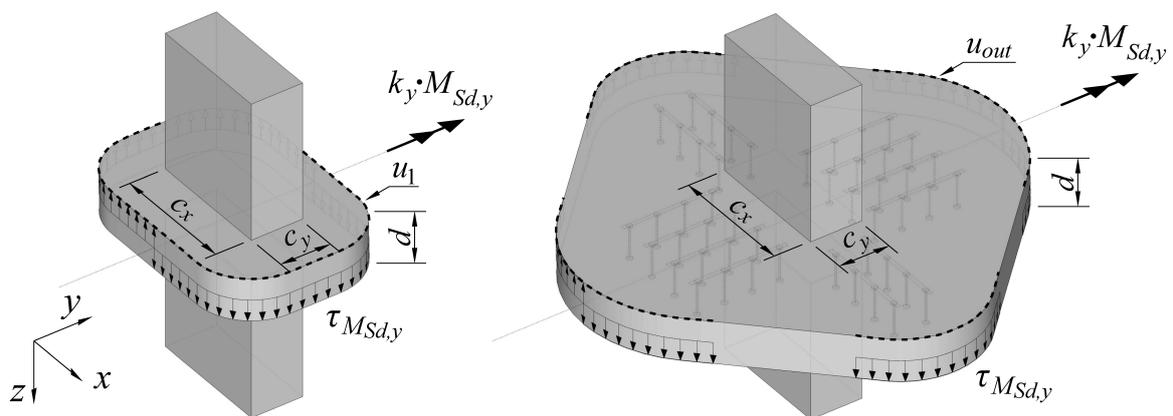
Para  $k_{x,ext}$ , a norma exige que seja tomada a metade da relação  $c_y/c_x$ , portanto as expressões se tornam:

$$k_{y,ext} = \begin{cases} 0,05(c_x/c_y) + 0,5 & \text{se } c_x/c_y \geq 2 \\ 0,15(c_x/c_y) + 0,3 & \text{se } c_x/c_y < 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.12(c) \end{array}$$

$$k_{x,ext} = \begin{cases} 0,05(c_y/c_x) + 0,5 & \text{se } c_y/c_x \geq 2 \\ 0,15(c_y/c_x) + 0,3 & \text{se } c_y/c_x < 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.12(d) \end{array}$$

O fator  $(F_{sd}/u_i \cdot d)$  na Equação 3.9 resulta da consideração de que a força vertical age igualmente em toda a área da seção crítica  $u_i \cdot d$ .

A observação da Figura 3.10 ajuda a entender fator  $(k_y \cdot M_{sd,y}/W_{i,y} \cdot d)$  na Equação 3.9.



a) Efeito de  $M_{sd,y}$  no perímetro  $u_1$       b) Efeito de  $M_{sd,y}$  no perímetro  $u_{out}$  com  $s_c > 2d$

Figura 3.10 – Distribuição das tensões de cisalhamento decorrentes do momento fletor em uma ligação laje-pilar interna

A NBR 6118:2014 considera que a tensão de cisalhamento causada pela transmissão do momento fletor da laje para o pilar se distribui de maneira uniforme ao longo do perímetro crítico, mudando apenas de sentido a cada lado do eixo de ação do momento fletor, como ilustrado na Figura 3.10.

Observando que a tensão de cisalhamento  $\tau_{M_{Sd,y}}$  age em cada área infinitesimal  $du_i \cdot d$ , com braço de alavanca igual a  $|x|$ , e causa momento infinitesimal  $k_y \cdot dM_{Sd,y}$ , pode-se equacionar:

$$k_y \cdot dM_{Sd,y} = \tau_{M_{Sd,y}} \cdot du_i \cdot d \cdot |x| \quad \text{Equação 3.13(a)}$$

Realizando a integração:

$$k_y \cdot M_{Sd,y} = \tau_{M_{Sd,y}} \cdot d \cdot \int_{u_i} |x| du_i \quad \text{Equação 3.13(b)}$$

Isolando  $\tau_{M_{Sd,y}}$ , e substituindo a integral por  $W_{i,y}$ , obtém-se a tensão  $\tau_{M_{Sd,y}} = (k_y \cdot M_{Sd,y} / W_{i,y} \cdot d)$ .

A Figura 3.11 é análoga à Figura 3.10, porém, com transferência de momento na outra direção, de onde surge, por desenvolvimento análogo, o fator  $\tau_{M_{Sd,x}} = (k_x \cdot M_{Sd,x} / W_{i,x} \cdot d)$  presente na Equação 3.9.

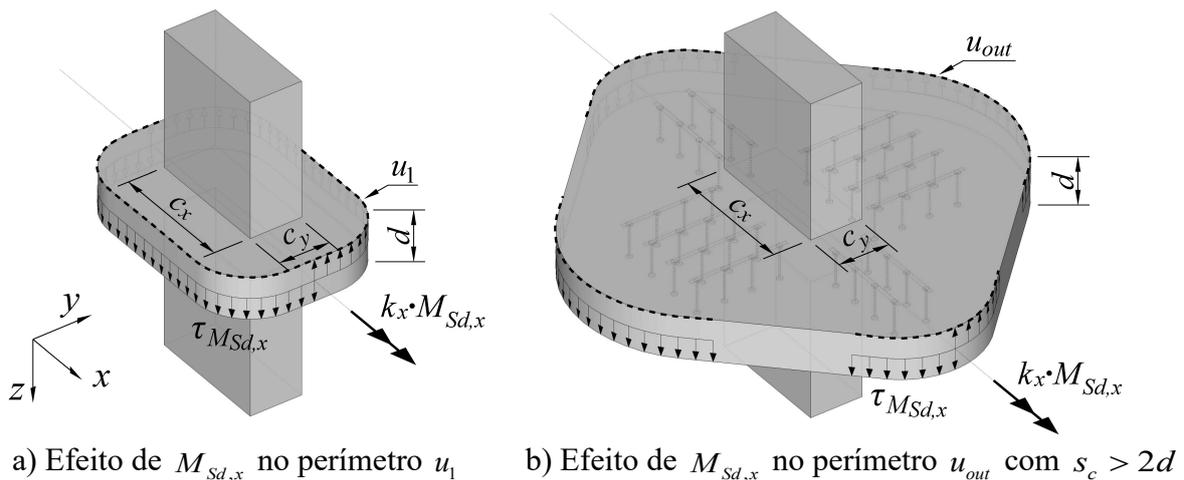


Figura 3.11 – Distribuição das tensões de cisalhamento decorrentes do momento fletor em uma ligação laje-pilar interna

Por questão de comodidade de escrita, neste texto a tensão  $\tau_{Sd}$  será representada por  $\tau_{Sd} = \beta_{Sd,i} (F_{Sd}/u_i \cdot d)$ , de onde surge o adimensional  $\beta_{Sd,i}$  para ligações laje-pilar internas, dado por:

$$\beta_{Sd,i} = 1 + \frac{k_y \cdot u_i}{W_{i,y}} \frac{|M_{Sd,y}|}{F_{Sd}} + \frac{k_x \cdot u_i}{W_{i,x}} \frac{|M_{Sd,x}|}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.14}$$

Em situações experimentais,  $\beta_{Sd,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.14, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,y}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar:

$$e_x = \frac{M_{Sk,y}}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.15}$$

$$e_y = -\frac{M_{Sk,x}}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.16}$$

### 3.1.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA

Para ligações laje-pilar de borda, a norma considera dois perímetros críticos:  $u_1$  e o perímetro reduzido  $u_1^*$ , tais como definidos na Figura 3.13. O autor entende que devem ser definidos, de maneira análoga, os perímetros  $u_0$  e  $u_0^*$ , como ilustrado na Figura 3.12 e  $u_{out}$  e  $u_{out}^*$ , como nas Figuras 3.14 e 3.15, além de, nos casos de adoção de ábacos ou capitéis,  $u_c$ ,  $u_c^*$ ,  $u_{c,out}$  e  $u_{c,out}^*$ .

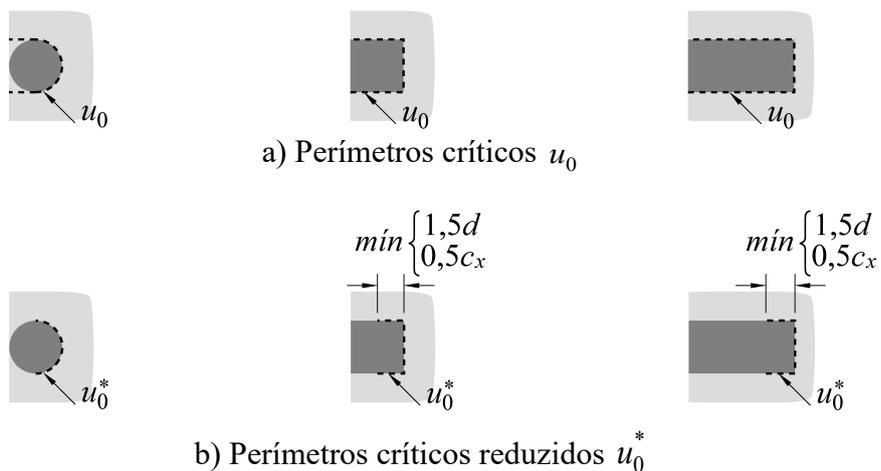


Figura 3.12 – Traçado dos perímetros críticos  $u_0$  e  $u_0^*$  em ligações laje-pilar de borda

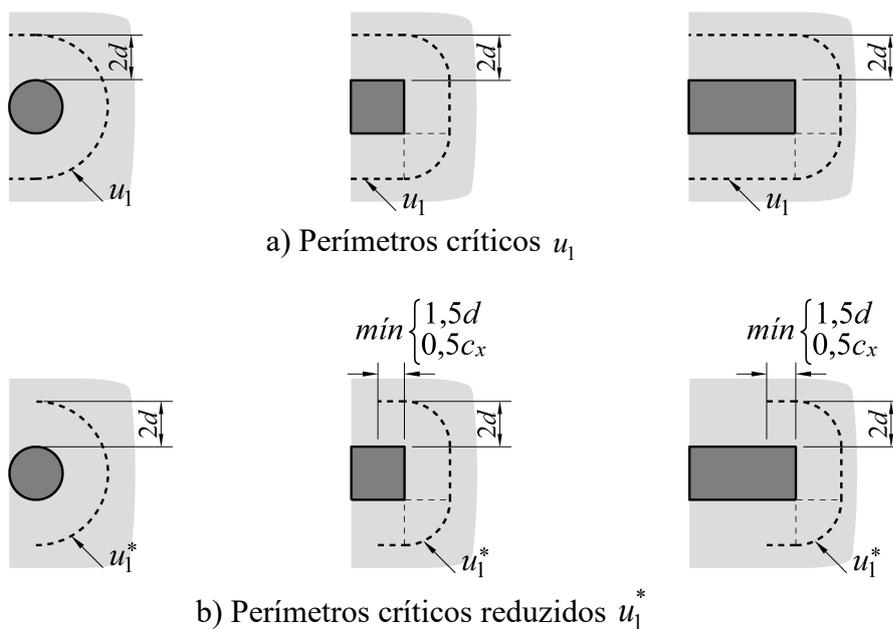
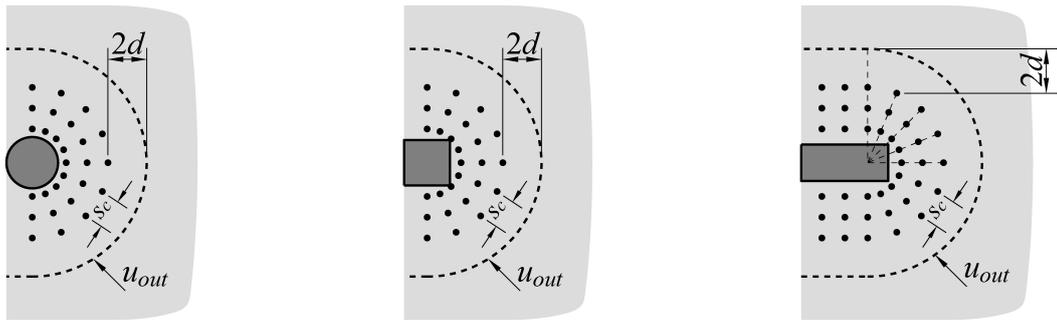
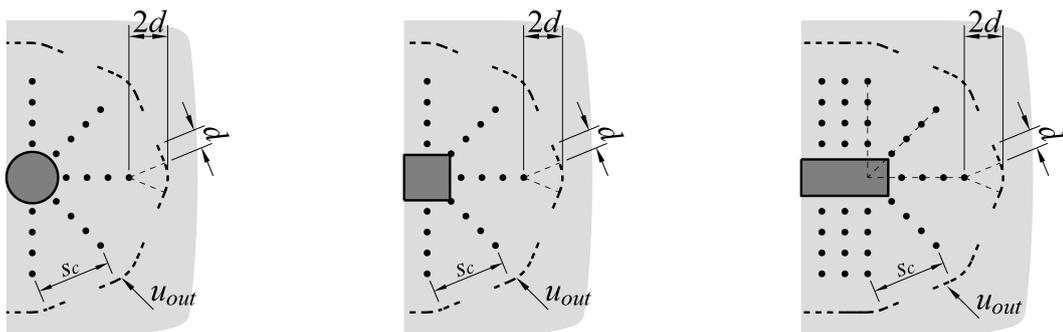


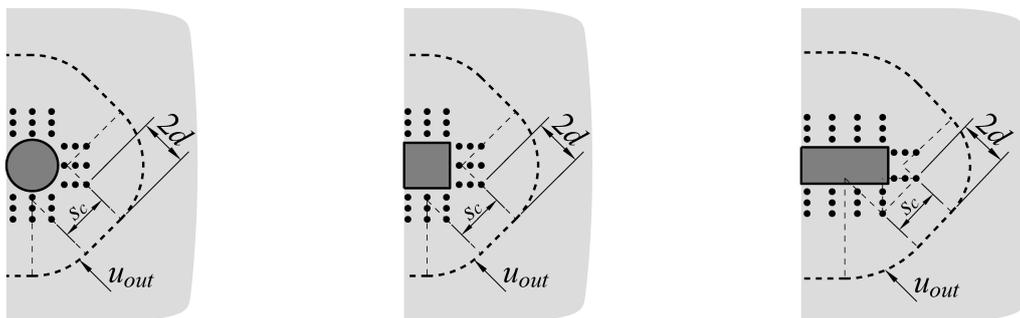
Figura 3.13 – Traçado dos perímetros críticos  $u_1$  e  $u_1^*$  em ligações laje-pilar de borda  
[modificado – NBR 6118:2014]



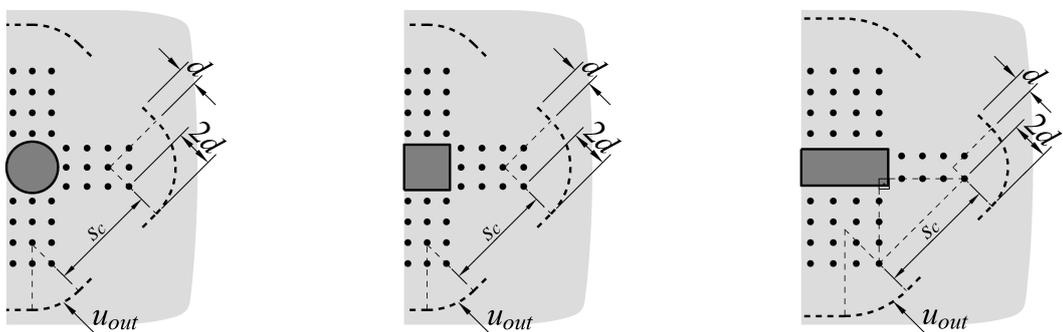
a)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$

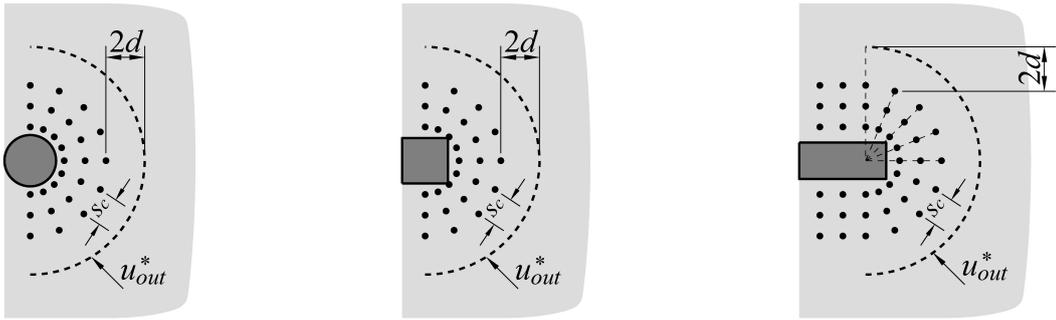


c)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$

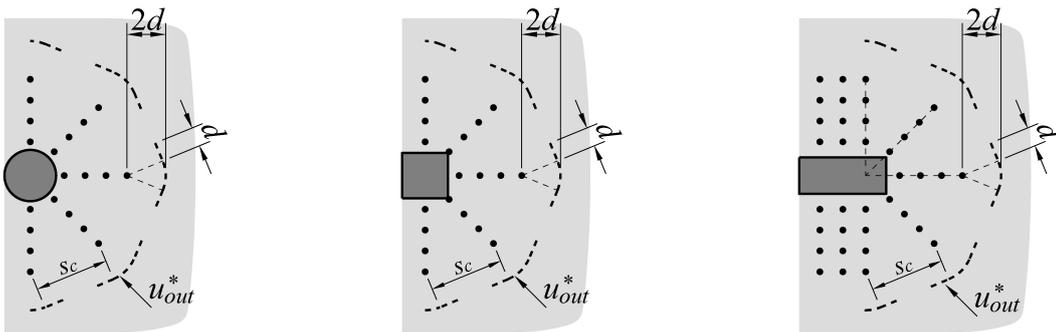


d)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

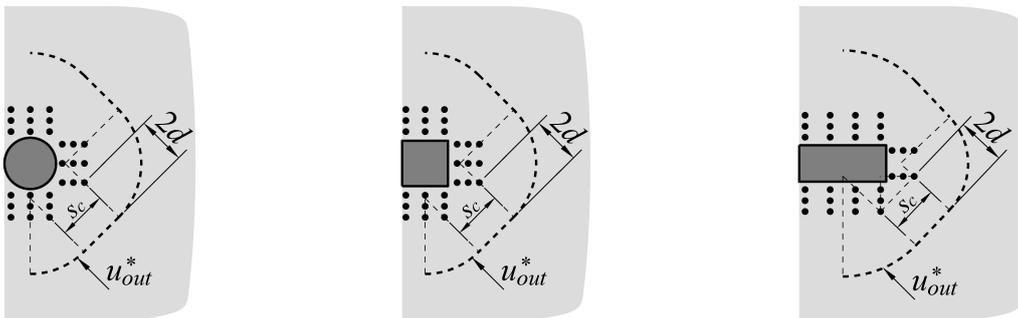
Figura 3.14 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar de borda



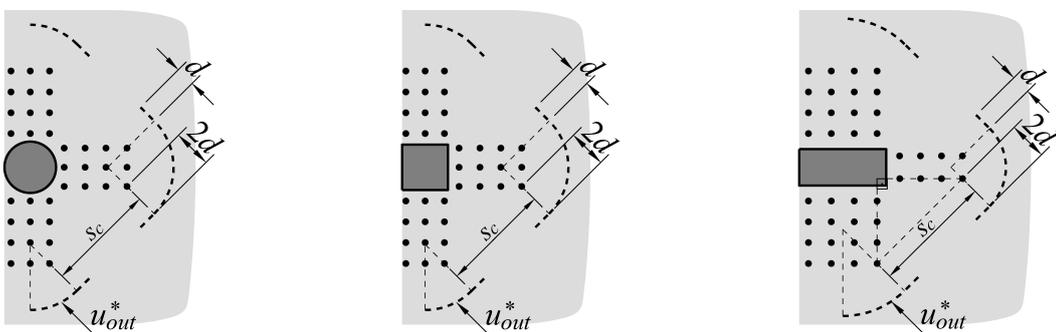
a)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$



c)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$



d)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

Figura 3.15 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}^*$  em ligações laje-pilar de borda

Do item 19.5.2.3 da norma, entende-se que a força vertical age uniformemente apenas na área da seção crítica reduzida,  $u_i^* \cdot d$ . O momento fletor, porém, age no centro geométrico do perímetro crítico  $u_i$ , de forma que sua distribuição de tensões reproduz um binário, com resultante vertical nula.

Admitindo duas componentes de momentos fletores, a tensão solicitante precisa ser estudada em seis trechos do perímetro crítico, sendo o maior valor, em módulo, determinante para a resistência à punção. A Figura 3.16 mostra as tensões de cisalhamento nos seis trechos do perímetro crítico em ligações laje-pilar de borda.

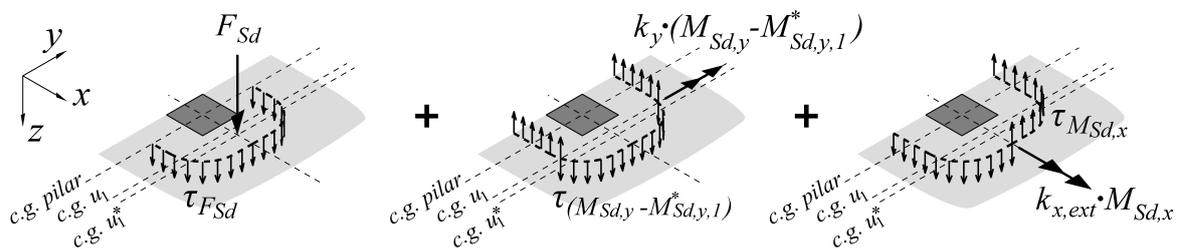


Figura 3.16 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar de borda

Na Equação 3.17 cada expressão e cada combinação de sinais de soma e subtração é referente à tensão em algum trecho do perímetro crítico.

$$\tau_{Sd} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| -\tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} + \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} - \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} + \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} + \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} - \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} - \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} - \tau_{M_{Sd,x}} \right| \\ \left| -\tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,l}^*)} - \tau_{M_{Sd,x}} \right| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.17 \end{array}$$

Como o sentido do eixo  $z$  coincide com o de  $F_{Sd}$ , o que torna  $\tau_{F_{Sd}}$  sempre positivo, verifica-se que a primeira e a última combinação de tensões nunca serão a máxima. Assim, a expressão pode ser simplificada:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} + \frac{k_y \cdot |M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*|}{W_{i,y} \cdot d} + \frac{k_{x,ext} \cdot |M_{Sd,x}|}{W_{i,x} \cdot d} \quad \text{Equação 3.18}$$

O termo  $M_{Sd,y,i}^*$  é uma parcela de correção do momento fletor. A Figura 3.17 auxilia as subsequentes deduções a respeito desta parcela.

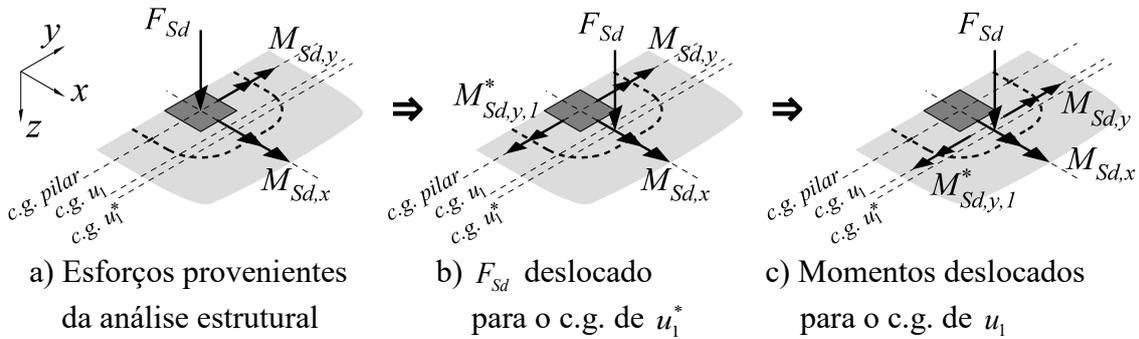


Figura 3.17 – Translação de  $F_{Sd}$ , de onde surge o momento de correção  $M_{Sd,y,i}^*$

O esquema resultante na Figura 3.17(c) se traduz nas tensões de cisalhamento ilustradas na Figura 3.16. O fator  $(F_{Sd}/u_i^* \cdot d)$  na Equação 3.18 resulta da consideração de que a força vertical age uniformemente em toda a área da seção crítica reduzida,  $u_i^* \cdot d$ . Porém, na análise estrutural, a força  $F_{Sd}$  é obtida no centro geométrico do pilar, e o seu deslocamento para o centro geométrico do perímetro  $u_i^*$  provoca momento fletor igual a:

$$M_{Sd,y,i}^* = (F_{Sd} \cdot x_{cg,u_i^*}) \quad \text{Equação 3.19}$$

Onde:

$$x_{cg,u_i^*} = \frac{\int x du_i^*}{u_i^*} \quad \text{Equação 3.20}$$

Este momento fletor precisa ser subtraído para não alterar o equilíbrio de esforços. Então, o momento  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)$  é traduzido em tensões de cisalhamento uniformes ao longo do perímetro cheio  $u_i$ , de onde surge o fator  $[k_y \cdot (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*) / W_{i,y} \cdot d]$  da Equação 3.18.

Deve-se destacar da Figura 3.17 que o eixo de ação do momento  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)$  coincide com o centro geométrico da superfície  $u_i \cdot d$ , pois só assim sua distribuição de tensões de

cisalhamento reproduz um binário, com resultante de esforços verticais nula. Logo, o termo  $W_{i,y}$  é calculado com relação ao centro geométrico do perímetro cheio,  $u_i$ .

$$W_{i,y} = \int_{u_i} |x - x_{cg,u_i}| du_i \quad \text{Equação 3.21}$$

Onde:

$$x_{cg,u_i} = \frac{\int x du_i}{u_i} \quad \text{Equação 3.22}$$

Na outra direção,  $W_{i,x}$  é calculado pela Equação 3.11. Ressalta-se que a norma utiliza o coeficiente  $k_{x,ext}$  para obtenção da parcela do momento fletor  $M_{Sd,x}$  transferida por cisalhamento. O cálculo do coeficiente  $k_{x,ext}$  foi definido na Tabela 3.1 e na Equação 3.12(d).

Por questão de comodidade de escrita, neste texto a tensão  $\tau_{Sd}$  será representada por  $\tau_{Sd} = \beta_{Sd,i} (F_{Sd}/u_i \cdot d)$ , de onde surge o adimensional  $\beta_{Sd,i}$  para ligações laje-pilar de borda, dado por:

$$\beta_{Sd,i} = \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_y u_i}{W_{i,y}} \frac{|M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*|}{F_{Sd}} + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} \frac{|M_{Sd,x}|}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.23}$$

Em situações experimentais,  $\beta_{Sk,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.23, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,y}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar, dadas pelas Equações 3.15 e 3.16, além da relação  $M_{Sk,y,i}^*/F_{Sk}$ , que equivale a  $x_{cg,u_i}^*$ .

### 3.1.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO

Para ligações laje-pilar de canto, a norma também considera dois perímetros críticos,  $u_1$  e o perímetro reduzido  $u_1^*$ , tais como definidos na Figura 3.19. O autor entende que devem ser definidos, de maneira análoga, os perímetros  $u_0$  e  $u_0^*$ , como ilustrado na Figura 3.18 e  $u_{out}$  e  $u_{out}^*$ , como nas Figuras 3.20 e 3.21, além de, nos casos de adoção de ábacos ou capitéis,  $u_c$ ,  $u_{c,out}$  e  $u_{c,out}^*$ .

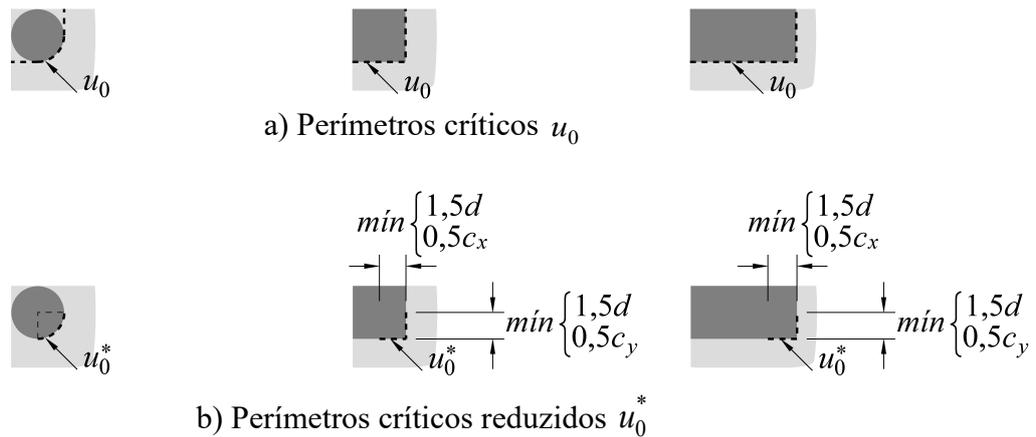


Figura 3.18 – Traçado dos perímetros críticos  $u_0$  e  $u_0^*$  em ligações laje-pilar de canto

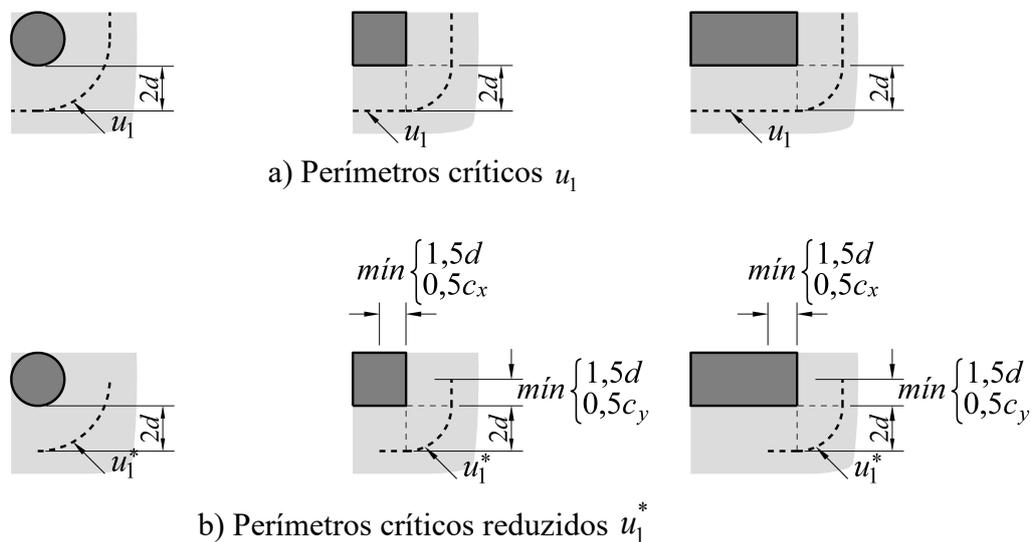
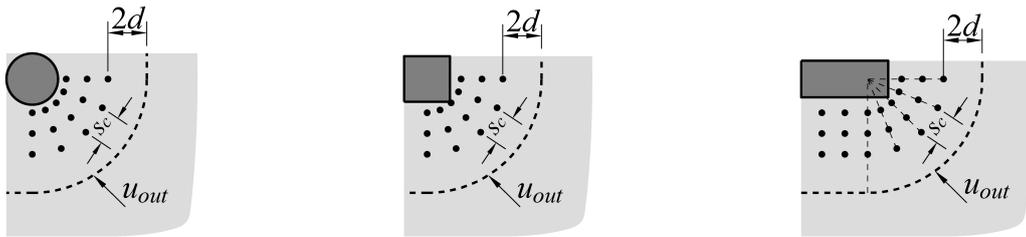
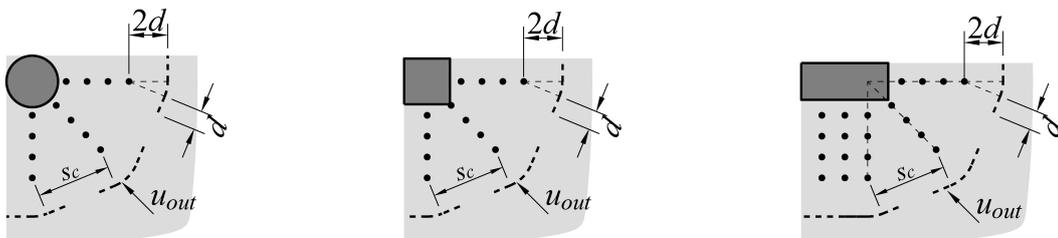


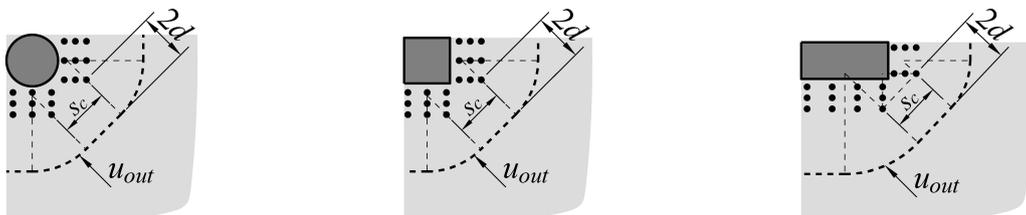
Figura 3.19 – Traçado dos perímetro críticos  $u_1$  e  $u_1^*$  em ligações laje-pilar de canto  
[modificado – NBR 6118:2014]



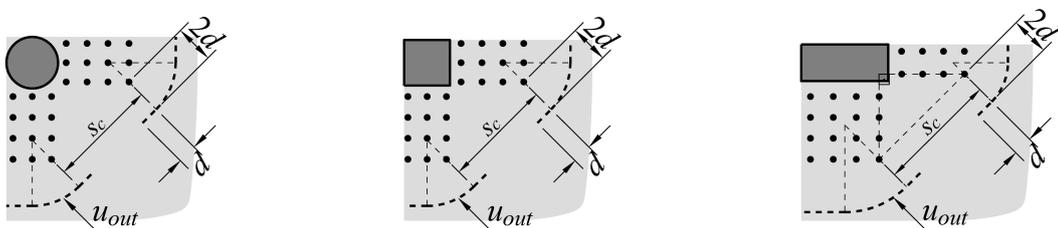
a)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$



c)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$



d)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

Figura 3.20 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar de canto

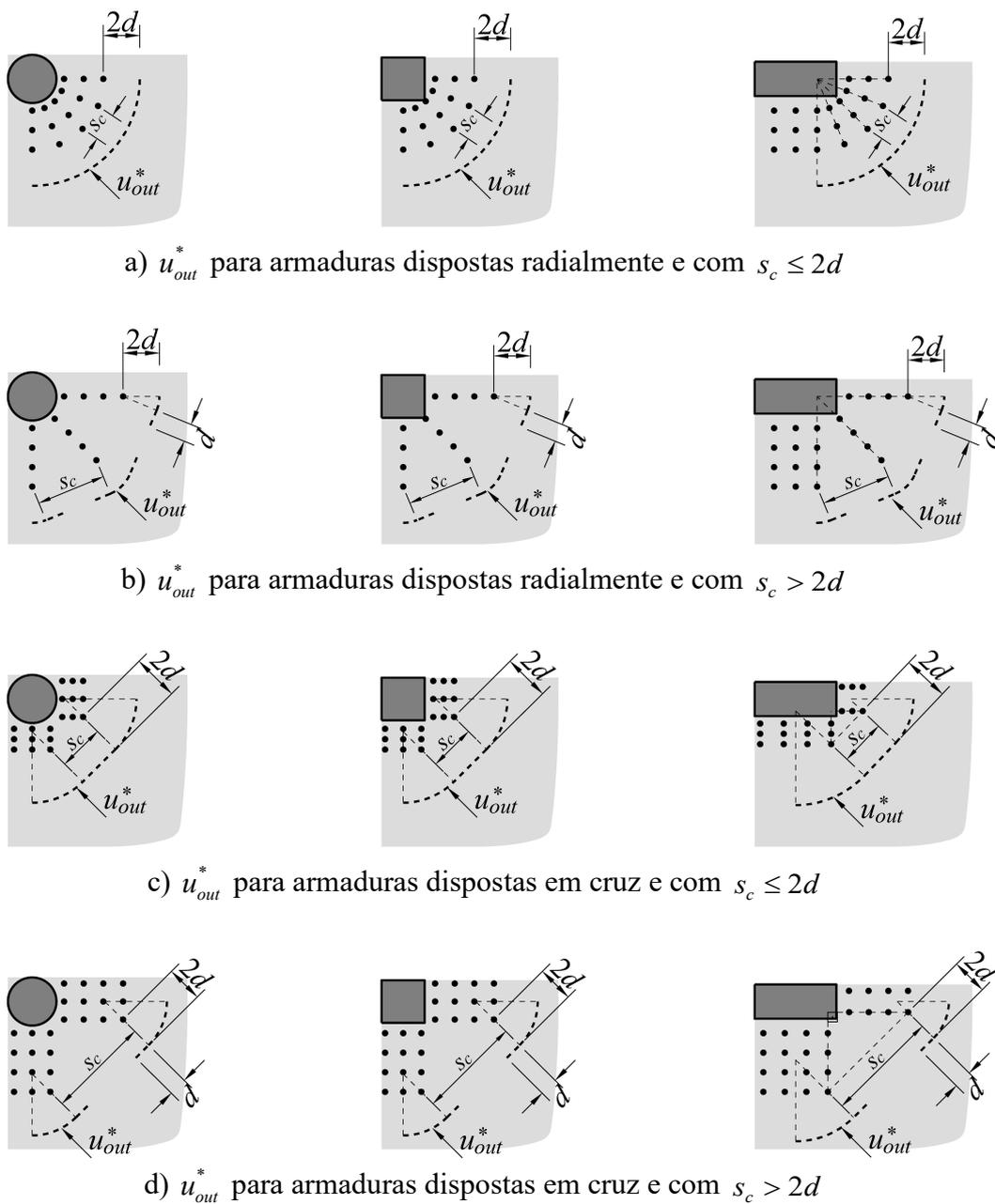


Figura 3.21 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}^*$  em ligações laje-pilar de canto

Do item 19.5.2.4 da norma: “Aplica-se o disposto para o pilar de borda quando não age momento no plano paralelo à borda.

Como o pilar de canto apresenta duas bordas livres, deve ser feita a verificação separadamente para cada uma delas, considerando o momento fletor, cujo plano é perpendicular à borda livre adotada.”

Depreende-se do trecho acima que devem ser verificadas duas tensões solicitantes, expressas nas Equações 3.24 e 3.25 uma para cada componente do momento fletor.

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} + \frac{k_y \cdot |M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*|}{W_{i,y} \cdot d} \quad \text{Equação 3.24}$$

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} + \frac{k_x \cdot |M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*|}{W_{i,x} \cdot d} \quad \text{Equação 3.25}$$

No entanto, o autor entende que estas parcelas do momento fletor  $M_{Sd,y}$  e  $M_{Sd,x}$  não deveriam ser verificados isoladamente uma vez que agem simultaneamente na estrutura. Além disso, na análise estrutural, a força  $F_{Sd}$  é obtida no centro geométrico do pilar, e o seu deslocamento para o centro geométrico do perímetro  $u_i^*$  provoca duas parcelas ortogonais de momentos fletores, iguais a:

$$M_{Sd,y,i}^* = F_{Sd} \cdot x_{cg,u_i^*} \quad \text{Equação 3.26}$$

$$M_{Sd,x,i}^* = -F_{Sd} \cdot y_{cg,u_i^*} \quad \text{Equação 3.27}$$

Ambas precisam ser subtraídas para manutenção do equilíbrio de esforços, não bastando subtrair uma por vez como sugere a norma. As coordenadas do centro geométrico da superfície crítica reduzida são dadas por:

$$x_{cg,u_i^*} = \frac{\int x du_i^*}{u_i^*} \quad \text{Equação 3.28}$$

$$y_{cg,u_i^*} = \frac{\int y du_i^*}{u_i^*} \quad \text{Equação 3.29}$$

Deste modo, o autor defende que seria fisicamente mais coerente sobrepor os efeitos dos momentos fletores em cada direção ortogonal. Sendo assim, a tensão solicitante precisa ser estudada em cinco trechos do perímetro crítico, sendo o maior valor, em módulo,

determinante para a resistência à punção. A Figura 3.22 mostra as tensões de cisalhamento nos cinco trechos do perímetro crítico em ligações laje-pilar de canto.

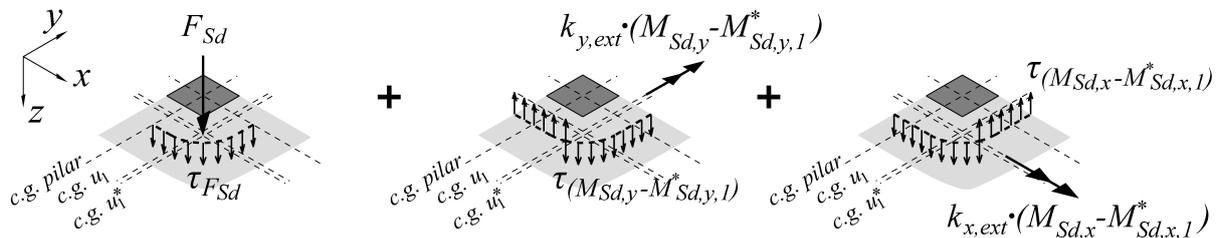


Figura 3.22 – Dedução da tensão solicitante máxima em ligações laje-pilar de canto

Na Equação 3.30 cada expressão e cada combinação de sinais de soma e subtração é referente à tensão em algum trecho do perímetro crítico.

$$\tau_{Sd} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| -\tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)} + \tau_{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} - \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)} + \tau_{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)} + \tau_{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)} \right| \\ \left| \tau_{F_{Sd}} + \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)} - \tau_{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)} \right| \\ \left| \tau_{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)} - \tau_{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)} \right| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.30 \end{array}$$

Como o sentido do eixo z coincide com o de  $F_{Sd}$ , o que torna  $\tau_{F_{Sd}}$  sempre positivo, verifica-se que a primeira e a última combinação de tensões nunca serão a máxima. Portanto, a expressão pode ser simplificada:

$$\tau_{Sd} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} - \frac{k_{y,ext} \cdot (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{W_{i,y} \cdot d} + \frac{k_{x,ext} \cdot (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{W_{i,x} \cdot d} \right| \\ \left| \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} + \frac{k_{y,ext} \cdot (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{W_{i,y} \cdot d} + \frac{k_{x,ext} \cdot (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{W_{i,x} \cdot d} \right| \\ \left| \frac{F_{Sd}}{u_i^* \cdot d} + \frac{k_{y,ext} \cdot (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{W_{i,y} \cdot d} - \frac{k_{x,ext} \cdot (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{W_{i,x} \cdot d} \right| \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.31 \end{array}$$

Deve-se destacar da Equação 3.31 que os eixos de ação dos momentos  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)$  e  $(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)$  coincidem com o centro geométrico da superfície  $u_i \cdot d$ , pois só assim suas

distribuições de tensões de cisalhamento reproduzem dois binários, cada um com resultante de esforços verticais nula. Logo, os termos  $W_{i,y}$  e  $W_{i,x}$  são calculados com relação ao centro geométrico do perímetro cheio,  $u_i$ .

$$W_{i,y} = \int_{u_i} |x - x_{cg,u_i}| du_i \quad \text{Equação 3.32}$$

$$W_{i,x} = \int_{u_i} |y - y_{cg,u_i}| du_i \quad \text{Equação 3.33}$$

Onde:

$$x_{cg,u_i} = \frac{\int x du_i}{u_i} \quad \text{Equação 3.34}$$

$$y_{cg,u_i} = \frac{\int y du_i}{u_i} \quad \text{Equação 3.35}$$

Por questão de comodidade de escrita, neste texto a tensão  $\tau_{Sd}$  será representada por  $\tau_{Sd} = \beta_{Sd,i} (F_{Sd}/u_i \cdot d)$ , de onde surge o adimensional  $\beta_{Sd,i}$  para ligações laje-pilar de canto, dado por:

$$\beta_{Sd,i} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{u_i}{u_i^*} - \frac{k_{y,ext} u_i}{W_{i,y}} \frac{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{F_{Sd}} + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} \frac{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{F_{Sd}} \right| \\ \left| \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_{y,ext} u_i}{W_{i,y}} \frac{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{F_{Sd}} + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} \frac{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{F_{Sd}} \right| \\ \left| \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_{y,ext} u_i}{W_{i,y}} \frac{(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{F_{Sd}} - \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} \frac{(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{F_{Sd}} \right| \end{array} \right. \quad \text{Equação 3.36}$$

Em situações experimentais,  $\beta_{Sk,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.36, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,y}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar, dadas

pelas Equações 3.15 e 3.16, além das relações  $M_{Sk,y,i}^*/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x,i}^*/F_{Sk}$ , que equivalem, respectivamente, a  $x_{cg,u_i^*}$  e  $-y_{cg,u_i^*}$ .

### 3.1.7. PROTENSÃO

Quando há armaduras protendidas na laje, o seu efeito é considerado pela NBR 6118:2014 de duas formas:

1) A compressão no plano da laje age em favor da resistência à tração diagonal. Assim, são adicionadas às tensões resistentes à tração o termo  $0,1\sigma_{cpk,i} \cdot \gamma_p$ , sendo:

$$\sigma_{cpk,i} = \frac{N_{Pk,i}}{u_i \cdot d} \quad \text{Equação 3.37}$$

E  $\gamma_p$  igual a 0,9 segundo item 11.7.1 da NBR 6118:2014. Em situação experimental utiliza-se  $\gamma_p$  igual a 1 em vez de 0,9.  $N_{Pk,i}$  é a soma da força normal devido às  $j$  cordoalhas:

$$N_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \quad \text{Equação 3.38}$$

Sendo  $F_{Pk,j}$  a força na cordoalha de protensão  $j$  a cada interseção da cordoalha com o perímetro  $u_i$ , em “Newton”, e já descontadas as perdas imediatas e diferidas. No caso de ligações laje-pilar internas, podem ser consideradas todas as cordoalhas contidas no vão, e não apenas as que interceptam os perímetros críticos.

2) Ao se aproximar dos pilares, as cordoalhas de protensão geralmente se inclinam para cima, o que gera na ligação laje-pilar uma força cortante  $V_{Pk,i}$  dirigida de baixo para cima igual a:

$$V_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \cdot \text{sen}\alpha_j \quad \text{Equação 3.39}$$

Onde  $\alpha_j$  é a inclinação da cordoalha de protensão em relação ao plano da laje, tomada na interseção com o perímetro crítico  $u_i$ . Para o cômputo de  $V_{Pk,0}$ , referente ao perímetro  $u_0$ , podem ser consideradas as cordoalhas que distam até  $d/2$  do pilar.

Esta força distribuída no perímetro crítico  $u_i$  gera tensão  $\tau_{cp,i}$ :

$$\tau_{cp,i} = \frac{V_{Pk,i}}{u_i \cdot d} \quad \text{Equação 3.40}$$

Que alivia a tensão solicitante  $\tau_{Sd}$  na ligação laje-pilar. A segurança estrutural será garantida se:

$$\tau_{Sd} - \tau_{cp,i} \leq \tau_{Rd} + 0,1\sigma_{cp,i} \cdot \gamma_p \quad \text{Equação 3.41}$$

Entretanto, é mais conveniente somar  $\tau_{cp}$  à tensão resistente do que subtraí-la da tensão solicitante, o que não altera a Equação 3.41; pois assim os parâmetros  $\beta_{Sd,i}$  não se alteram.

Note que tanto em situação de projeto como experimental, são considerados valores característicos no cálculo da tensão de cisalhamento devida a protensão,  $\tau_{cp,i}$ , de acordo com o item 19.5.5 da norma.

### 3.1.8. VERIFICAÇÕES

Em uma análise de projeto a segurança estrutural será garantida se:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd} \Rightarrow \beta_{Sd,i} \frac{F_{Sd}}{u_i \cdot d} \leq \tau_{Rd} \Rightarrow F_{Sd} \leq \frac{\tau_{Rd} \cdot u_i \cdot d}{\beta_{Sd,i}} = V_{Rd} \quad \text{Equação 3.42}$$

Portanto:

- Em ligações laje-pilar sem armaduras de punção:

$$V_{Rd,max} = \frac{\left[ \frac{0,27}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{ck} + \tau_{cp,0} \right] u_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} \quad \text{Equação 3.43}$$

$$V_{Rd,c} = \frac{\left[ \frac{0,182}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,1} \cdot \gamma_p + \tau_{cp,1} \right] u_1 \cdot d}{\beta_{Sd,1}} \quad \text{Equação 3.44}$$

- Em ligações laje-pilar com ábaco ou capitel:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,27}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{ck} + \tau_{cp,0} \right] \cdot u_0 \cdot d_c}{\beta_{Sd,0}} \quad \text{Equação 3.45}$$

$$V_{Rd,c} = \frac{\left[ \frac{0,182}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d_a}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,c} \cdot \gamma_p + \tau_{cp,c} \right] u_c \cdot d_a}{\beta_{Sd,c}} \quad \text{Equação 3.46}$$

$$V_{Rd,c,out} = \frac{\left[ \frac{0,182}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,c,out} \cdot \gamma_p + \tau_{cp,c,out} \right] u_{c,out} \cdot d}{\beta_{Sd,c,out}} \quad \text{Equação 3.47}$$

- Em ligações laje-pilar com armaduras de punção:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,27}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{ck} + \tau_{cp,0} \right] u_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} \quad \text{Equação 3.48}$$

$$V_{Rd,cs} = \frac{\left[ \frac{0,14}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{yw} \cdot \text{sen}\alpha}{\gamma_s \cdot u_1 \cdot d} + 0,1\sigma_{cpk,1} \cdot \gamma_p + \tau_{cp,1} \right] \cdot u_1 \cdot d}{\beta_{Sd,1}} \quad \text{Equação 3.49}$$

$$V_{Rd,out} = \frac{\left[ \frac{0,182}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,out} \cdot \gamma_p + \tau_{cp,out} \right] u_{out} \cdot d}{\beta_{Sd,out}} \quad \text{Equação 3.50}$$

As cargas resistentes características  $V_{Rk}$  podem ser obtidas com as mesmas Equações 3.42 à 3.50, bastando substituir  $\gamma_c$ ,  $\gamma_p$  e  $\gamma_s$  por 1 e os subíndices  $d$  por  $k$ .

### 3.1.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS

A norma, no item 19.5.2.6, faz uma consideração especial com respeito ao traçado do perímetro crítico  $u_1$  na ocasião em que há aberturas na laje distando menos de  $8d$  da face do pilar, prescrevendo que o trecho compreendido entre os dois segmentos de reta que tangenciam a abertura da laje e se interceptam no centro geométrico do pilar deve ser desconsiderado do perímetro crítico. *O autor entende que esta mesma regra deve ser aplicada para todos os perímetros críticos,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_{out}$ , a exemplo da Figura 3.23 e, quando adotados ábacos ou capiteis, para  $u_c$  e  $u_{c,out}$ .*

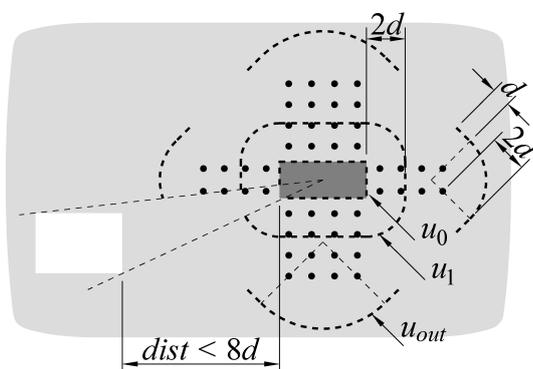


Figura 3.23 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de  $8d$  do pilar

Com relação ao cálculo de  $W_{i,y}$  e  $W_{i,x}$ , a Figura 3.24 auxilia nas deduções de expressões para um trecho reto do perímetro crítico e também para um trecho em arco de circunferência.

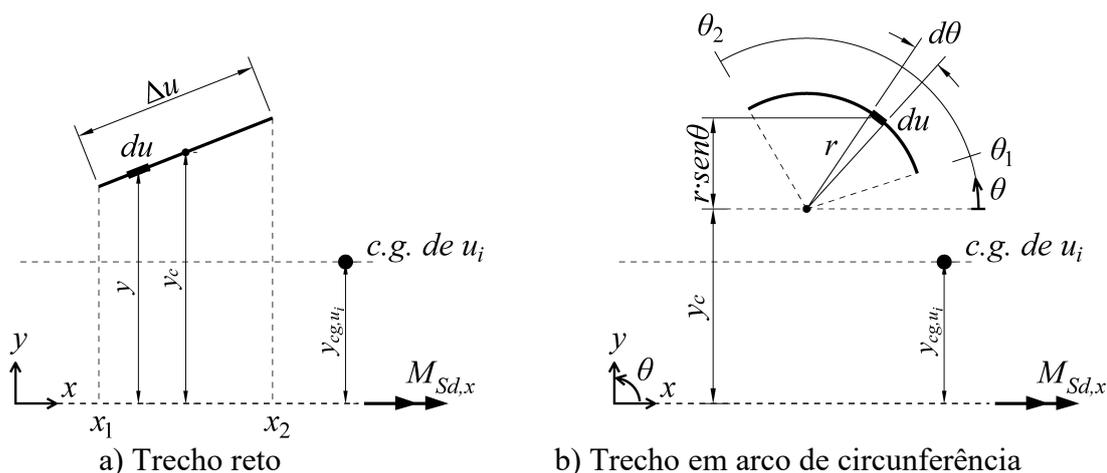


Figura 3.24 – Parâmetros para o cálculo de  $W_{i,x}$  por trecho

- Para um trecho reto:

Seja o segmento de reta de comprimento  $\Delta u$  dado pela função  $y = ax + b$ , com  $x_1 \leq x \leq x_2$ , conforme ilustrado na Figura 3.24(a), tem-se que  $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Então:

$$\begin{aligned} W_{\Delta u, x} &= \int_{u_i} \left| y - y_{cg, u_i} \right| du = \int_{x_1}^{x_2} \left| y - y_{cg, u_i} \right| \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \pm (ax + b - y_{cg, u_i}) \sqrt{1 + a^2} dx = \\ &= \sqrt{1 + a^2} \left| \frac{a}{2} (x_2^2 - x_1^2) + (b - y_{cg, u_i})(x_2 - x_1) \right|. \end{aligned}$$

Sejam  $(x_c, y_c)$  as coordenadas do centro do trecho reto  $\Delta u$ , a mesma expressão pode ser obtida por  $W_{\Delta u, x} = \left| y_c - y_{cg, u_i} \right| \cdot \Delta u$ , como demonstrado na sequência:

$$\begin{aligned} \left| y_c - y_{cg, u_i} \right| &= \left| a \frac{(x_2 + x_1)}{2} + b - y_{cg, u_i} \right|. \\ \Delta u &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2 (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{1 + a^2} (x_2 - x_1). \\ W_{\Delta u, x} &= \left| y_c - y_{cg, u_i} \right| \cdot \Delta u = \left| \frac{a}{2} (x_2 + x_1) + b - y_{cg, u_i} \right| \sqrt{1 + a^2} (x_2 - x_1) = \\ &= \sqrt{1 + a^2} \left| \frac{a}{2} (x_2^2 - x_1^2) + (b - y_{cg, u_i})(x_2 - x_1) \right|. \end{aligned}$$

Portanto, para um trecho reto do perímetro, é mais prático calcular através do produto:

$$W_{\Delta u, x} = \left| y_c - y_{cg, u_i} \right| \cdot \Delta u \quad \text{Equação 3.51}$$

Para  $W_{\Delta u, y}$ , basta trocar  $x$  por  $y$  que as mesmas deduções serão válidas, resultando em:

$$W_{\Delta u, y} = \left| x_c - x_{cg, u_i} \right| \cdot \Delta u \quad \text{Equação 3.52}$$

Deve-se observar que a Equação 3.51 só é válida para segmentos retos  $\Delta u$  totalmente contidos no semiplano  $y > y_{cg, u_i}$  ou  $y < y_{cg, u_i}$ . Analogamente, para a validade da Equação 3.52, o segmento reto  $\Delta u$  deve estar totalmente contido no semiplano  $x > x_{cg, u_i}$  ou  $x < x_{cg, u_i}$ .

- Para um trecho em arco de circunferência:

Seja o arco de circunferência com raio  $r$  e centro na coordenada  $(x_c, y_c)$ , com ângulos  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , conforme ilustrado na Figura 3.24(b), tem-se  $y = y_c + r \cdot \text{sen}\theta$  e  $du = r \cdot d\theta$ .

Portanto, para o trecho circunferencial  $\Delta u$ , calcula-se:

$$W_{\Delta u, x} = \int_{u_i} \left| y - y_{cg, u_i} \right| du = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| y_c + r \cdot \text{sen}\theta - y_{cg, u_i} \right| r d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \pm \left[ (y_c - y_{cg, u_i}) r + r^2 \text{sen}\theta \right] d\theta =$$

$$W_{\Delta u, x} = \left| (y_c - y_{cg, u_i}) (\theta_2 - \theta_1) \cdot r - r^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \right| \quad \text{Equação 3.53}$$

De forma análoga, deduz-se:

$$W_{\Delta u, y} = \left| (x_c - x_{cg, u_i}) (\theta_2 - \theta_1) \cdot r + r^2 (\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) \right| \quad \text{Equação 3.54}$$

Deve-se observar que a Equação 3.53 é válida para segmentos circunferenciais  $\Delta u$  totalmente contidos no semiplano  $y > y_{cg, u_i}$  ou  $y < y_{cg, u_i}$ . Analogamente, a Equação 3.54 é válida se segmento circunferencial  $\Delta u$  estiver totalmente contido no semiplano  $x > x_{cg, u_i}$  ou  $x < x_{cg, u_i}$ .

A posição do centro geométrico do segmento circunferencial  $\Delta u$  é calculada por:

$$x_{cg, \Delta u} = \frac{x_c \cdot r (\theta_2 - \theta_1) + r^2 (\text{sen} \theta_2 - \text{sen} \theta_1)}{\Delta u} \quad \text{Equação 3.55}$$

$$y_{cg, \Delta u} = \frac{y_c \cdot r (\theta_2 - \theta_1) - r^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta u} \quad \text{Equação 3.56}$$

Com  $\Delta u$  em trechos circunferenciais dado por:

$$\Delta u = r (\theta_2 - \theta_1) \quad \text{Equação 3.57}$$

- Somatório dos segmentos

Tendo em vista as deduções anteriores e que os perímetros críticos são todos compostos por trechos retos ou por trechos circunferenciais, calculam-se:

$$W_{i, x} = \sum_{u_i} W_{\Delta u, x} \quad \text{Equação 3.58}$$

$$W_{i, y} = \sum_{u_i} W_{\Delta u, y} \quad \text{Equação 3.59}$$

$$x_{cg,u_i} = \frac{\sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_i}$$

Equação  
3.60

$$y_{cg,u_i} = \frac{\sum y_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_i}$$

Equação  
3.61

## 3.2. EUROCODE 2:2004 – DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES – GENERAL RULES AND RULES FOR BUILDINGS

A seção 6.4 do EUROCODE 2:2004 é dedicada ao cálculo de lajes à punção. Para a segurança de projeto, a norma adota os coeficientes de minoração das resistências do concreto,  $\gamma_c$ , e do aço,  $\gamma_s$ , iguais a 1,5 e 1,15, respectivamente, segundo item 2.4.2.4 do EUROCODE 2:2004.

### 3.2.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL

Do Item 6.4.5 (3) e da expressão 6.6 da norma, a tensão resistente vale:

$$v_{Rd,m\acute{a}x} = \frac{0,24}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{ck} \quad \text{Equação 3.62}$$

Onde o  $f_{ck}$  é limitado ao máximo de 90 MPa para validade da expressão.

O item 6.4.3 (2) da norma explicita que esta tensão deve ser checada na face do pilar, ou seja, no perímetro  $u_0$  tal como definido para a NBR 6118:2014 na Figura 3.4.

Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 na Equação 3.62 em vez de 1,5; obtém-se a tensão característica

$v_{Rk,m\acute{a}x}$ .

### 3.2.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL

Esta resistência deve ser checada no perímetro crítico  $u_1$ , afastado  $2d$  da face do pilar, definido da mesma maneira que para a NBR 6118:2014, aqui apresentada na Figura 3.5.

Do item 6.4.4 (1) da norma, a resistência na ausência de armaduras de punção é dada por:

$$v_{Rd,c} = \text{m\acute{a}x} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{0,18}{\gamma_c} \right) \xi (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} \\ \left( \frac{0,0525}{\gamma_c} \right) \sqrt{\xi^3 \cdot f_{ck}} \end{array} \right. \quad \text{Equação 3.63}$$

Onde  $\xi$  caracteriza o *size effect*, calculado com a altura útil  $d$  em milímetros, por:

$$\xi = \min \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \\ 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.64 \end{array}$$

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão, limitada a  $\rho \leq 0,02$  para fins de cálculo;

Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 na Equação 3.63 em vez de 1,5; obtém-se a tensão característica  $\nu_{Rk,c}$ .

Caso a resistência do concreto se mostre insuficiente, podem ser previstos capitéis ou ábacos. Neste caso, dos itens 6.4.2 (8) a (11), dois perímetros críticos devem ser considerados, que neste texto serão denominados  $u_c$  e  $u_{c,out}$ , conforme mostrado na Figura 3.25, onde:

$d_H$  é a altura útil da laje a ser tomada no interior do ábaco ou capitel;

$d$  é a altura útil da laje no exterior do ábaco ou capitel;

$\ell_H$  é a distância entre a borda do ábaco ou capitel e a face do pilar; no caso de ábaco ou capitel retangular considera-se  $\ell_H = \min \{ \ell_{H,x}; \ell_{H,y} \}$ .

$u_c$  é o perímetro crítico afastado  $2d_H$  da face do pilar;

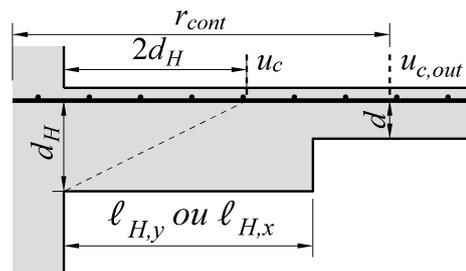
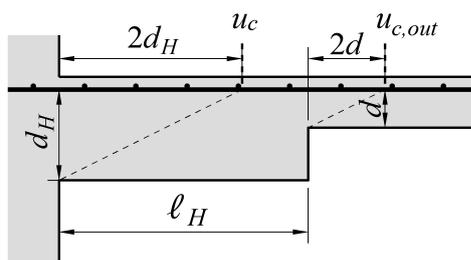
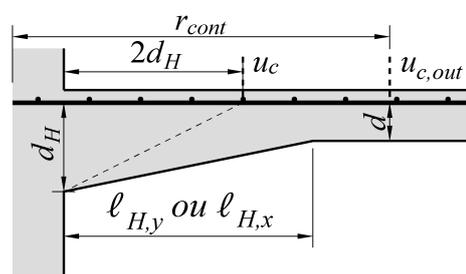
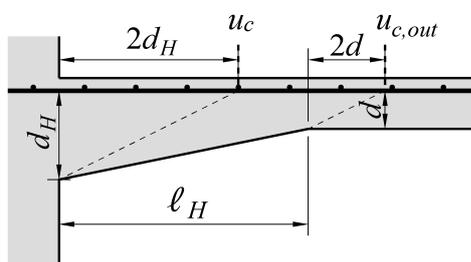
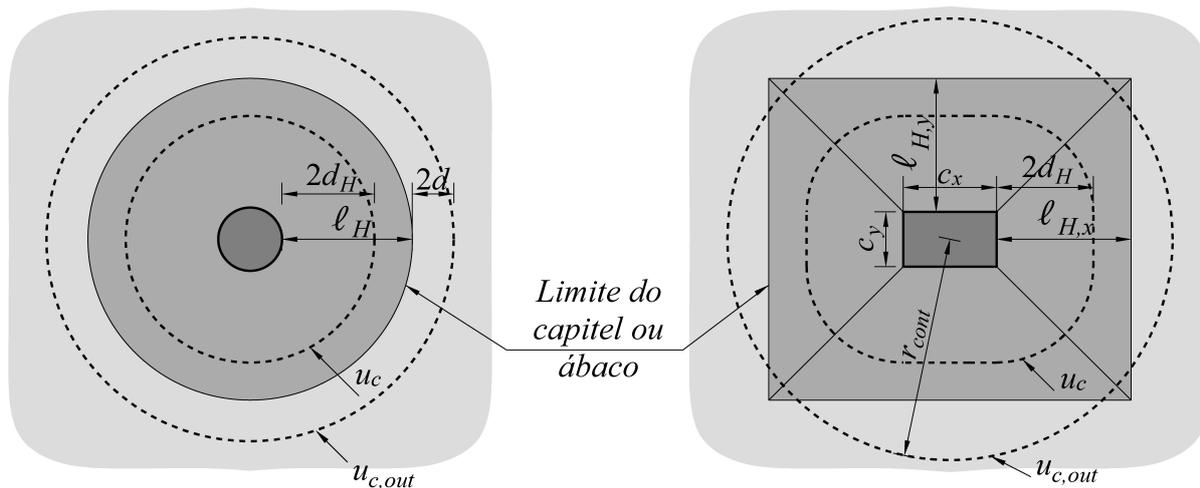
$u_{c,out}$  é o perímetro crítico afastado  $2d$  do final do ábaco ou capitel circular. No caso de ábaco ou capitel retangular,  $u_{c,out}$  deve ser tomado à distância  $r_{cont}$  do centroide do pilar, e então, se  $\ell_H \leq 2(d_H - d)$ , toma-se  $r_{cont}$  igual a:

$$r_{cont} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2d + 0,56 \sqrt{(c_x + 2\ell_{H,x})(c_y + 2\ell_{H,y})} \\ 2d + 0,69 \cdot \ell_{\min} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.65 \end{array}$$

Sendo  $\ell_{\min} = \min \{ (c_x + 2\ell_{H,x}); (c_y + 2\ell_{H,y}) \}$ .

Para  $\ell_H > 2(d_H - d)$  a norma não faz nenhuma especificação para o traçado de  $u_{c,out}$ , portanto o autor recomenda que se adote ideia análoga ao caso em que o ábaco ou capitel é circular, resultando em  $r_{cont}$  igual a:

$$r_{cont} = \frac{\ell_{\min}}{2} + 2d \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.66 \end{array}$$



a) Capitel ou ábaco circular

b) Capitel ou ábaco retangular

Figura 3.25 – Definição da altura útil e dos perímetros de críticos no caso de ábaco ou capitel [modificado – EUROCODE 2:2004]

Então:

- Se  $l_H \leq 2(d_H - d)$ , então basta verificar o contorno  $u_{c,out}$  ;
- Se  $l_H > 2(d_H - d)$ , então é necessário verificar os perímetros  $u_c$  e  $u_{c,out}$  .

Quando se verifica o perímetro  $u_c$ , deve-se calcular o parâmetro *size effect* considerando a altura útil  $d_H$  na Equação 3.63. Então, neste texto será atribuído o subíndice  $H$  ao parâmetro:

$\xi_H$ .

Se a resistência do concreto se mostrar insuficiente e a adoção de ábacos ou capitéis for ineficaz ou indesejada, devem ser adotadas armaduras de punção, conforme item 6.4.3(2)(c) da norma.

Do item 9.4.3 da norma, as armaduras de punção devem ser dispostas levando em conta as distâncias  $s_0$ , da primeira camada de armadura ao pilar, respeitando  $0,3d \leq s_0 \leq 0,5d$ ; e a distância  $s_r$  entre camadas, não maior que  $0,75d$ ; conforme exemplifica a Figura 3.26.

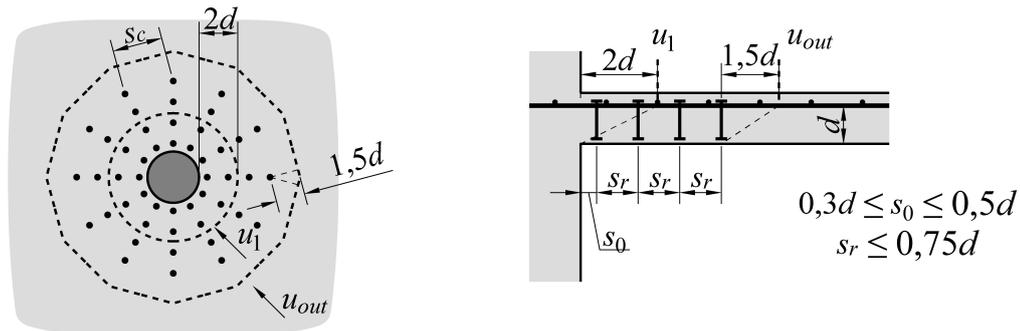


Figura 3.26 – Disposição das armaduras de punção

Do item 6.4.5(1) da norma, a tensão resistente na presença de armaduras de punção vale:

$$v_{Rd,cs} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,75 \cdot v_{Rd,c} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk} \cdot \text{sen} \alpha}{\gamma_s \cdot u_1 \cdot d} \\ 1,5 \cdot v_{Rd,c} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.67 \end{array}$$

Onde  $A_{sw}$  é área de aço das armaduras de punção por camada;

$\alpha$  é a inclinação das armaduras de punção em relação ao plano da laje;

$f_{ywk}$  é a tensão de escoamento das armaduras de punção, devendo verificar as seguintes limitações de cálculo.

$$f_{ywk} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1,15 \cdot (250 + 0,25d) \\ f_{yk} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.68 \end{array}$$

*Tais limitações se devem à deficiência na ancoragem dessas armaduras em lajes delgadas. Quando as armaduras passam a contribuir efetivamente a laje já se encontra bastante fissurada, o que também compromete a ancoragem. Isto dificulta que maiores níveis de*

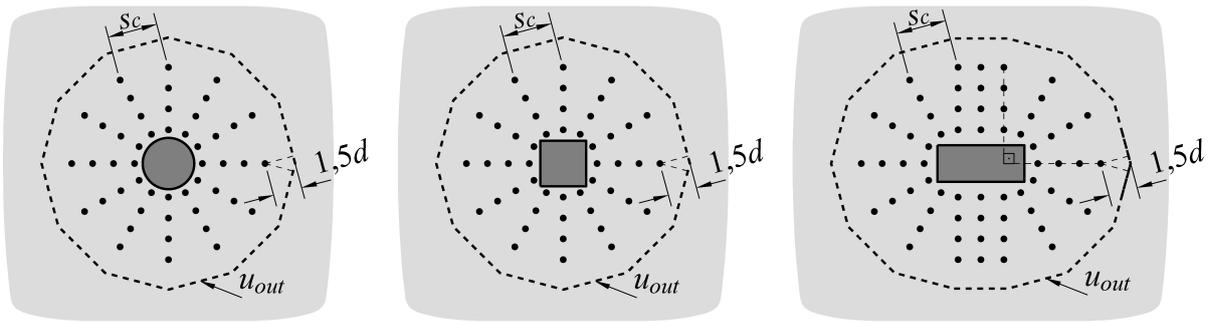
*tensão sejam atingidos, de modo que as armaduras muitas vezes não chegam a escoar quando fabricadas, por exemplo, com aço CA-50.*

Tomando  $\gamma_s$  igual a 1 em vez de 1,15; e tomando  $v_{Rk,c}$  em vez de  $v_{Rd,c}$  na Equação 3.67, obtém-se a tensão característica  $v_{Rk,cs}$ .

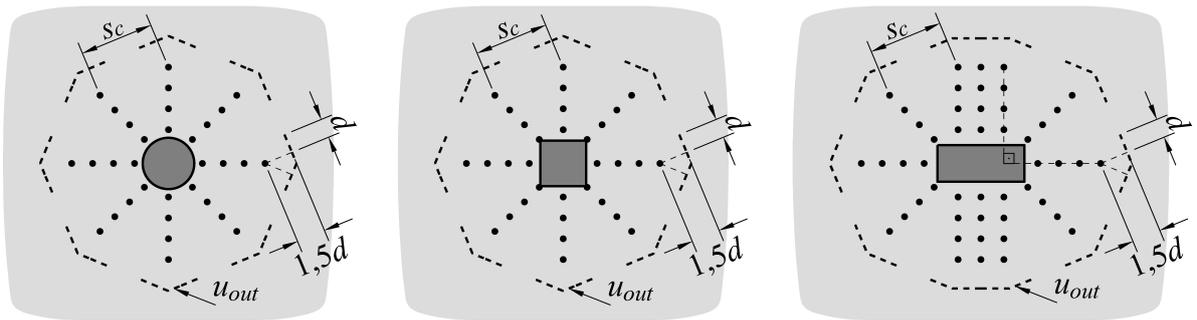
### **3.2.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO**

Segundo o item 6.4.3(1), as armaduras de punção devem ser dispostas de maneira que, no perímetro crítico externo  $u_{out}$ , apenas o concreto seja suficiente para resistir ao cisalhamento. A Figura 3.27 exemplifica o perímetro externo. Quando o espaçamento circunferencial  $s_c$  na camada mais externa de armaduras for maior que  $2d$ , o perímetro crítico  $u_{out}$  deve ser descontínuo, conforme mostrado na Figura 3.27(b) e (d).

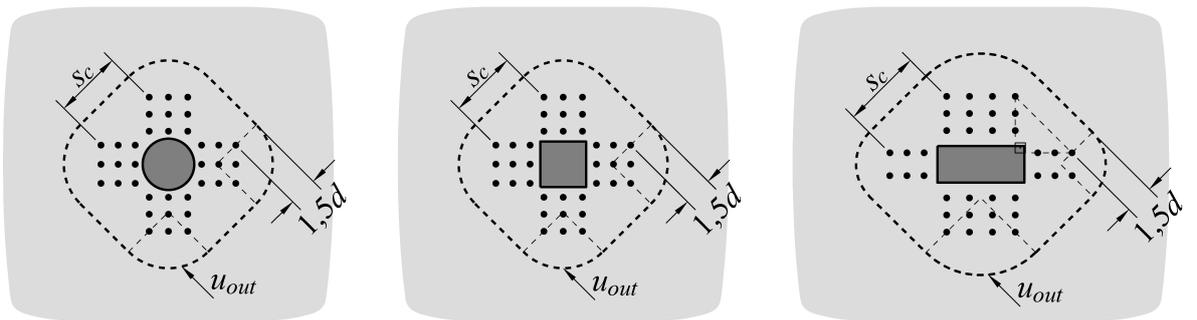
Emprega-se a mesma resistência à tração diagonal dada pela Equação 3.63.



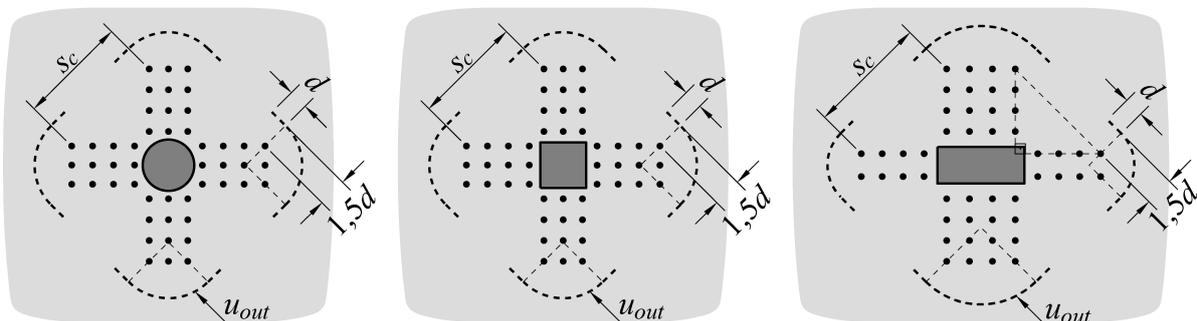
a)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$



c)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$



d)  $u_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

Figura 3.27 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar internas  
[modificado – EUROCODE 2:2004]

### 3.2.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS

Nas seções anteriores são tratadas apenas as tensões resistentes. Desta seção em diante são tratadas as tensões solicitantes, as quais diferem caso a verificação se dê em ligações laje-pilar internas, de borda ou de canto.

A tensão solicitante depende da carga transferida da laje ao pilar, podendo ser uma carga centrada ou com excentricidade. Do item 6.4.3(3) da norma, a tensão solicitante é dada por:

$$v_{Sd} = \beta_{Sd,i} \frac{F_{Sd}}{u_i \cdot d} \quad \text{Equação 3.69}$$

Onde  $u_i$  designa o perímetro crítico no qual a tensão solicitante está sendo analisada, podendo ser  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_{out}$ ,  $u_c$  ou  $u_{c,out}$ ;

O fator  $\beta_{Sd,i}$  máximo ao longo do perímetro crítico é dado por:

$$\beta_{Sd,i} = 1 + \frac{k_y \cdot u_i}{W_{i,y}} \frac{|M_{Sd,y}|}{F_{Sd}} + \frac{k_x \cdot u_i}{W_{i,x}} \frac{|M_{Sd,x}|}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.70}$$

Note que a Equação 3.70 é igual à Equação 3.14 apresentada para NBR 6118:2014. A definição dos parâmetros e as deduções feitas para a norma brasileira na Seção 3.1.4 desta pesquisa são também válidas para o EUROCODE 2:2004, inclusive, em situações experimentais, o cálculo de  $\beta_{Sk,i}$ .

Alternativamente, o EUROCODE 2:2004 permite que seja adotado o seguinte fator  $\beta_{Sd,i}$  para simplificação dos cálculos, contornando as trabalhosas contas para obtenção dos parâmetros  $W_{i,y}$  e  $W_{i,x}$ :

$$\beta_{Sd,i} = 1 + 1,8 \sqrt{\left(\frac{e_x}{b_{y,i}}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{b_{x,i}}\right)^2} \quad \text{Equação 3.71}$$

Onde  $e_x$  e  $e_y$  são as excentricidades do carregamento em cada direção ortogonal calculadas pelas Equações 3.15 e 3.16. Os termos  $b_{x,i}$  e  $b_{y,i}$  são as dimensões projetadas do perímetro crítico que estiver sendo analisado, como exemplificado na Figura 3.28 para o perímetro crítico  $u_1$ .

No escopo desta pesquisa será adotado o cálculo do parâmetro  $\beta_{Sd,i}$  dado pela Equação 3.70.

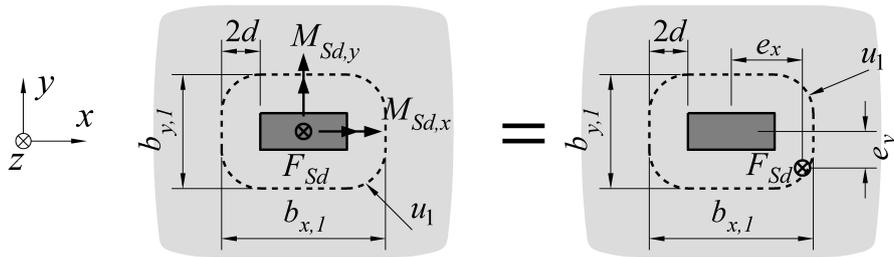


Figura 3.28 – Momentos fletores nas duas direções ortogonais [modificado – EUROCODE 2:2004]

### 3.2.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA

Para ligações laje-pilar de borda, são considerados dois perímetros críticos,  $u_1$  e o perímetro reduzido  $u_1^*$ , tais como definidos para a NBR 6118:2014 na Figura 3.13. *O autor entende que devem ser definidos, de maneira análoga, os perímetros  $u_0$  e  $u_0^*$ , como ilustrado na Figura 3.12 e  $u_{out}$  e  $u_{out}^*$ , como nas Figuras 3.29 e 3.30, além de, nos casos de adoção de ábacos ou capitéis,  $u_c$ ,  $u_c^*$ ,  $u_{c,out}$  e  $u_{c,out}^*$ .*

Do item 6.4.3(4) da norma, a tensão solicitante em ligações laje-pilar de borda é calculada pela Equação 3.69, com o parâmetro  $\beta_{Sd,i}$  máximo ao longo do perímetro crítico dado por:

$$\beta_{Sd,i} = \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} \cdot \frac{|M_{Sd,x}|}{F_{Sd}} \quad \text{Equação 3.72}$$

Note que esta expressão de  $\beta_{Sd,i}$  é parecida com a apresentada pela NBR 6118:2014, dada na Equação 3.23, porém sem a parcela contendo o momento fletor  $M_{Sd,y}$ . *Entende-se, portanto, que o EUROCODE 2:2004 considera que a distribuição de  $F_{Sd}$  no perímetro  $u_1^*$  reproduz, por si só, a excentricidade para o interior da laje. Em outras palavras, considera que  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*) \approx 0$ .* A definição dos parâmetros e as deduções feitas para a norma brasileira nas Seções 3.1.4 e 3.1.5 desta pesquisa são também válidas para o EUROCODE 2:2004.

Em situações experimentais,  $\beta_{Sk,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.72, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as

excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar, dadas pelas Equações 3.15 e 3.16.

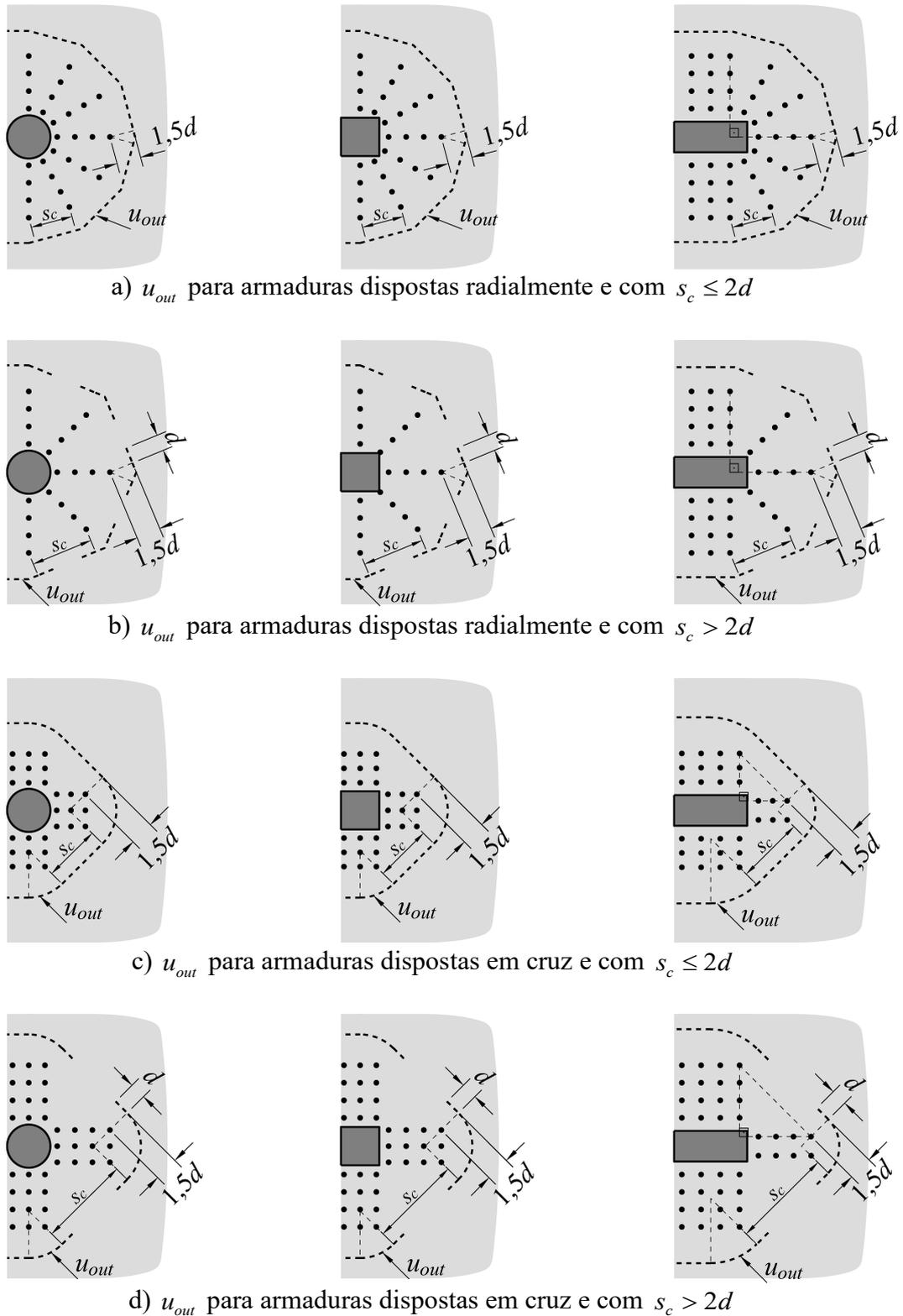
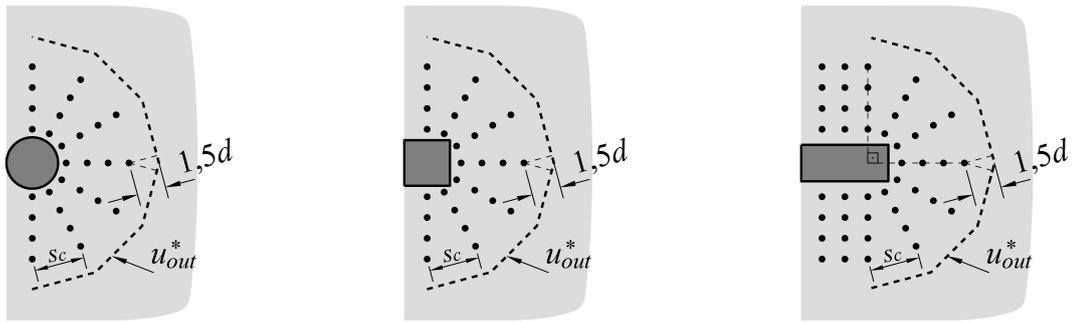
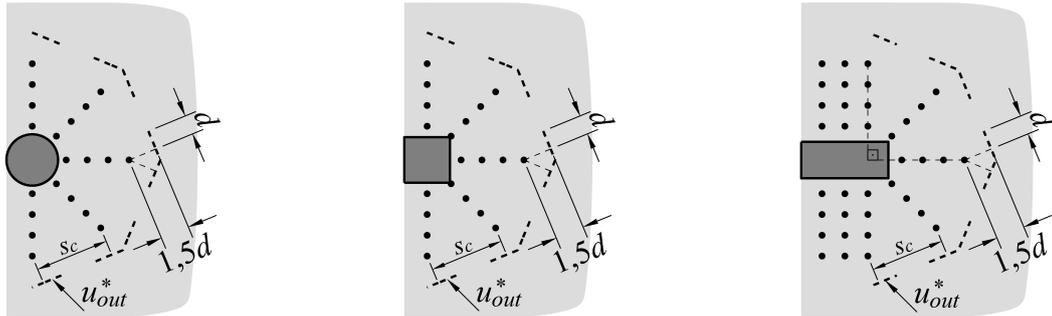


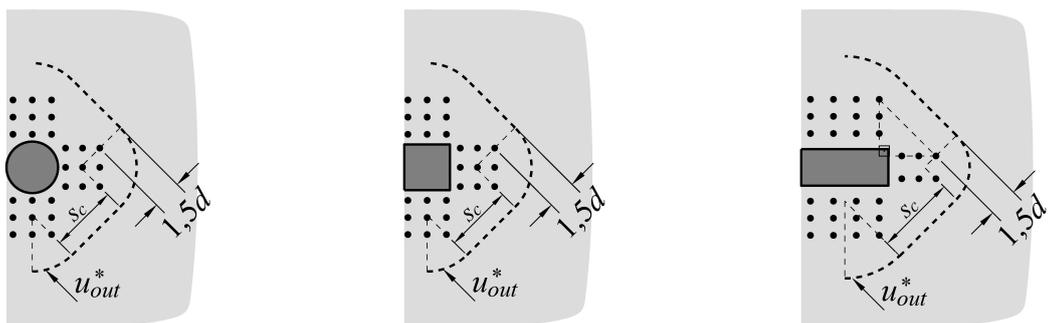
Figura 3.29 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar de borda



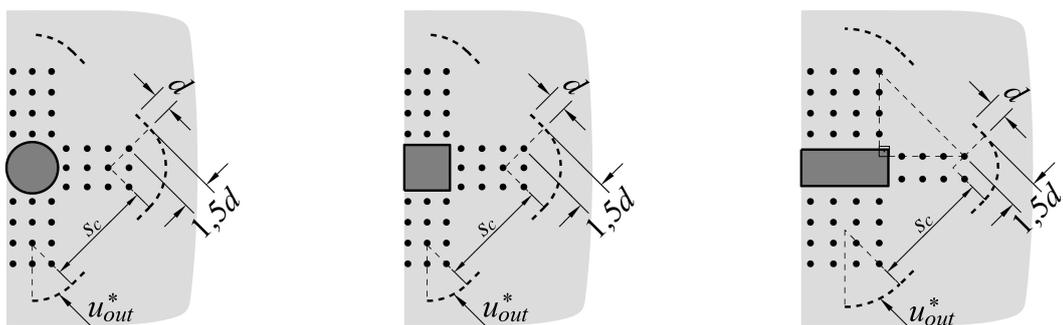
a)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 2d$



b)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 2d$



c)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 2d$



d)  $u_{out}^*$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 2d$

Figura 3.30 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}^*$  em ligações laje-pilar de borda

### 3.2.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO

Para ligações laje-pilar de canto, a norma também considera dois perímetros críticos,  $u_1$  e o perímetro reduzido  $u_1^*$ , tais como definidos para a NBR 6118:2014 na Figura 3.19. O autor entende que devem ser definidos, de maneira análoga, os perímetros  $u_0$  e  $u_0^*$ , como ilustrado na Figura 3.18 e  $u_{out}$  e  $u_{out}^*$ , como nas Figuras 3.31 e 3.32, além de, nos casos de adoção de ábacos ou capitéis,  $u_c$ ,  $u_c^*$ ,  $u_{c,out}$  e  $u_{c,out}^*$ .

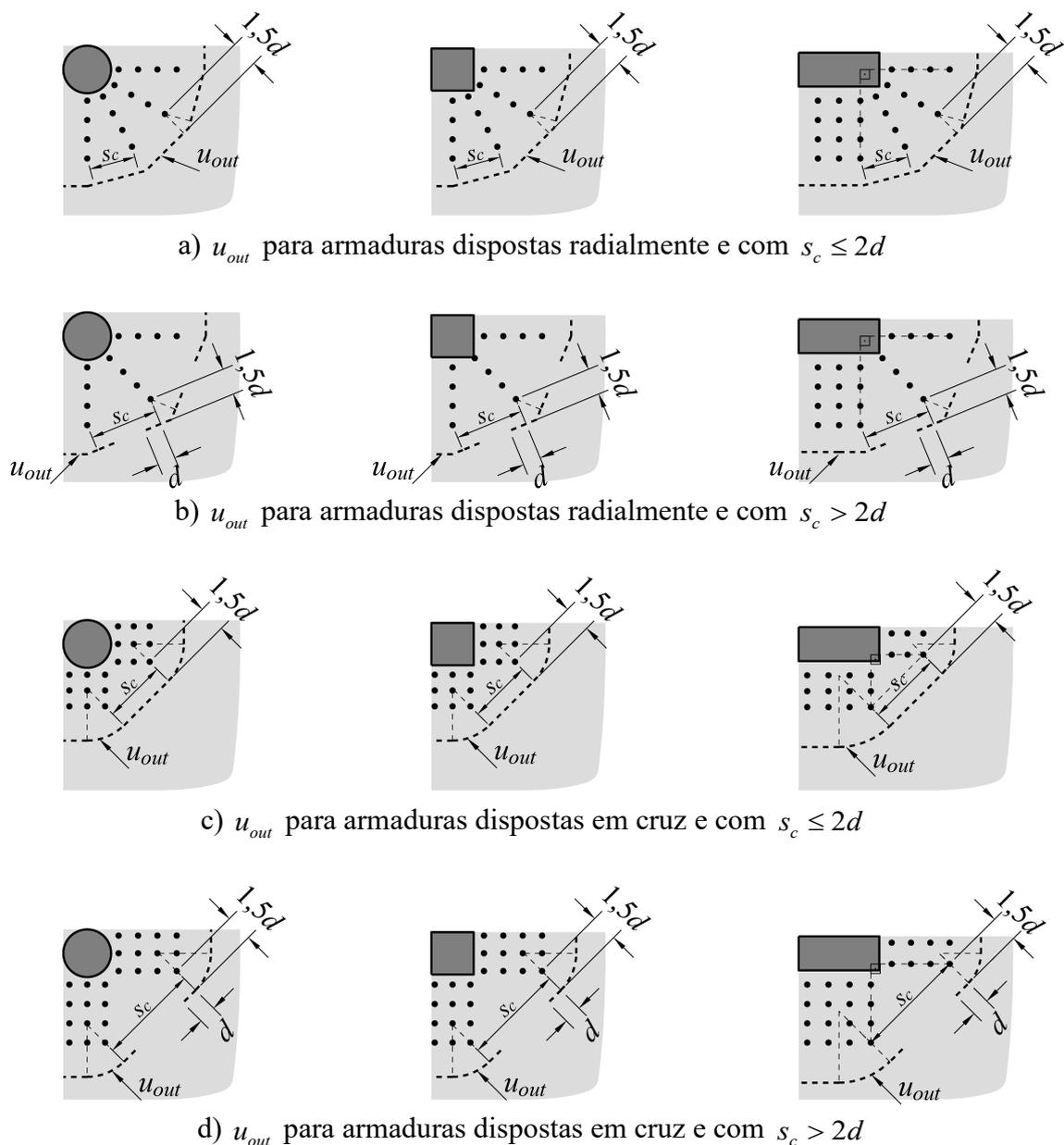


Figura 3.31 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}$  em ligações laje-pilar de canto

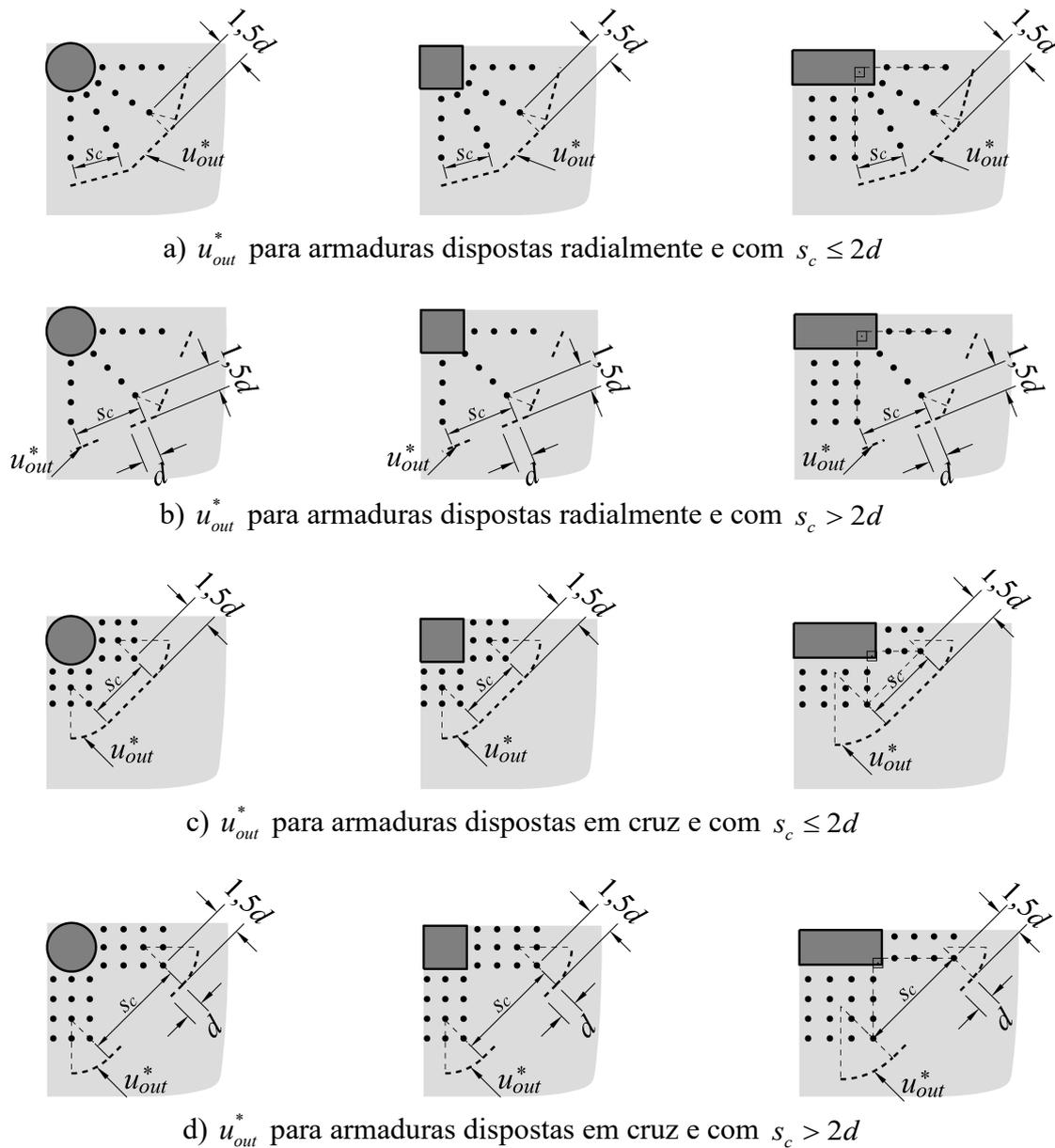


Figura 3.32 – Traçado dos perímetros críticos  $u_{out}^*$  em ligações laje-pilar de canto

Do item 6.4.3(5) da norma, a tensão solicitante em ligações laje-pilar de canto é calculada pela Equação 3.69, com o parâmetro  $\beta_{Sd,i}$  dado pela Equação 3.73.

$$\beta_{Sd,i} = \frac{u_i}{u_i^*} \quad \text{Equação 3.73}$$

Note que esta expressão de  $\beta_{Sd,i}$  é parecida com aquela que a NBR 6118:2014 apresenta, dada na Equação 3.36, porém sem as parcelas contendo os momentos fletores  $M_{Sd,y}$  e  $M_{Sd,x}$ . Entende-se, portanto, que o EUROCODE 2:2004 considera que a distribuição de  $F_{Sd}$  no

perímetro  $u_i^*$  reproduz, por si só, a excentricidade para o interior da laje. Em outras palavras, considera que  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*) \approx (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*) \approx 0$ .

Em situações experimentais,  $\beta_{Sk,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.73.

### 3.2.7. PROTENSÃO

Quando há armaduras protendidas na laje, seu efeito é considerado pelo EUROCODE 2:2004 quase da mesma maneira descrita na Seção 3.1.7 para a NBR 6118:2014, alteram-se apenas:

- A nomenclatura da tensão de cisalhamento, de  $\tau$  para  $\nu$  como adotado pelo EUROCODE 2:2004;
- E o valor do coeficiente  $\gamma_p$ , que o EUROCODE 2:2004 considera igual a 1,0, segundo item 2.4.2.2 da norma.

### 3.2.8. VERIFICAÇÕES

Em uma análise de projeto a segurança estrutural será garantida se:

$$\nu_{Sd} \leq \nu_{Rd} \Rightarrow \beta_{Sd,i} \frac{F_{Sd}}{u_i \cdot d} \leq \nu_{Rd} \Rightarrow F_{Sd} \leq \frac{\nu_{Rd} \cdot u_i \cdot d}{\beta_{Sd,i}} = V_{Rd} \quad \text{Equação 3.74}$$

Portanto:

- Em ligações laje-pilar sem armaduras de punção:

$$V_{Rd,max} = \frac{\left[ \frac{0,24}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{ck} + \nu_{cp,0} \right] u_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} \quad \text{Equação 3.75}$$

$$V_{Rd,c} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{\gamma_c} \right) \xi (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,1} + v_{cp,1} \right] \cdot u_1 \cdot d \right.}{\beta_{Sd,1}} \left. \left[ \left( \frac{0,0525}{\gamma_c} \right) \sqrt{\xi^3 \cdot f_{ck}} + 0,1\sigma_{cpk,1} + v_{cp,1} \right] \cdot u_1 \cdot d \right.$$

Equação 3.76

- Em ligações laje-pilar com ábaco ou capitel:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,24}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{ck} + v_{cp,0} \right] u_0 \cdot d_H}{\beta_{Sd,0}}$$

Equação 3.77

$$V_{Rd,c} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{\gamma_c} \right) \xi_H (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,c} + v_{cp,c} \right] u_c \cdot d_H \right.}{\beta_{Sd,c}} \left. \left[ \left( \frac{0,0525}{\gamma_c} \right) \sqrt{\xi_H^3 \cdot f_{ck}} + 0,1\sigma_{cpk,c} + v_{cp,c} \right] u_c \cdot d_H \right.$$

Equação 3.78

$$V_{Rd,c,out} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{\gamma_c} \right) \xi (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,c,out} + v_{cp,c,out} \right] u_{c,out} \cdot d \right.}{\beta_{Sd,c,out}} \left. \left[ \left( \frac{0,0525}{\gamma_c} \right) \sqrt{\xi^3 \cdot f_{ck}} + 0,1\sigma_{cpk,c,out} + v_{cp,c,out} \right] u_{c,out} \cdot d \right.$$

Equação 3.79

- Em ligações laje-pilar com armaduras de punção:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,24}{\gamma_c} \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{ck} + v_{cp,0} \right] u_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}}$$

Equação 3.80

$$V_{Rd,cs} = \frac{\min \left\{ \left[ 0,75 \cdot v_{Rd,c} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{yw} \cdot \text{sen}\alpha}{\gamma_s \cdot u_1 \cdot d} + 0,1\sigma_{cpk,1} + v_{cp,1} \right] u_1 \cdot d \right.}{\beta_{Sd,1}} \quad \text{Equação 3.81}$$

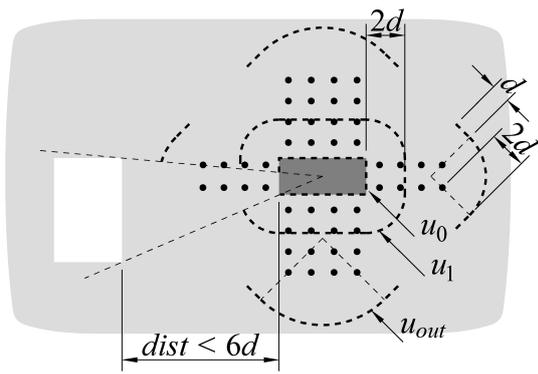
$$V_{Rd,out} = \frac{\max \left\{ \left[ \left[ \left( \frac{0,18}{\gamma_c} \right) \xi (100\rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,1\sigma_{cpk,out} + v_{cp,out} \right] u_{out} \cdot d \right. \right.}{\beta_{Sd,out}} \quad \text{Equação 3.82}$$

As cargas resistentes características  $V_{Rk}$  podem ser obtidas com as mesmas Equações 3.74 à 3.82, bastando substituir  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  por 1 e os subíndices  $d$  por  $k$ .

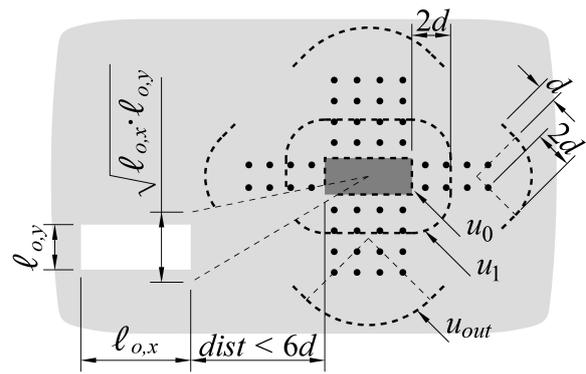
### 3.2.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS

A norma, no item 6.4.2(3), faz uma consideração especial com relação ao traçado do perímetro crítico  $u_1$  na ocasião em que há aberturas na laje distando menos de  $6d$  da face do pilar, prescrevendo que o trecho compreendido entre os dois segmentos de reta que tangenciam a abertura da laje e se interceptam no centro geométrico do pilar deve ser desconsiderado do perímetro crítico. Porém, se a maior dimensão da abertura da laje se estender na direção do pilar, a norma prescreve que os dois segmentos de retas, em vez de tangenciar a abertura da laje, deverão distar  $\sqrt{l_{o,x} \cdot l_{o,y}}$  nas proximidades da abertura, sendo  $l_{o,x}$  e  $l_{o,y}$  as dimensões da abertura. A Figura 3.33 detalha essas regras. *O autor entende que esta mesma regra deveria valer para todos os perímetros críticos,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_{out}$ , a exemplo da Figura 3.33, e quando adotados ábacos ou capiteis, para  $u_c$  e  $u_{c,out}$ .*

Com relação ao cálculo de  $W_{i,y}$  e  $W_{i,x}$ , as mesmas deduções feitas para a NBR 6118:2014 na Seção 3.1.9 deste texto se aplicam.



a) Abertura na laje



b) Abertura cuja maior dimensão está na direção do pilar

Figura 3.33 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de  $6d$  do pilar

### 3.3. ACI 318:2014 – BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE AND COMMENTARY

A seção 22.6 da norma é dedicada ao cálculo das tensões resistentes de lajes à punção, e a seção 8.4.4.2 trata sobre as solicitações. Para a segurança de projeto o ACI 318:2014 adota o coeficiente de minoração  $\phi$  igual a 0,75 para esforços cortantes, conforme consta na seção 21.2 da norma.

#### 3.3.1. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL

Do item 22.6.6.2 da norma, a tensão resistente máxima deve ser checada no perímetro crítico  $b_0$ , tomado à distância  $d/2$  do pilar, conforme Figura 3.34.

$$v_{Rd,max} = \begin{cases} 0,5\phi\sqrt{f'_c} & \text{se armada com estribos} \\ 0,66\phi\sqrt{f'_c} & \text{se armada com studs} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.83 \end{array}$$

Onde:

$f'_c$  é a tensão característica de resistência à compressão do concreto, limitada ao máximo de 70 MPa para validade das expressões, conforme recomendação do item 22.6.3.1.

Tomando  $\phi = 1$  na Equação 3.83 em vez de 0,75; obtém-se a tensão característica,  $v_{Rk,max}$ .

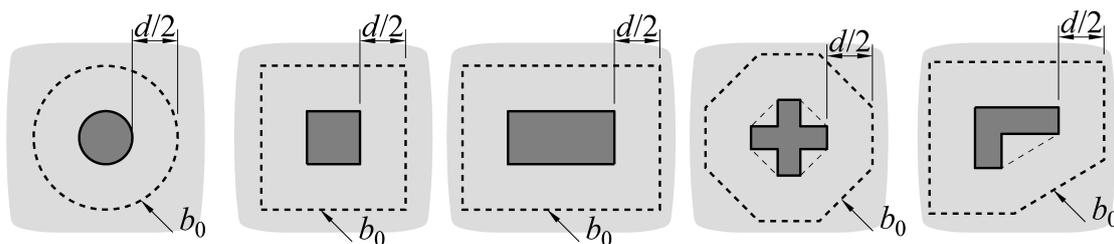


Figura 3.34 – Perímetro crítico  $b_0$  à distância  $d/2$  do pilar  
[modificado – ACI 318:2014]

### 3.3.2. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL

Do item 22.6.5.2 da norma, quando não há armaduras de punção, a tensão resistente do concreto é verificada no perímetro  $b_0$  pelo menor valor dentre 3 expressões:

$$v_{Rd,c} = \min \begin{cases} \phi \cdot 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \\ \phi \cdot 0,17 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \\ \phi \cdot 0,083 \left( 2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.84 \end{array}$$

Onde:

$\lambda$  vale 1,0 para concretos de densidade normal (21,55 kN/m<sup>3</sup> a 25,60 kN/m<sup>3</sup>).

$\alpha_s$  vale 40, 30 ou 20, respectivamente para ligações laje-pilar internas, de borda e de canto.

$\beta$  é a razão entre a maior dimensão do pilar e a maior largura perpendicular a esta; depreende-se do item R22.6.5.2 que no caso de pilar cuja seção transversal é um polígono côncavo, a exemplo dos pilares em cruz e em “L” na Figura 3.34, o perímetro crítico é tomado afastado  $d/2$  do polígono convexo que envolve a seção do pilar. Nestas ocasiões, o parâmetro  $\beta$  é dado pela razão da maior dimensão do polígono convexo pela maior largura perpendicular, como exemplificado na Figura 3.35.

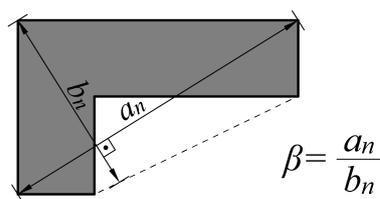


Figura 3.35 – Parâmetro  $\beta$  em pilares de seção transversal côncava  
[modificado – ACI 318:2014]

Tomando  $\phi = 1$  na Equação 3.84 em vez de 0,75; obtém-se a tensão característica,  $v_{Rk,c}$ .

Caso a resistência do concreto se mostre insuficiente, podem ser previstos capitéis ou ábacos.

O ACI 318:2014 não apresenta um modelo de cálculo específico para ligações laje-pilar com

capiteis ou ábacos, apenas especifica, no item 22.6.4.1, que dois perímetros críticos devem ser considerados. Neste texto, os dois perímetros críticos serão denominados  $b_c$ , afastado  $d_c / 2$  da face do pilar, e  $b_{c,out}$ , afastado  $d/2$  do limite do capitel ou ábaco, conforme mostrado na Figura 3.36.

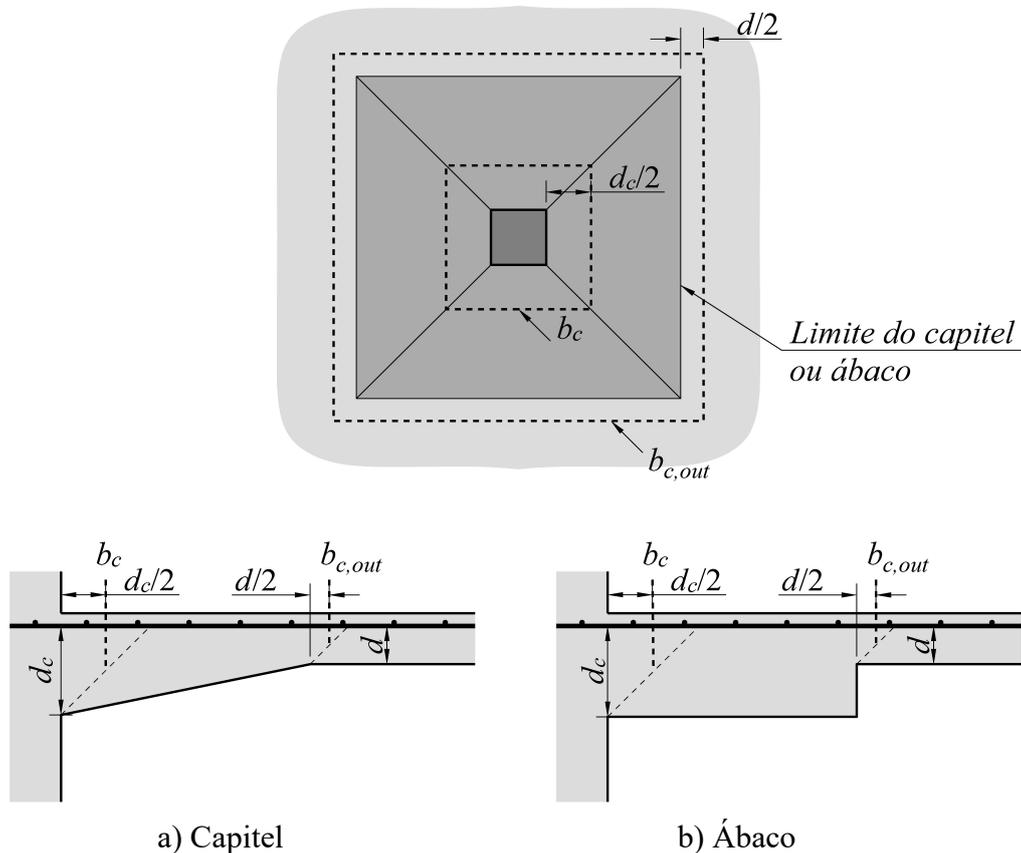


Figura 3.36 – Definição da altura útil e dos perímetros críticos nos casos adoção de ábaco ou capitel

Deste modo o autor entende que a verificação do perímetro  $b_c$  deve ser feita utilizando a altura útil tomada na face do pilar, neste texto, denominada  $d_c$ . No perímetro  $b_c$  é checada a resistência dada pela Equação 3.84, e no perímetro  $b_{c,out}$  a tensão resistente é dada por:

$$v_{Rd,c} = \phi \cdot 0,17 \lambda \sqrt{f'_c} \quad \text{Equação 3.85}$$

Tomando  $\phi = 1$  na Equação 3.85 em vez de 0,75; obtém-se a tensão característica,  $v_{Rk,c}$ .

Se a resistência do concreto se mostrar insuficiente e a adoção de ábacos ou capitéis for ineficaz ou indesejada, devem ser adotadas armaduras de punção. Dos itens 22.6.1.3, 22.6.6, 22.6.7.2 e 22.6.8.2 da norma, a tensão resistente é verificada por:

$$v_{Rd,cs} \leq \begin{cases} \phi \left( 0,17\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk}}{b_0 \cdot s_r} \right) & \text{se armada com estribos} \\ \phi \left( 0,25\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk}}{b_0 \cdot s_r} \right) & \text{se armada com studs} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.86 \end{array}$$

Onde  $f_{ywk}$  é a tensão característica de escoamento do aço da armadura de punção, dada por:

$$f_{ywk} = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{yk} \\ 420 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.87 \end{array}$$

A norma atribui o limite de 420 MPa ao controle da abertura de fissuras diagonais, segundo item R22.5.3.3;

$s_r$  é o espaçamento entre camadas de armadura de punção, limitado ao máximo de  $d/2$ .

$A_{sw}$  é a área da seção transversal das armaduras de punção por camada ao redor do pilar. Segundo o item 22.6.8.3, caso sejam utilizados *studs*,  $A_{sw}$  deve satisfazer:

$$A_{sw} \geq 0,17\sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot s_r / f_{ywk} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.88 \end{array}$$

*O autor considera igualmente importante prever armadura mínima quando são utilizados outros tipos de armaduras similares, como estribos.* Tomando  $\phi = 1$  na Equação 3.86 em vez de 0,75; obtém-se a tensão característica,  $v_{Rk,cs}$ .

### 3.3.3. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO

As armaduras de punção devem ser dispostas de maneira que, no perímetro crítico externo  $b_{out}$ , afastado  $d/2$  da última camada de armaduras de punção, apenas o concreto seja suficiente para resistir ao cisalhamento. O perímetro externo é mostrado na Figura 3.37.

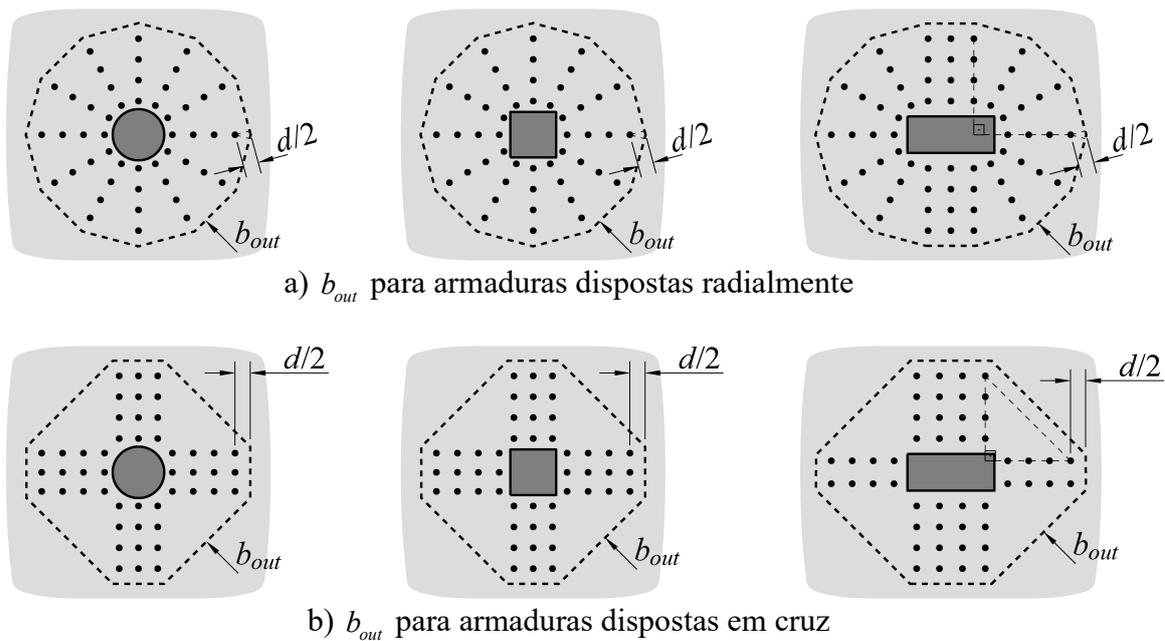


Figura 3.37 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar internas  
[modificado – ACI 318:2014]

*Deve-se destacar que o ACI 318:2014 não contempla distribuições radiais das armaduras de punção. Os perímetros críticos mostrados na Figura 3.37(a) são adaptações sugerida pelo autor.*

Segundo o item 22.6.6.1, no perímetro externo deve-se verificar a tensão dada na Equação 3.85.

### 3.3.4. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR INTERNAS

Nas seções anteriores são tratadas apenas as tensões resistentes. Desta seção em diante são tratadas as tensões solicitantes.

A tensão solicitante depende da carga transferida da laje ao pilar, podendo ser uma carga centrada ou com excentricidade. Devido ao efeito do momento fletor, em certos trechos do perímetro crítico haverá acréscimo na tensão solicitante e, em outros trechos, decréscimo. Admitindo duas componentes de momentos fletores, a tensão solicitante precisa ser estudada ao longo de todo o perímetro crítico, sendo o maior valor, em módulo, determinante para a

resistência à punção. A Figura 3.38 mostra as tensões de cisalhamento verticais nos quatro trechos do perímetro crítico em ligações laje-pilar internas.

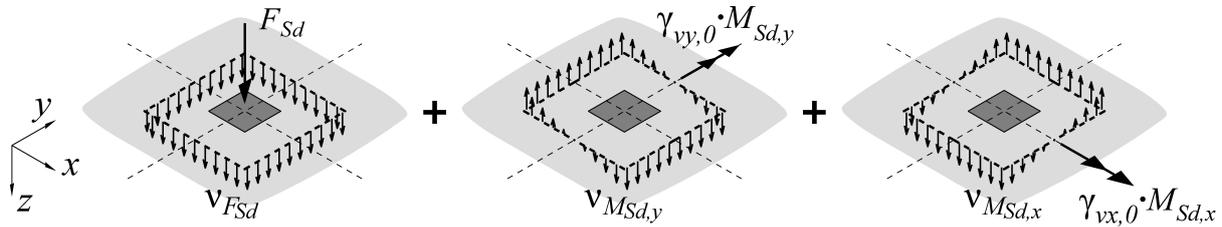


Figura 3.38 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar internas

A expressão para calcular a tensão solicitante é dada pela Equação 3.89.

$$v_{Sd} = \max_{(x,y) \subset b_i} \left\{ \frac{F_{Sd}}{b_i \cdot d} + \frac{\gamma_{vy,i} \cdot M_{Sd,y} \cdot x}{J_{i,y}} - \frac{\gamma_{vx,i} \cdot M_{Sd,x} \cdot y}{J_{i,x}} \right\} \quad \text{Equação 3.89}$$

Onde:

$b_i$  designa o perímetro crítico no qual a tensão está sendo analisada, podendo ser,  $b_0$ ,  $b_{out}$ ,  $b_c$  ou  $b_{c,out}$ ;

$M_{Sd,y}$  é o momento fletor solicitante transferido da laje para o pilar na direção  $y$ ;

$M_{Sd,x}$  é o momento fletor solicitante transferido da laje para o pilar na direção  $x$ ;

$x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto no plano médio da laje onde a tensão solicitante está sendo avaliada. A Equação 3.89 deve ser avaliada em pontos  $(x, y)$  pertencentes ao perímetro  $b_i$ , ou seja,  $v_{Sd}$  é uma função linear  $f(x, y)$  com domínio restrito:  $(x, y) \subset b_i$ . Para perímetros poligonais, o máximo dessa função sempre ocorrerá em algum vértice de  $b_i$ . Para perímetros circulares o gradiente  $\nabla f$  aponta a direção de crescimento de  $f(x, y)$ .

$J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$  são análogos ao momento de inércia polar da seção crítica em relação aos eixos de ação dos momentos fletores  $M_{Sd,y}$  e  $M_{Sd,x}$  respectivamente. Por sua vez, estes eixos de ação se cruzam no centro geométrico da seção crítica.  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$  são dados por:

$$J_{i,y} = \sum_{b_i} J_{\Delta b,y} \quad \text{Equação 3.90}$$

$$J_{i,x} = \sum_{b_i} J_{\Delta b,x} \quad \text{Equação 3.91}$$

Onde a notação  $\Delta b$  se refere a trechos do perímetro crítico  $b_i$ .

Nas faces  $\Delta b \cdot d$  perpendiculares ao momento fletor que estiver sendo considerado, o parâmetro  $J$  de fato é o momento polar da face em relação ao eixo do momento fletor.

$$J_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x^2 + z^2) dA \quad \text{Equação 3.92}$$

$$J_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y^2 + z^2) dA \quad \text{Equação 3.93}$$

Nas demais faces, não perpendiculares ao eixo do momento fletor,  $J$  é o momento de 2ª ordem da face em relação ao eixo do momento fletor.

$$J_{\Delta b,y} = I_{\Delta b,y} = \int_{A_i} x^2 dA \quad \text{Equação 3.94}$$

$$J_{\Delta b,x} = I_{\Delta b,x} = \int_{A_i} y^2 dA \quad \text{Equação 3.95}$$

Onde  $dA$  é a área infinitesimal da face  $A_i$  da seção crítica.

$\gamma_{vy,i}$  e  $\gamma_{vx,i}$  são os coeficientes que fornecem a parcela de momento fletor que é transmitida por cisalhamento. Tal coeficiente depende da rigidez da ligação laje-pilar na direção da ação do momento fletor, podendo ser calculado por:

$$\gamma_{vy,i} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_{x,i}}{b_{y,i}}}} \quad \text{Equação 3.96}$$

$$\gamma_{vx,i} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_{y,i}}{b_{x,i}}}} \quad \text{Equação 3.97}$$

Os termos  $b_{x,i}$  e  $b_{y,i}$  são as dimensões projetadas do perímetro crítico que estiver sendo analisado, como exemplificado na Figura 3.39.

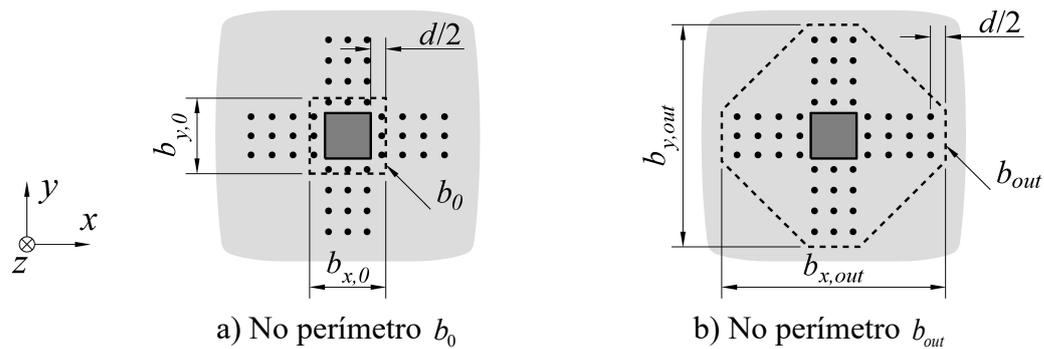
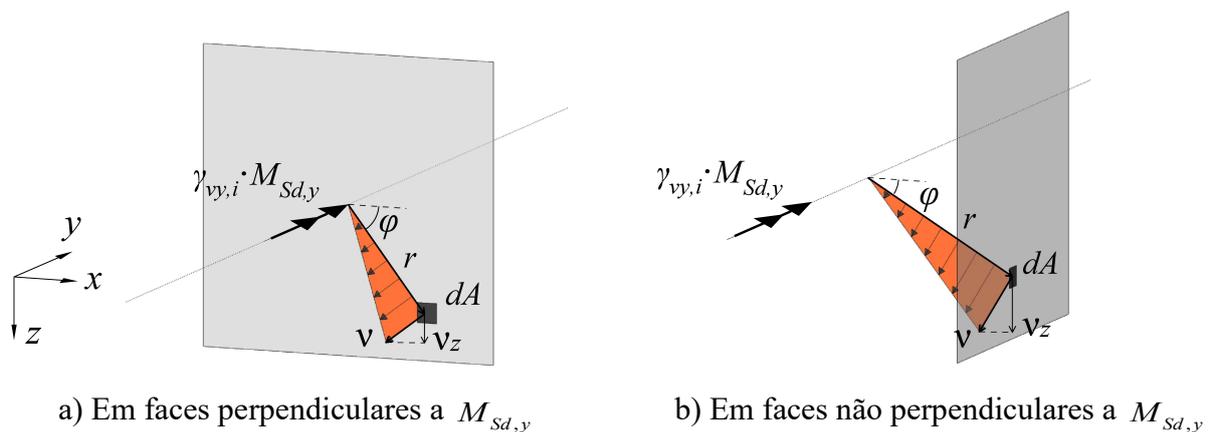


Figura 3.39 – Dimensões  $b_{x,i}$  e  $b_{y,i}$

O fator  $(F_{sd}/b_i \cdot d)$  na Equação 3.89 resulta da consideração de que a força vertical age igualmente em toda a área da seção crítica  $b_i \cdot d$ .

O fator  $(\gamma_{vy,i} \cdot M_{sd,y} \cdot x/J_{i,y})$  na Equação 3.89 resulta da consideração de que a tensão causada pela transmissão do momento  $M_{sd,y}$  da laje para o pilar cresce linearmente à medida que aumenta a distância ao eixo de ação do momento fletor. Então, se  $v$  é a tensão num ponto qualquer que dista  $r$  do eixo, tem-se  $v/r = \Psi$ , onde “ $\Psi$ ” é uma constante. Com auxílio da Figura 3.40, relaciona-se a componente vertical  $v_z$  como na Equação 3.98.

$$\frac{v}{r} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{v_z}{x} = \Psi \quad \text{Equação 3.98}$$



a) Em faces perpendiculares a  $M_{sd,y}$

b) Em faces não perpendiculares a  $M_{sd,y}$

Figura 3.40 – Distribuição linear do campo de tensões decorrentes do momento fletor

Em faces perpendiculares ao eixo de ação do momento fletor, a força cortante  $v \cdot dA$ , com braço de alavanca igual a  $r$ , causa momento infinitesimal  $\gamma_{vy,i} \cdot dM_{Sd,y}$ , ou seja, matematicamente pode-se equacionar:

$$\gamma_{vy,i} \cdot dM_{Sd,y} = v \cdot dA \cdot r = \Psi \cdot r^2 \cdot dA \quad \text{Equação 3.99(a)}$$

Realizando a integração, tem-se:

$$\gamma_{vy,i} \cdot M_{Sd,y} = \Psi \cdot \int_{A_i} r^2 dA = \left( \frac{v_z}{x} \right) \cdot \int_{A_i} (x^2 + z^2) dA \quad \text{Equação 3.99(b)}$$

Isolando a tensão vertical  $v_z$ , e substituindo a integral por  $J_{i,y}$ , obtém-se a tensão  $v_z = (\gamma_{vy,i} \cdot M_{Sd,y} \cdot x / J_{i,y})$ . Observe que  $J_{i,y}$  é o momento polar da seção.

Nas faces que não são perpendiculares ao eixo de ação do momento fletor as premissas da Equação 3.98 também são válidas. Porém, nestas faces, apenas a componente vertical da tensão  $v$  causa cisalhamento. Então, a força cortante  $v_z \cdot dA$ , com braço de alavanca igual a  $x$ , causa momento infinitesimal  $\gamma_{vy,i} \cdot dM_{Sd,y}$ , ou seja, matematicamente:

$$\gamma_{vy,i} \cdot dM_{Sd,y} = v_z \cdot dA \cdot x = \Psi \cdot x^2 \cdot dA \quad \text{Equação 3.100(a)}$$

Realizando a integração, tem-se:

$$\gamma_{vy,i} \cdot M_{Sd,y} = \Psi \cdot \int_{A_i} x^2 dA = \left( \frac{v_z}{x} \right) \cdot \int_{A_i} x^2 dA \quad \text{Equação 3.100(b)}$$

Isolando a tensão vertical  $v_z$ , e substituindo a integral por  $J_{i,y}$ , obtém-se a tensão  $v_z = (\gamma_{vy,i} \cdot M_{Sd,y} \cdot x / J_{i,y})$ , ressaltando que, em seções não perpendiculares ao eixo de ação do momento fletor,  $J_{i,y}$  não é o momento polar da seção, mas o momento de 2ª ordem. Por isso o parâmetro  $J_{i,y}$  é denominado pela norma como “análogo” ao momento polar de inércia.

As mesmas deduções se repetem na análise do momento fletor  $M_{Sd,x}$ .

Por questão de comodidade de escrita, neste texto a tensão  $v_{Sd}$  será representada por  $v_{Sd} = \beta_{Sd,i} (F_{Sd} / b_i \cdot d)$ , de onde surge o adimensional  $\beta_{Sd,i}$  para ligações laje-pilar internas, dado por:

$$\beta_{Sd,i} = \max_{(x,y) \subset b_i} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{vy,i} \cdot b_i \cdot d \cdot x}{J_{i,y}} \frac{M_{Sd,y}}{F_{Sd}} - \frac{\gamma_{vx,i} \cdot b_i \cdot d \cdot y}{J_{i,x}} \frac{M_{Sd,x}}{F_{Sd}} \right\} \quad \text{Equação 3.101}$$

Em situações experimentais,  $\beta_{Sk,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.101, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,y}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar, dadas pelas Equações 3.15 e 3.16.

### 3.3.5. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE BORDA

Para ligações laje-pilar de borda o desenvolvimento é semelhante, alterando a geometria dos perímetro de críticos, que são interrompidos pela borda da laje, como mostrado nas Figuras 3.42 e 3.43.

Deve-se atentar ao fato de que o momento fletor age no centro geométrico do perímetro crítico  $b_i$ , pois só assim a sua distribuição de tensões reproduz um binário, com resultante vertical nula. Está é, fundamentalmente, a única diferença em relação às deduções realizadas para ligações internas. As distribuições de tensões em  $b_0$  são ilustradas na Figura 3.41.

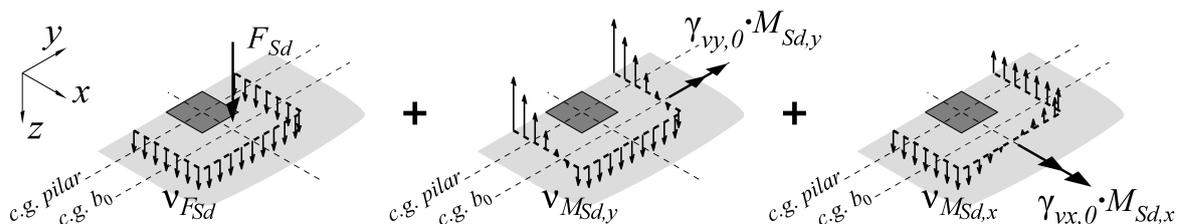


Figura 3.41 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar de borda

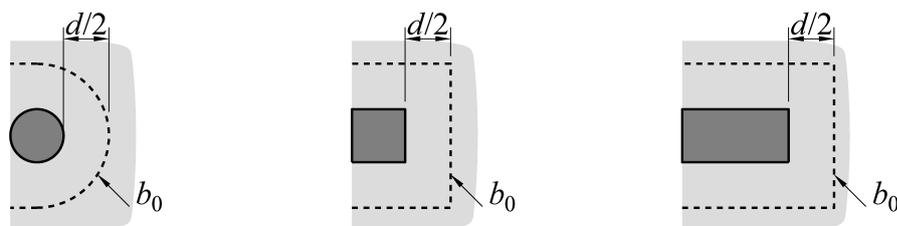


Figura 3.42 – Perímetro crítico em ligações laje-pilar de borda [modificado – ACI 318:2014]

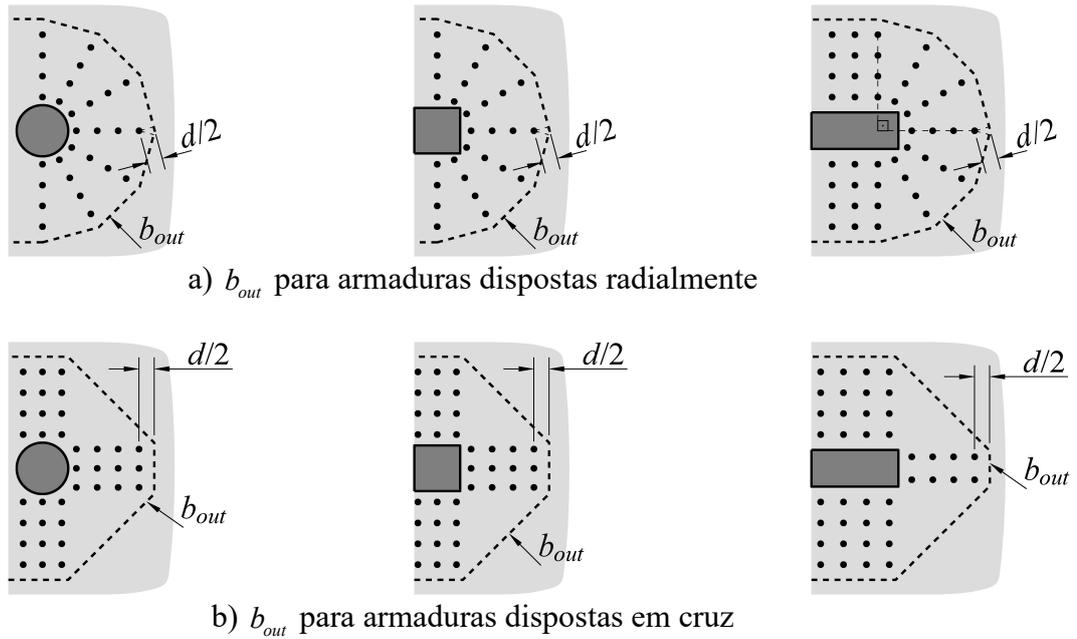


Figura 3.43 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar de borda

Portanto as mesmas deduções realizadas para pilares internos são válidas desde que sejam substituídos  $x$  por  $(x - x_{cg,b_i})$ ,  $y$  por  $(y - y_{cg,b_i})$ ,  $M_{Sd,y}$  por  $(M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)$  e  $M_{Sd,x}$  por  $(M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)$ , resultando na seguinte formulação geral.

$$v_{Sd} = \max_{(x,y) \in b_i} \left\{ \frac{F_{Sd}}{b_i \cdot d} + \frac{\gamma_{vy,i} (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*) (x - x_{cg,b_i})}{J_{i,y}} - \frac{\gamma_{vx,i} (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*) (y - y_{cg,b_i})}{J_{i,x}} \right\} \quad \text{Equação 3.102}$$

A norma não menciona a correção dos momentos fletores por  $M_{Sd,y,i}^*$  e  $M_{Sd,x,i}^*$ , mas como o fator  $(F_{Sd}/b_i \cdot d)$  na Equação 3.102 resulta da consideração de que a força vertical age uniformemente em toda a área da seção crítica  $b_i \cdot d$ , sua resultante se encontra no centro geométrico desta seção. Porém, na análise estrutural, a força  $F_{Sd}$  é obtida no centro geométrico do pilar, e o seu deslocamento para o centro geométrico do perímetro  $b_i$  provoca momentos fletores iguais a:

$$M_{Sd,y,i}^* = F_{Sd} \cdot x_{cg,b_i} \quad \text{Equação 3.103}$$

$$M_{Sd,x,i}^* = -F_{Sd} \cdot y_{cg,b_i} \quad \text{Equação 3.104}$$

Onde:

$$x_{cg,b_i} = \frac{\int x db_i}{b_i} \quad \text{Equação 3.105}$$

$$y_{cg,b_i} = \frac{\int y db_i}{b_i} \quad \text{Equação 3.106}$$

Os parâmetros  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$ , são calculados em relação ao centro geométrico do perímetro crítico. Em cada trecho  $\Delta b$  perpendicular ao eixo de ação do momento fletor,  $J_{\Delta b,y}$  e  $J_{\Delta b,x}$  correspondem ao momento polar de inércia da face  $\Delta b \cdot d$ :

$$J_{\Delta b,y} = \int_{A_i} \left[ (x - x_{cg,b_i})^2 + z^2 \right] dA \quad \text{Equação 3.107}$$

$$J_{\Delta b,x} = \int_{A_i} \left[ (y - y_{cg,b_i})^2 + z^2 \right] dA \quad \text{Equação 3.108}$$

Nas demais faces não perpendiculares ao eixo de ação do momento fletor,  $J_{\Delta b,y}$  e  $J_{\Delta b,x}$  correspondem ao momento de 2ª ordem da face em relação ao eixo do momento fletor.

$$J_{\Delta b,y} = I_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x - x_{cg,b_i})^2 dA \quad \text{Equação 3.109}$$

$$J_{\Delta b,x} = I_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y - y_{cg,b_i})^2 dA \quad \text{Equação 3.110}$$

Então os somatórios das Equações 3.90 e 3.91 se aplicam para obter  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$ .

Em ligações laje-pilar internas, geralmente  $x_{cg,b_i} = y_{cg,b_i} = 0$ . Em ligações de borda, geralmente  $y_{cg,b_i} = 0$ ; e em ligações de canto tanto  $x_{cg,b_i}$  como  $y_{cg,b_i}$  são diferentes de zero.

Por questão de comodidade de escrita, neste texto a tensão  $v_{Sd}$  será representada por  $v_{Sd} = \beta_{Sd,i} (F_{Sd}/b_i \cdot d)$ , de onde surge o adimensional  $\beta_{Sd,i}$  para ligações laje-pilar de borda:

$$\beta_{Sd,i} = \max_{(x,y) \in b_i} \left\{ \left| 1 + \frac{\gamma_{vy,i} \cdot b_i \cdot d (x - x_{cg,b_i}) (M_{Sd,y} - M_{Sd,y,i}^*)}{J_{i,y} F_{Sd}} - \frac{\gamma_{vx,i} \cdot b_i \cdot d (y - y_{cg,b_i}) (M_{Sd,x} - M_{Sd,x,i}^*)}{J_{i,x} F_{Sd}} \right| \right\} \quad \text{Equação 3.111}$$

A Equação 3.111 é aplicável aos três tipos de ligação laje-pilar: interna, observando que  $x_{cg,b_i} = y_{cg,b_i} = 0$ ; de borda, observando que  $y_{cg,b_i} = 0$ ; ou de canto. Em situações experimentais,  $\beta_{Sd,i}$  é calculado pela mesma Equação 3.111, bastando alterar os subíndices  $d$  para  $k$ . Neste caso o pesquisador não conhece as cargas  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,y}$  e  $M_{Sk,x}$  que provocam a ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas é suficiente que conheça as excentricidades do carregamento aplicado em relação ao centro geométrico do pilar, dadas pelas Equações 3.15 e 3.16, além das relações  $M_{Sk,y,i}^*/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x,i}^*/F_{Sk}$ , que equivalem, respectivamente, a  $x_{cg,b_i}$  e  $-y_{cg,b_i}$ .

### 3.3.6. SOLICITAÇÕES EM LIGAÇÕES LAJE-PILAR DE CANTO

Para ligações laje-pilar de canto o desenvolvimento é igual ao realizado para ligações de borda, alterando apenas a geometria dos perímetros críticos, que serão interrompidos pelas duas bordas da laje, como mostrado nas Figuras 3.45 e 3.46. A Figura 3.44 mostra as distribuições de tensões no perímetro  $b_0$ .

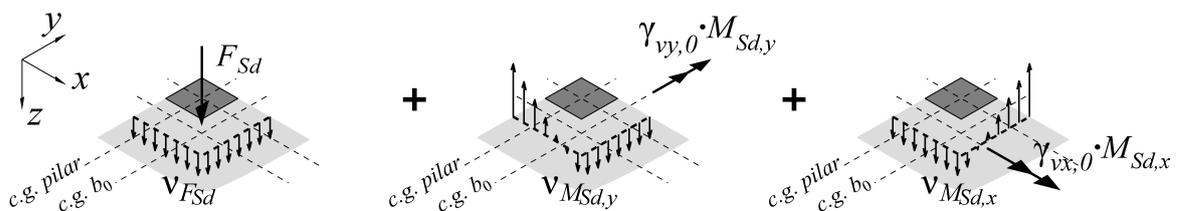


Figura 3.44 – Tensões solicitantes em ligações laje-pilar de borda

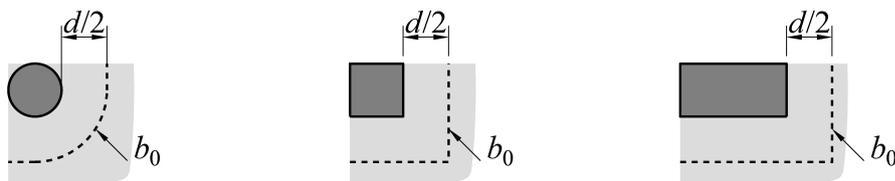


Figura 3.45 – Perímetro crítico em ligações laje-pilar de canto [modificado – ACI 318:2014]

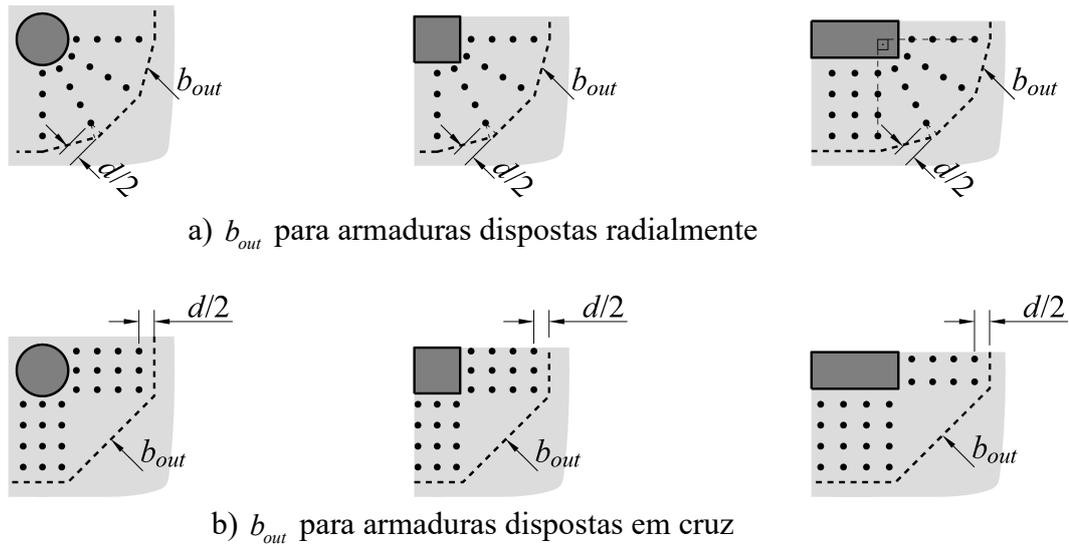


Figura 3.46 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar de canto

Vale a formulação geral, apresentada da Equação 3.102 à 3.111.

### 3.3.7. PROTENSÃO

Havendo protensão, a resistência à tração diagonal, dada pela Equação 3.84, deve ser substituída por:

$$v_{Rd,c} = \min \left\{ \begin{array}{l} \phi \cdot 0,29 \lambda \sqrt{f'_c} \\ \phi \cdot 0,083 \left( 1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.112 \end{array}$$

O efeito das armaduras protendidas na laje, é considerado pelo ACI 318:2014 de duas formas:

1) A compressão no plano da laje age em favor da resistência à tração diagonal. Assim, são adicionadas às tensões resistentes à tração o termo  $0,3 f_{pc,i}$ , sendo:

$$f_{pc,i} = \frac{N_{Pk,i}}{b_i \cdot d} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.113 \end{array}$$

Onde  $N_{Pk,i}$  é a soma da força normal devido as  $j$  cordoalhas:

$$N_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.114 \end{array}$$

Sendo  $F_{Pk,j}$  a força na cordoalha de protensão  $j$  a cada interseção da cordoalha com o perímetro  $b_i$ , em “Newton”.

2) Ao se aproximar dos pilares, os cabos de protensão geralmente se inclinam para cima, o que gera na ligação laje-pilar uma força cortante  $V_{Pk,i}$  dirigida de baixo para cima igual a:

$$V_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \cdot \text{sen} \alpha_j \quad \text{Equação 3.115}$$

Onde  $\alpha_j$  é a inclinação da cordoalha de protensão em relação ao plano da laje, tomada na interseção com o perímetro crítico  $b_i$ .

Esta força distribuída no perímetro crítico  $b_i$  gera tensão  $v_{pc,i}$ :

$$v_{pc,i} = \frac{V_{Pk,i}}{b_i \cdot d} \quad \text{Equação 3.116}$$

Que alivia a tensão solicitante  $v_{Sd}$  na ligação laje-pilar. A segurança estrutural será garantida se:

$$v_{Sd} - v_{pc,i} \leq v_{Rd} + 0,3 f_{pc,i} \quad \text{Equação 3.117}$$

Entretanto, é mais conveniente somar  $v_{pc,i}$  à tensão resistente do que subtraí-la da tensão solicitante, o que não altera a Equação 3.117; pois assim os parâmetros  $\beta_{Sd,i}$  não se alteram.

Note que tanto em situação de projeto como experimental, são considerados valores característicos da protensão. No item R22.6.5.4, a norma recomenda que em situações de projeto,  $f_{pc,i}$  esteja limitado ao máximo de 3,5 MPa e  $f'_c$  ao máximo de 34 MPa, devido à escassez de pesquisas com valores além destes limites.

### 3.3.8. VERIFICAÇÕES

Em uma análise de projeto a segurança estrutural será garantida se:

$$v_{Sd} \leq v_{Rd} \Rightarrow \beta_{Sd,i} \frac{F_{Sd}}{b_i \cdot d} \leq v_{Rd} \Rightarrow F_{Sd} \leq \frac{v_{Rd} \cdot b_i \cdot d}{\beta_{Sd,i}} = V_{Rd} \quad \text{Equação 3.118}$$

Portanto:

- Em ligações laje-pilar sem armaduras de punção:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\phi \left[ 0,5\sqrt{f'_c} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} \quad \text{Equação 3.119}$$

$$V_{Rd,c} = \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} \phi \cdot 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \\ \phi \cdot 0,17 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \\ \phi \cdot 0,083 \left( 2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \end{array} \right. \\ \hline \beta_{Sd,0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se concreto} \\ \text{armado} \end{array} \quad \text{Equação 3.120}$$

$$\begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} \phi \left[ 0,29\lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,0} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d \\ \phi \left[ 0,083 \left( 1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,0} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d \end{array} \right. \\ \hline \beta_{Sd,0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se concreto} \\ \text{Protendido} \end{array}$$

- Em ligações laje-pilar com ábaco ou capitel:

$$V_{Rd,máx} = \frac{\phi \left[ 0,5\sqrt{f'_c} + v_{pc,c} \right] b_c \cdot d_c}{\beta_{Sd,c}} \quad \text{Equação 3.121}$$

$$V_{Rd,c} = \begin{cases} \min \begin{cases} \phi \cdot 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_c \cdot d_c \\ \phi \cdot 0,17 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_c \cdot d_c \\ \phi \cdot 0,083 \left( 2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \cdot b_c \cdot d_c \end{cases} \\ \beta_{Sd,c} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se concreto} \\ \text{armado} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.122 \end{array}$$
  

$$V_{Rd,c} = \begin{cases} \min \begin{cases} \phi \left[ 0,29\lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,c} + v_{pc,c} \right] b_c \cdot d_c \\ \phi \left[ 0,083 \left( 1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,c} + v_{pc,c} \right] b_c \cdot d_c \end{cases} \\ \beta_{Sd,c} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se concreto} \\ \text{Protendido} \end{array}$$
  

$$V_{Rd,c,out} = \frac{\phi \left[ 0,17\lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,c,out} + v_{pc,c,out} \right] b_{c,out} \cdot d}{\beta_{Sd,c,out}} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.123 \end{array}$$

- Em ligações laje-pilar com armaduras de punção:

$$V_{Rd,max} = \begin{cases} \frac{\phi \left[ 0,5\sqrt{f'_c} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} & \text{Se armada com estribos} \\ \frac{\phi \left[ 0,66\sqrt{f'_c} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} & \text{Se armada com studs} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.124 \end{array}$$
  

$$V_{Rd,cs} = \begin{cases} \frac{\phi \left[ 0,17\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk}}{b_0 \cdot s_r} + 0,3f_{pc,0} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} & \text{Se armada} \\ & \text{com estribos} \\ \frac{\phi \left[ 0,25\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{A_{sw} \cdot f_{ywk}}{b_0 \cdot s_r} + 0,3f_{pc,0} + v_{pc,0} \right] b_0 \cdot d}{\beta_{Sd,0}} & \text{Se armada} \\ & \text{com studs} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.125 \end{array}$$

$$V_{Rd,out} = \frac{\phi \left[ 0,17\lambda\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc,out} + v_{pc,out} \right] b_{out} \cdot d}{\beta_{Sd,out}} \quad \text{Equação 3.126}$$

As cargas resistentes características  $V_{Rk}$  podem ser obtidas com as mesmas Equações 3.118 à 3.126, bastando substituir  $\phi$  por 1 e os subíndices  $d$  por  $k$ .

### 3.3.9. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS

Do item 22.6.4.3 na ocasião em que há aberturas na laje distando menos de  $10h$  do pilar ou localizada na faixa entre pilares, a norma prescreve que o trecho compreendido entre os dois segmentos de reta que tangenciam a abertura e se interceptam no centro geométrico do pilar deve ser desconsiderado do perímetro crítico  $b_0$ , a exemplo da Figura 3.47. *O autor entende que devem ser desconsiderados, de maneira análoga, os trechos dos perímetros  $b_{out}$ , e no caso adoção de ábacos ou capitéis,  $b_c$ ,  $b_{c,out}$ .*

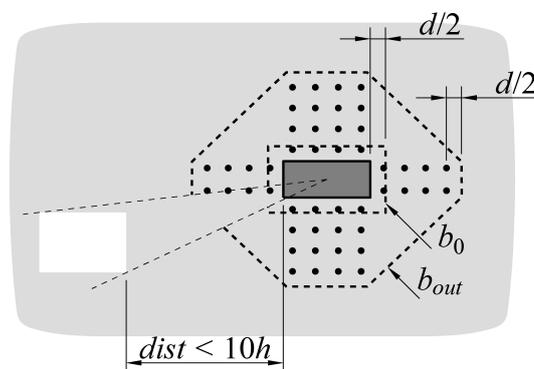


Figura 3.47 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje distando menos de  $10h$  do pilar

Com relação ao cálculo de  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$ , a Figura 3.48 auxilia nas subseqüentes deduções de expressões para o parâmetro em faces de perímetros críticos poligonais.

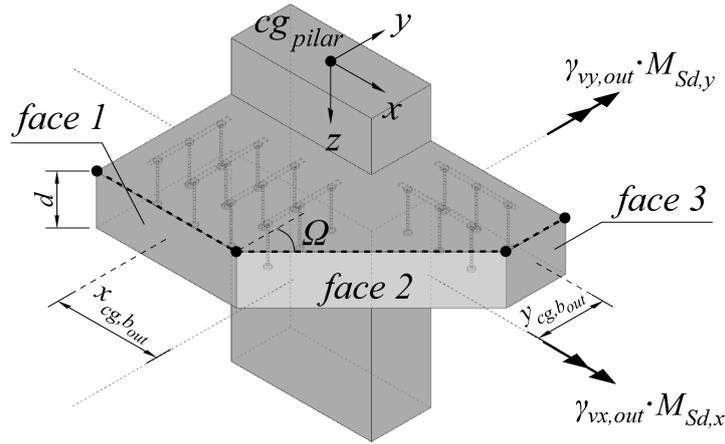


Figura 3.48 – Parâmetros  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$  em faces de perímetros críticos poligonais

Sejam  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$  as coordenadas dos vértices de um dado trecho do perímetro crítico, segue que:

- Em faces perpendiculares ao eixo  $y$ , a exemplo da face 1 da Figura 3.48, calcula-se:

$$J_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x - x_{cg,b_i})^2 + z^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{x_a}^{x_b} (x - x_{cg,b_i})^2 + z^2 dx dz =$$

$$J_{\Delta b,y} = \left| \frac{d}{3} \left[ (x_b - x_{cg,b_i})^3 - (x_a - x_{cg,b_i})^3 \right] + \frac{d^3}{12} (x_b - x_a) \right| \quad \text{Equação 3.127}$$

$$J_{\Delta b,x} = I_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y - y_{cg,b_i})^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{x_a}^{x_b} (y - y_{cg,b_i})^2 dx dz =$$

$$J_{\Delta b,x} = \left| d (x_b - x_a) \cdot (y_b - y_{cg,b_i})^2 \right| \quad \text{Equação 3.128}$$

- Em faces inclinadas em um ângulo  $\Omega$  em relação ao eixo  $y$ , a exemplo da face 2 da Figura 3.48, calcula-se:

$$\Omega = \text{arctg} \left( \left| \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} \right| \right) \quad \text{Equação 3.129}$$

$$J_{\Delta b,y} = I_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x - x_{cg,b_i})^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{b_i} (x - x_{cg,b_i})^2 db_i dz = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{x_a}^{x_b} \frac{(x - x_{cg,b_i})^2}{\text{sen}\Omega} dx dz =$$

$$J_{\Delta b,y} = \left| \frac{d \left[ (x_b - x_{cg,b_i})^3 - (x_a - x_{cg,b_i})^3 \right]}{3 \text{sen}\Omega} \right| \quad \text{Equação 3.130}$$

$$J_{\Delta b,x} = I_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y - y_{cg,b_i})^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{y_a}^{y_b} (y - y_{cg,b_i})^2 db_i dz = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{y_a}^{y_b} \frac{(y - y_{cg,b_i})^2}{\text{cos}\Omega} dy dz =$$

$$J_{\Delta b,x} = \left| \frac{d \left[ (y_b - y_{cg,b_i})^3 - (y_a - y_{cg,b_i})^3 \right]}{3 \text{cos}\Omega} \right| \quad \text{Equação 3.131}$$

- Em faces perpendiculares ao eixo  $x$ , a exemplo da face 3 da Figura 3.48, calcula-se:

$$J_{\Delta b,y} = I_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x - x_{cg,b_i})^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{y_a}^{y_b} (x - x_{cg,b_i})^2 dy dz =$$

$$J_{\Delta b,y} = \left| d (y_b - y_a) (x_b - x_{cg,b_i})^2 \right| \quad \text{Equação 3.132}$$

$$J_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y - y_{cg,b_i})^2 + z^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{y_a}^{y_b} (y - y_{cg,b_i})^2 + z^2 dy dz =$$

$$J_{\Delta b,x} = \left| \frac{d}{3} \left[ (y_b - y_{cg,b_i})^3 - (y_a - y_{cg,b_i})^3 \right] + \frac{d^3}{12} (y_b - y_a) \right| \quad \text{Equação 3.133}$$

Para os parâmetros  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$  em trechos circunferenciais dos perímetros críticos a Figura 3.49 auxilia nas deduções de expressões.

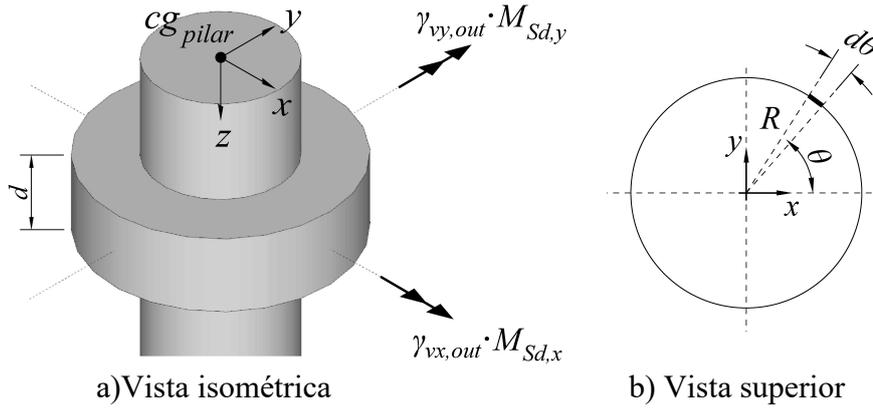


Figura 3.49 – Parâmetros  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$  em faces de perímetros críticos circunferenciais

Seja  $R$  o raio da face circular da superfície crítica, com  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , segue que:

$$J_{\Delta b,y} = I_{\Delta b,y} = \int_{A_i} (x - x_{cg,b_i})^2 \cdot dA = \int_{b_i} (R \cdot \cos \theta - x_{cg,b_i})^2 \cdot d \cdot db_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (R \cdot \cos \theta - x_{cg,b_i})^2 \cdot d \cdot R \cdot d\theta =$$

$$J_{\Delta b,y} = \frac{R^3 d}{4} \left\{ (\theta_2 - \theta_1) \left[ 2 + \left( \frac{2x_{cg,b_i}}{R} \right)^2 \right] - \frac{8x_{cg,b_i}}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + \sin(2\theta_2) - \sin(2\theta_1) \right\} \quad \text{Equação 3.134}$$

$$J_{\Delta b,x} = I_{\Delta b,x} = \int_{A_i} (y - y_{cg,b_i})^2 \cdot dA = \int_{b_i} (R \cdot \sin \theta - y_{cg,b_i})^2 \cdot d \cdot db_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (R \cdot \sin \theta - y_{cg,b_i})^2 \cdot d \cdot R \cdot d\theta =$$

$$J_{\Delta b,x} = \frac{R^3 d}{4} \left\{ (\theta_2 - \theta_1) \left[ 2 + \left( \frac{2y_{cg,b_i}}{R} \right)^2 \right] + \frac{8y_{cg,b_i}}{R} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + \sin(2\theta_1) - \sin(2\theta_2) \right\} \quad \text{Equação 3.135}$$

No caso de pilar interno,  $x_{cg,b_i} = y_{cg,b_i} = \theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = 2\pi$ , as expressões acima aplicadas ao perímetro  $b_0$  se resumem a:

$$J_{0,y} = J_{0,x} = R^3 \pi d = \left( \frac{c+d}{2} \right)^3 \pi d \quad \text{Equação 3.136}$$

### 3.4. *fib* MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES 2010

O *fib* MODEL CODE:2010 adota um modelo mecânico baseado na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, de Aurelio Muttoni. Segundo MUTTONI (2008), nesta teoria a resistência da laje à punção depende da magnitude da abertura de uma fissura crítica. A abertura dessa fissura pode ser correlacionada com a rotação sofrida pela laje a cada nível de carga solicitante. Quanto maior a abertura da fissura crítica, menor o contato entre as partes íntegras de concreto e, portanto, menor a capacidade de resistir por meio de esforços de cisalhamento. Além disso, o modelo considera que esta fissura tende a contornar os agregados graúdos, permitindo alguma resistência promovida pelo engrenamento destes agregados.

Na apresentação do código modelo, as considerações sobre punção constam no item 7.3.5.

O *fib* MODEL CODE:2010 enfatiza a diferenciação entre duas alturas úteis,  $d$  e  $d_v$  :

$d_v$  é a altura útil para fins de caracterização da superfície de ruptura por punção;

$d$  é a altura útil para fins de cálculo à flexão da laje.

A Figura 3.50 ilustra cada altura útil em diversas situações.

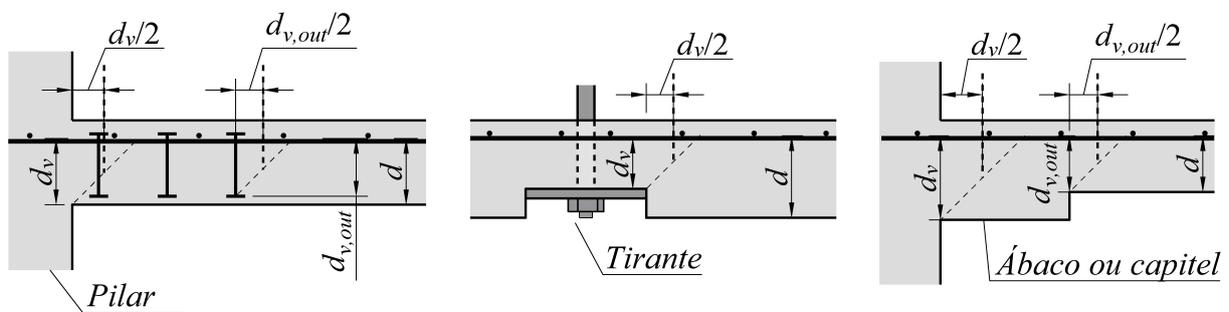


Figura 3.50 – Diferenciação das alturas úteis  $d$  e  $d_v$  [modificado – *fib* MODEL CODE:2010]

Note na Figura 3.50 que na região externa às armaduras de punção,  $d_v$  não contempla o cobrimento abaixo dessas armaduras, sendo neste texto denominado  $d_{v,out}$ .

O código modelo também diferencia dois perímetros críticos,  $b_1$  e  $b_{0,1}$  :

$b_1$  é o perímetro crítico básico, tomado à distância  $0,5d_v$  da área carregada, como na Figura 3.51.

$b_{0,1}$  é o perímetro crítico resistente ao cortante. Não tem geometria definida, sendo obtido pela multiplicação de  $b_1$  por um coeficiente de excentricidade, detalhado nas seções subsequentes.

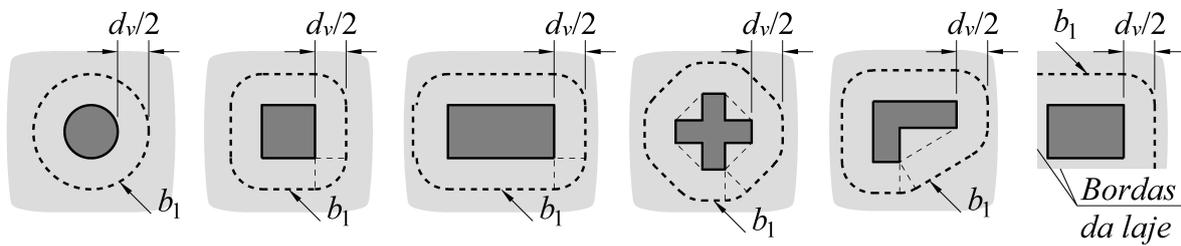


Figura 3.51 – Perímetro crítico básico em volta da área carregada [modificado – *fib* MODEL CODE:2010]

Quando a área carregada é muito grande, o perímetro crítico básico é descontínuo, não devendo se estender mais de  $1,5d_v$  dos cantos da área carregada, conforme ilustrado na Figura 3.52.

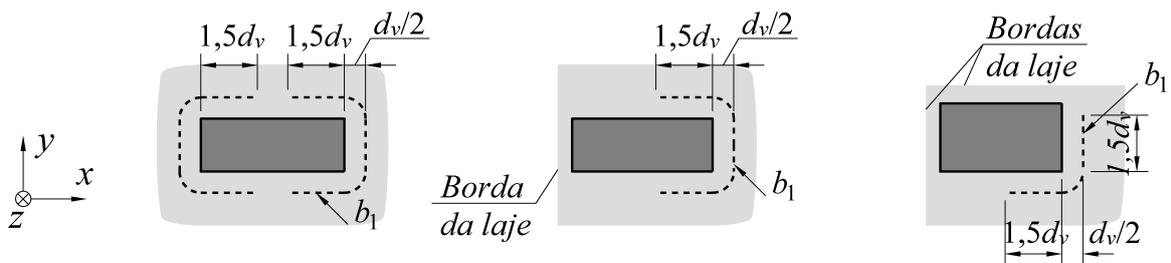


Figura 3.52 – Perímetro crítico básico para grandes áreas carregadas [modificado – *fib* MODEL CODE:2010]

Quando são adotadas armaduras de punção, surge a necessidade de verificar o perímetro crítico básico  $b_{out}$ , que é análogo ao  $b_1$ , porém afastado  $0,5d_{v,out}$  das armaduras de punção mais externas. Paralelamente, surgirá o perímetro crítico resistente ao cortante  $b_{0,out}$ , obtido pela multiplicação de  $b_{out}$  pelo coeficiente de excentricidade.

### 3.4.1. ESTIMATIVAS DA ROTAÇÃO $\psi$ DA LAJE

O modelo de cálculo apresentado pelo *fib* MODEL CODE:2010 depende fundamentalmente das rotações  $\psi$  que a laje apresenta para cada nível de carga solicitante, indicadas na Figura 3.53. Por isso, neste texto são inicialmente abordadas as expressões que o código modelo

apresenta no item 7.3.5.4 para estimar este parâmetro por quatro diferentes “níveis de aproximação”.

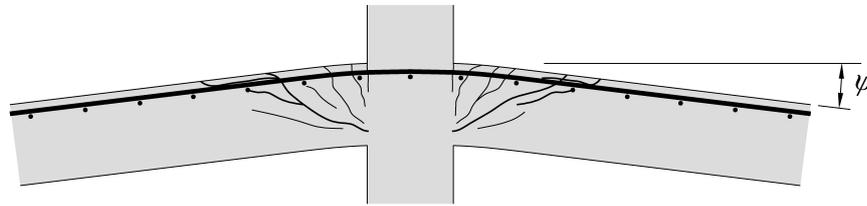


Figura 3.53 – Rotação  $\psi$  da laje [modificado – *fib* MODEL CODE:2010]

O nível 1 de aproximação fornece uma estimativa segura:

$$\psi_{I,d} = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} \quad \text{Equação 3.137}$$

O nível 2 de aproximação fornece uma boa estimativa nos casos em que são consideradas significativas redistribuições dos momentos fletores entre a laje e o pilar:

$$\psi_{II,d,i} = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} \left( \frac{m_{sd,i}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad \text{Equação 3.138}$$

O nível 3 fornece uma melhor estimativa para lajes calculadas por modelo linear-elástico. É calculado da mesma forma que o nível 2, alterando apenas o coeficiente 1,5 para 1,2:

$$\psi_{III,d,i} = 1,2 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} \left( \frac{m_{sd,i}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad \text{Equação 3.139}$$

O nível 4 é utilizado com base em análises não lineares da estrutura, levando em conta os efeitos da fissuração e enrijecimento, o escoamento das armaduras e outros efeitos não lineares relevantes.

Nas expressões para cálculo da rotação  $\psi$ ,  $r_s$  é a distância entre o centro geométrico do pilar e o ponto onde o momento fletor na laje se anula. O valor de  $r_s$  pode ser determinado através de uma análise elástica do pavimento. Em geral, equivale a aproximadamente 22% do vão em ligações internas de lajes lisas com vãos regulares. Quando os vãos são diferentes, ou para ligações de borda e de canto, o código modelo não faz nenhuma consideração. *Neste texto*

serão considerados  $r_{s,x}$  e  $r_{s,y}$ , respectivamente iguais a 22% do vão em cada direção  $x$  e  $y$  nas ligações laje-pilar internas. Para ligações de borda,  $r_{s,x}$  e  $r_{s,y}$  serão admitidos iguais a 16% e 22% dos vãos; e em ligações de canto, 16%. Então  $r_s$  será a média geométrica:

$$r_s = \sqrt{r_{s,x} \cdot r_{s,y}} \quad \text{Equação 3.140}$$

$f_{yk}$  e  $E_s$  são a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade das armaduras de flexão;  $m_{Rd}$  é o momento resistente de projeto por unidade de largura da laje, em N·mm/mm, que o autor recomenda calcular por:

$$m_{Rd} = \frac{\rho \cdot d^2 \cdot f_{yk}}{\gamma_s} \left( 1 - \frac{\rho \cdot f_{yk} \cdot \gamma_c}{2 \cdot 0,85 \cdot f_{ck} \cdot \gamma_s} \right) \quad \text{Equação 3.141}$$

Ressalta-se que a Equação 3.141 leva em conta apenas as armaduras de flexão tracionadas. Para considerar a contribuição das armaduras comprimidas deve-se realizar o procedimento completo de cálculo de  $m_{Rd}$ , que não resulta em uma expressão de rápida aplicação.

E  $m_{sd,i}$  é o momento solicitante médio por unidade de largura da laje, calculado por meio de diferentes expressões, a depender da posição da ligação laje-pilar no pavimento. Para cálculo de  $m_{sd,i}$  são previamente definidos os seguintes parâmetros:

$b_s$  é a largura da faixa entre pilares, calculada por  $b_s = 1,5 \cdot r_s$ ;

$e_{u,máx,i}$  é a maior excentricidade entre  $|e_{u,x,i}|$  e  $|e_{u,y,i}|$ , sendo estas as excentricidades da força solicitante em cada direção ortogonal  $x$  e  $y$  tomadas em relação ao centro geométrico do perímetro crítico básico  $b_i$ , onde o subíndice  $i$  apenas especifica se a análise se dá no perímetro  $b_1$  ou  $b_{out}$ . A Figura 3.54(a) ilustra a posição da resultante da carga solicitante, e a Figura 3.54(b) enfatiza que as distâncias ortogonais entre a posição desta resultante ao centro geométrico do perímetro crítico básico  $b_1$  são as excentricidades  $e_{u,x,1}$  e  $e_{u,y,1}$ .

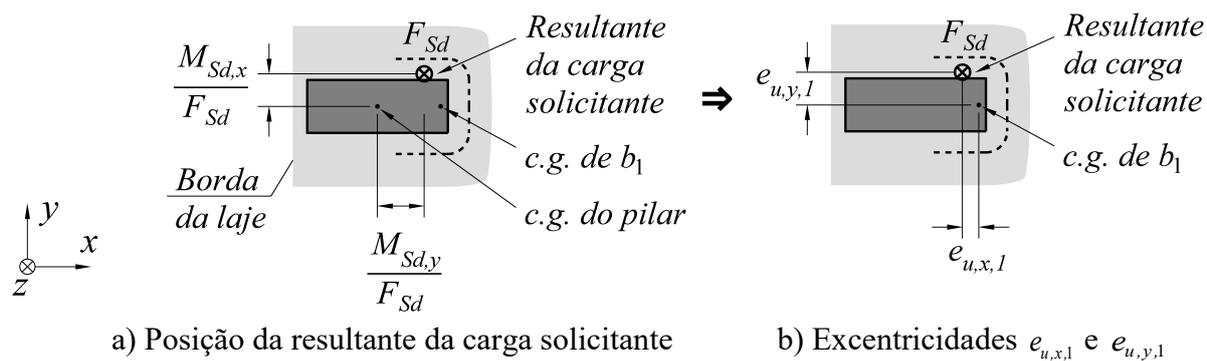


Figura 3.54 – Determinação das excentricidades  $e_{u,x,i}$  e  $e_{u,y,1}$   
[modificado – fib MODEL CODE:2010]

Portanto:

$$e_{u,x,i} = \frac{M_{Sd,y}}{F_{Sd}} - x_{cg,b_i} \quad \text{Equação 3.142}$$

$$e_{u,y,i} = -\frac{M_{Sd,x}}{F_{Sd}} - y_{cg,b_i} \quad \text{Equação 3.143}$$

Onde:

$$x_{cg,b_i} = \frac{\int x db_i}{b_i} \quad \text{Equação 3.144}$$

$$y_{cg,b_i} = \frac{\int y db_i}{b_i} \quad \text{Equação 3.145}$$

Finalmente pode-se calcular o momento  $m_{sd,i}$ :

- Para ligações laje-pilar internas:

$$m_{sd,i} = F_{Sd} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,máx,i}|}{2 \cdot b_s} \right) \quad \text{Equação 3.146}$$

- Para ligações laje-pilar de borda:

$$m_{sd,i} = \max \left\{ \begin{array}{l} F_{Sd} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,y,i}|}{b_s} \right) \\ F_{Sd} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,x,i}|}{2 \cdot b_s} \right) \\ \frac{F_{Sd}}{4} \end{array} \right. \quad \text{Equação 3.147}$$

- Para ligações laje-pilar de canto:

$$m_{sd,i} = \max \left\{ \begin{array}{l} F_{Sd} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,máx,i}|}{b_s} \right) \\ \frac{F_{Sd}}{2} \end{array} \right. \quad \text{Equação 3.148}$$

Da Equação 3.137 à 3.148,  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  são os coeficientes de minoração da resistência do concreto e do aço, respectivamente, cujos valores recomendados são de 1,5 e 1,15. Removendo suas influências, ou seja, fazendo  $\gamma_c = \gamma_s = 1$ , e tomando  $F_{Sk}$ ,  $M_{Sk,x}$  e  $M_{Sk,y}$  no lugar de  $F_{Sd}$ ,  $M_{Sd,x}$  e  $M_{Sd,y}$  obtêm-se os valores de projeto  $m_{sk,i}$ ,  $m_{Rk}$ ,  $\psi_{I,k}$ ,  $\psi_{II,k,i}$  e  $\psi_{III,k,i}$ . No caso de pesquisas experimentais, recomenda-se substituir na Equação 3.141 o valor “ $0,85f_{ck}$ ” por “ $0,95f_{ck}$ ”, deste modo removem-se as considerações de perda de resistência do concreto por efeito Rüsçh – fator 0,75 – e o ganho de resistência tardia, após os 28 dias – fator 1,20 – permanecendo apenas o coeficiente que considera a diferença entre a resistência do concreto na estrutura e a medida em corpos-de-prova devido ao confinamento da prensa de ensaio – fator 0,95.

### 3.4.2. CÁLCULOS PRELIMINARES

As verificações do *fib* MODEL CODE:2010 exigem o cálculo preliminar de alguns coeficientes, a saber:

O coeficiente  $k_{\psi,d,i}$ , que depende da rotação  $\psi_{d,i}$  da laje no instante da ruptura, em radianos.

$$k_{\psi,d,i} = \min \left\{ \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot k_{dg} \cdot \psi_{d,i} \cdot d}, 0,6 \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.149 \end{array}$$

Onde o coeficiente  $k_{dg}$  introduz a influência do engrenamento dos agregados, dado por:

$$k_{dg} = \max \left\{ \frac{32}{16 + d_g}, 0,75 \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.150 \end{array}$$

Com  $d_g$ , o diâmetro máximo do agregado, em milímetros.

Para levar em conta os efeitos da transferência de momentos fletores entre a laje e o pilar, o perímetro crítico básico  $b_i$  deve ser multiplicado pelo coeficiente de excentricidade  $k_{e,i}$ , resultando no perímetro crítico resistente ao cortante, denominado  $b_{0,i}$ .

$$b_{0,i} = k_{e,i} \cdot b_i \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.151 \end{array}$$

Com coeficiente de excentricidade dado por:

$$k_{e,i} = \frac{1}{1 + \frac{e_{u,i}}{b_{u,i}}} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.152 \end{array}$$

Onde  $e_{u,i}$  é a excentricidade da resultante das forças cortantes em relação ao centro geométrico do perímetro crítico básico  $b_i$ :

$$e_{u,i} = \sqrt{(e_{u,x,i})^2 + (e_{u,y,i})^2} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.153 \end{array}$$

$b_{u,i}$  é o diâmetro do círculo cuja área é a mesma da região interna ao perímetro crítico básico  $b_i$ .

### 3.4.3. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DIAGONAL, E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA AUSÊNCIA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Do item 7.3.5.3 do *fib* MODEL CODE 2010, a carga máxima de resistência à punção é limitada pela integridade do concreto na biela comprimida:

$$V_{Rd,máx} = \min \left\{ \begin{array}{l} k_{sys} \cdot k_{\psi,d,1} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_{0,1} \cdot d_v \\ \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_{0,1} \cdot d_v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.154 \end{array}$$

Onde o coeficiente  $k_{sys}$  considera o desempenho das armaduras de punção no controle da fissuração e para confinar as bielas comprimidas, aumentando a resistência do concreto. Quando são utilizadas armaduras do tipo *studs*,  $k_{sys}$  pode ser tomado igual a 2,8; quando utilizados estribos, igual a 2,4; para outros tipos de armadura, simplificada, toma-se igual a 2,0. Quando não há armaduras de punção,  $k_{sys}$  vale 1,0, e neste caso  $V_{Rd,máx}$  se iguala com a resistência à tração diagonal:

$$V_{Rd,c} = k_{\psi,d,1} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_{0,1} \cdot d_v \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.155 \end{array}$$

Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 em vez de 1,5; e tomando  $k_{\psi,k,1}$  em vez de  $k_{\psi,d,1}$  nas Equações 3.154 e 3.155, obtêm-se as cargas características  $V_{Rk,máx}$  e  $V_{Rk,c}$ , respectivamente.

### 3.4.4. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA PRESENÇA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Segundo prescrições do item 7.13.5.3 do *fib* MODEL CODE 2010, quando utilizadas armaduras de punção, estas devem ser dispostas levando em conta as distâncias  $s_0$ , da primeira camada de armaduras ao pilar, respeitando  $0,35d_v \leq s_0 \leq 0,75d_v$ ; a distância  $s_r$ , entre camadas, não maior que  $0,75d_v$  nem 300 mm; e a distância  $s_{c2}$ , entre linhas vizinhas da segunda camada de armaduras, não maior que  $1,5d_v$ , conforme exemplifica a Figura 3.55.

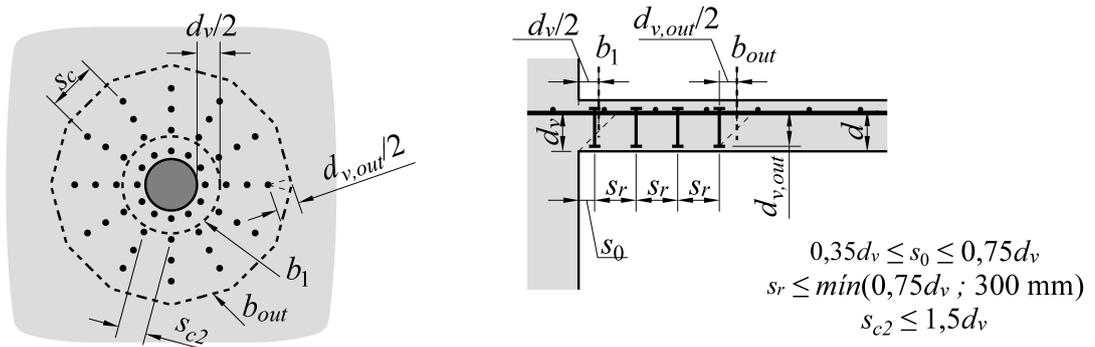


Figura 3.55 – Regras para disposição das armaduras de punção [modificado – fib MODEL CODE:2010]

O diâmetro das armaduras de punção deve ainda ser limitado aos valores da Tabela 3.2 em função da altura útil  $d_v$ .

Tabela 3.2 – Diâmetro máximo das armaduras de punção

$d_v$ [mm]	$\varphi_{w,máx}$ [mm]
<160	-
160-180	14
181-220	16
221-260	18
261-340	20
341-600	25
>600	30

Do item 7.3.5.3 do fib MODEL CODE 2010, a carga resistente vale:

$$V_{Rd,cs} = k_{\psi,d,1} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_{0,1} \cdot d_v + (\sum A_{sw}) k_{e,1} \cdot \sigma_{swd} \cdot \text{sen}\alpha \quad \text{Equação 3.156}$$

Onde  $\sum A_{sw}$  é a soma das áreas da seção transversal das armaduras de punção contidas total ou parcialmente dentro da zona delimitada pelas distâncias de  $0,35d_v$  e  $d_v$  das extremidades da área carregada, conforme ilustrado na Figura 3.56. O ângulo  $\alpha$  é a inclinação das armaduras em relação ao plano da laje.

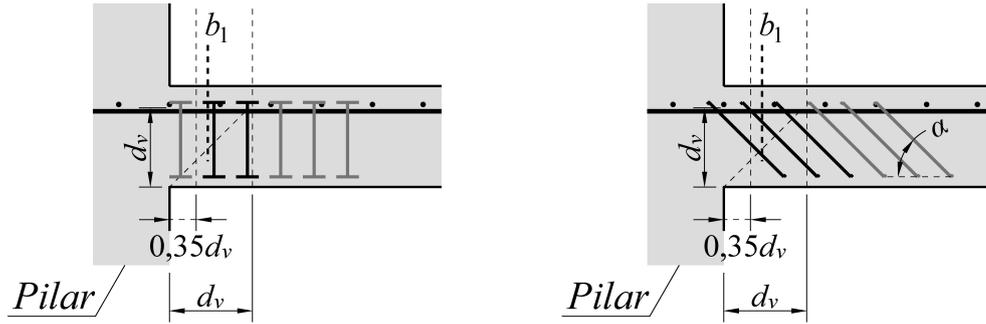


Figura 3.56 – Armaduras de punção ativadas na falha [modificado – *fib* MODEL CODE:2010]

$\sigma_{swd}$  é a tensão ativada nas armaduras de punção, calculada por:

$$\sigma_{swd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{sw} \cdot \Psi_{d,1}}{6} (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) \left( \text{sen} \alpha + \frac{f_{bk} \gamma_s d}{f_{yk} \gamma_c \varphi_w} \right) \\ \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \end{array} \right. \quad \text{Equação 3.157}$$

Onde  $E_{sw}$  é o módulo de elasticidade do aço das armaduras de punção,  $\varphi_w$  é o diâmetro,  $f_{yk}$  é a sua tensão de escoamento e  $f_{bk}$  é a sua tensão de aderência ao concreto, sendo esta última calculada conforme prescrito no item 6.1.3.2 do *fib* MODEL CODE:2010 como:

$$f_{bk} = 2,0 \cdot \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \sqrt{f_{ck} / 25} \quad \text{Equação 3.158}$$

Para as armaduras de punção comumente utilizadas, com ranhuras, boa condição de aderência, diâmetro menor que 25 mm e  $f_{yk} \approx 500$  MPa, são adotados  $\eta_1 = 1,75$ ;  $\eta_2 = 1,00$ ;  $\eta_3 = 1,00$  e  $\eta_4 = 1,00$ .

O código modelo observa que, se adotadas armaduras de punção, estas devem respeitar uma quantidade mínima a fim de garantir suficiente capacidade de deformação à laje. Para tal, deve-se satisfazer a inequação:

$$\left( \sum A_{sw} \right) k_{e,1} \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \geq 0,5 \cdot F_{Sd} \quad \text{Equação 3.159}$$

Tomando  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  iguais a 1 em vez de 1,5 e 1,15; e  $\psi_{k,1}$  em vez de  $\psi_{d,1}$  na Equação 3.157, obtém-se a tensão característica  $\sigma_{swk}$ . Então, na Equação 3.156, mantendo  $\gamma_c$  igual a 1 e tomando os valores característicos  $k_{\psi,k,1}$  e  $\sigma_{swk}$ , obtém-se a carga  $V_{Rk,cs}$ .

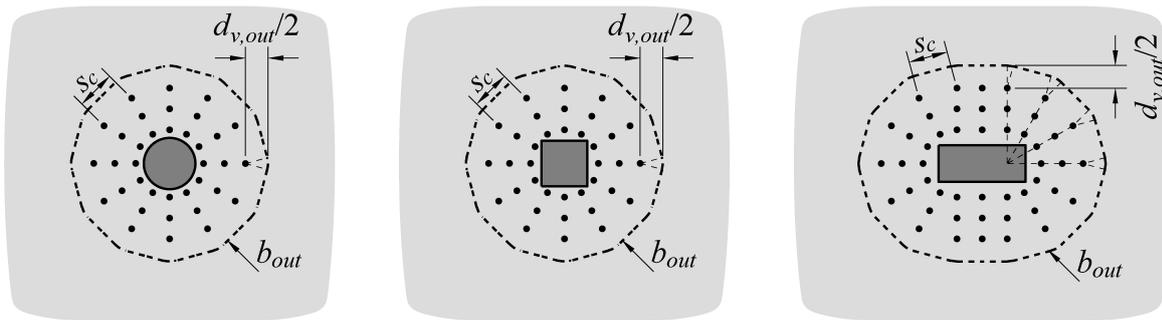
### 3.4.5. RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DIAGONAL NA REGIÃO EXTERNA ÀS ARMADURAS DE PUNÇÃO

Quando adotadas armaduras de punção, o item 7.3.5.5 estabelece que estas devem ser dispostas de maneira que, no perímetro crítico externo  $b_{out}$ , apenas o concreto seja suficiente para resistir ao cisalhamento. As Figuras 3.57 e 3.59 exemplificam o traçado do perímetro crítico externo, afastado  $0,5d_{v,out}$  da última camada de armaduras de punção. Quando o espaçamento circunferencial  $s_c$  na camada mais externa de armaduras for maior que  $3d_{v,out}$ , o perímetro crítico externo deve ser descontínuo.

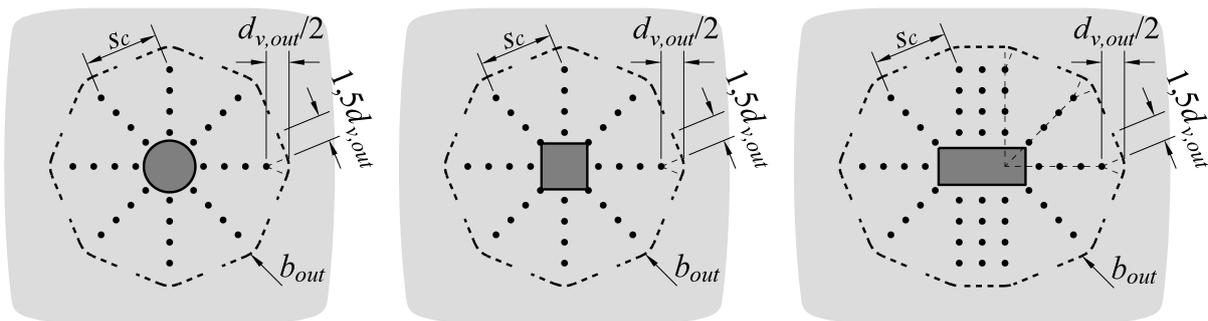
A carga resistente é dada por:

$$V_{Rd,out} = k_{\psi,d,out} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_{0,out} \cdot d_{v,out} \quad \text{Equação 3.160}$$

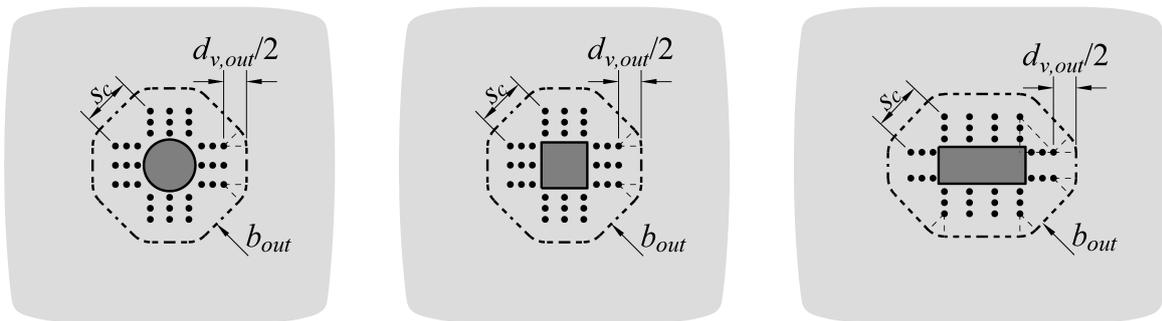
Tomando  $\gamma_c$  igual a 1 em vez de 1,5; e  $k_{\psi,k,1}$  em vez de  $k_{\psi,d,1}$  na Equação 3.160, obtém-se a carga  $V_{Rk,out}$ .



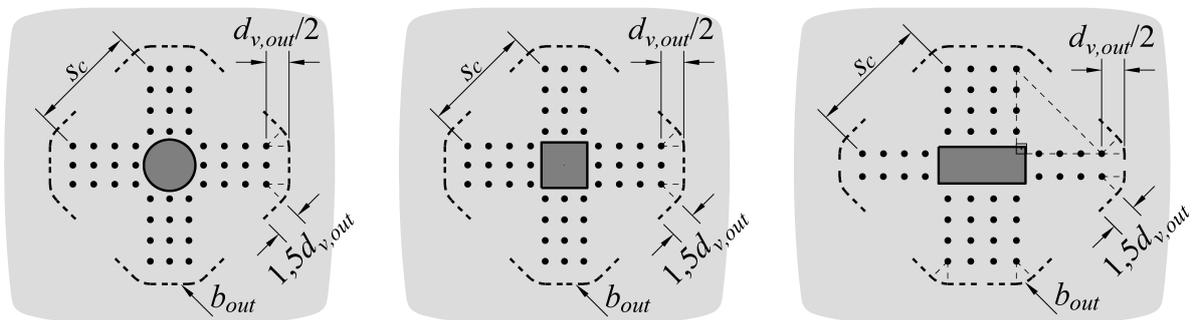
a)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$



b)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 3d_{v,out}$

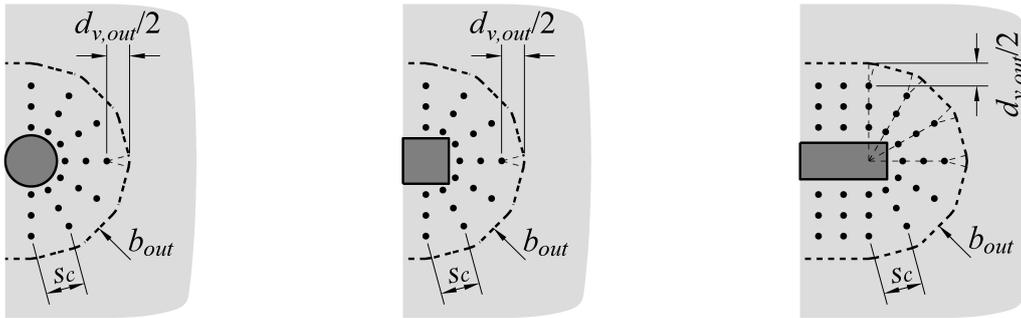


c)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$

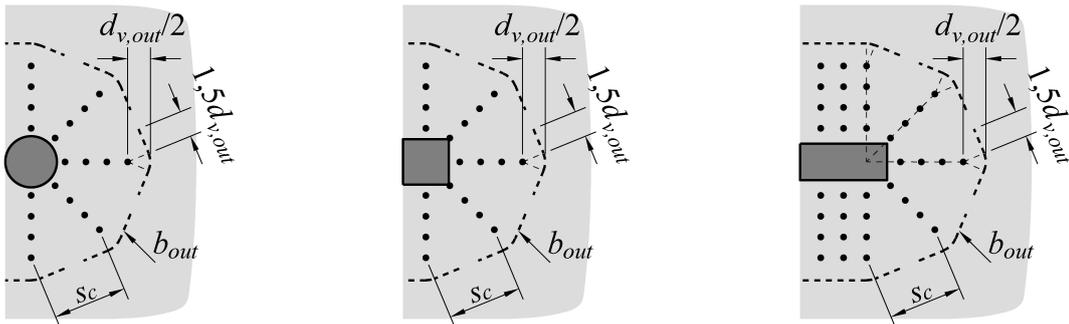


d)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 3d_{v,out}$

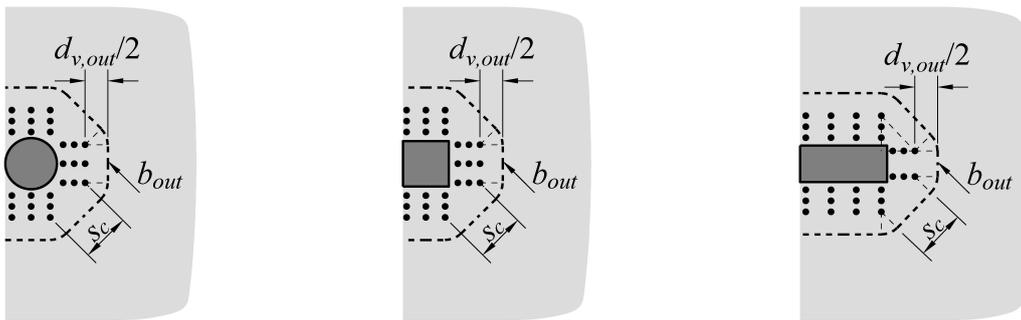
Figura 3.57 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar internas  
[modificado – fib MODEL CODE:2010]



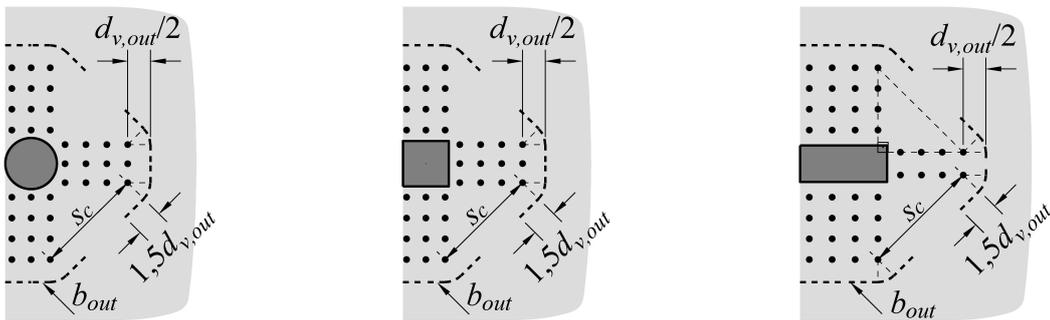
a)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$



b)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 3d_{v,out}$

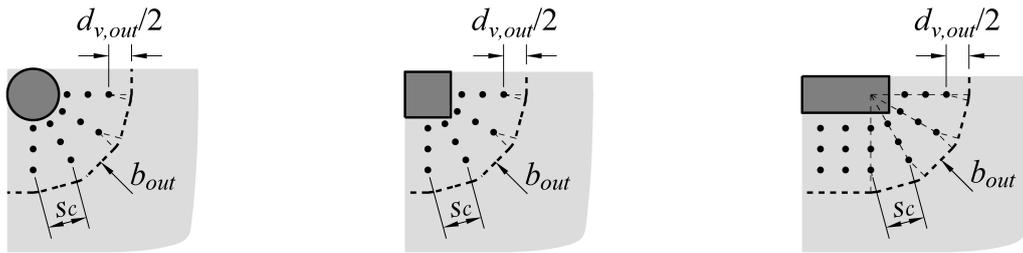


c)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$

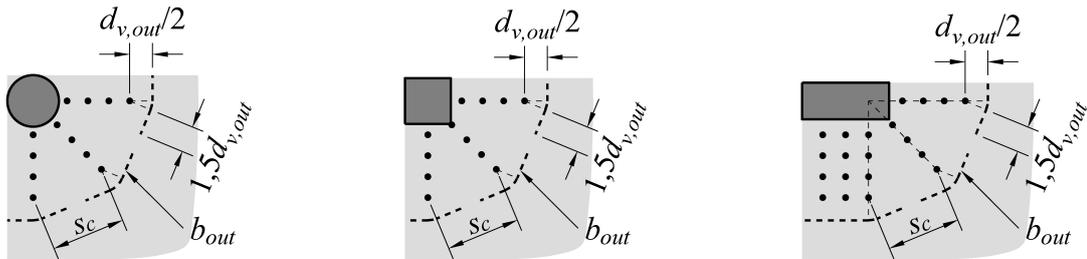


d)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 3d_{v,out}$

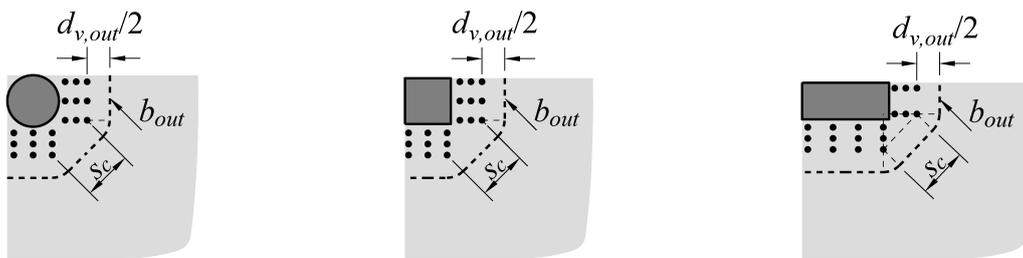
Figura 3.58 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar de borda  
[modificado – fib MODEL CODE:2010]



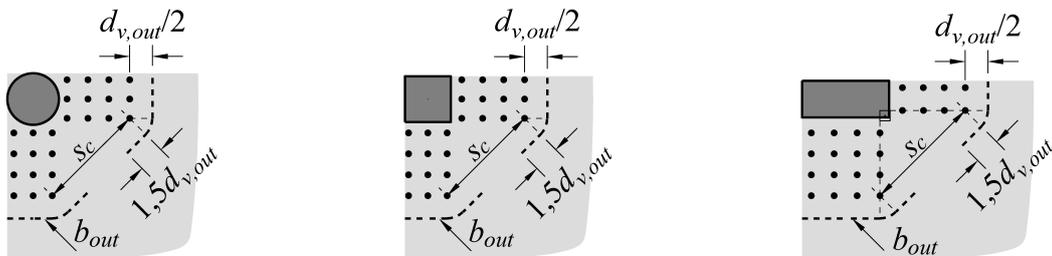
a)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$



b)  $b_{out}$  para armaduras dispostas radialmente e com  $s_c > 3d_{v,out}$



c)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c \leq 3d_{v,out}$



d)  $b_{out}$  para armaduras dispostas em cruz e com  $s_c > 3d_{v,out}$

Figura 3.59 – Perímetro crítico  $b_{out}$  para ligações laje-pilar de canto  
[modificado – fib MODEL CODE:2010]

### 3.4.6. PROTENSÃO

Quando há armaduras protendidas na laje, o seu efeito é considerado pelo *fib* MODEL CODE:2010 de duas formas:

1) A compressão no plano da laje se opõe à abertura da fissura crítica. Assim, as estimativas da rotação  $\psi$ , dadas na Seção 3.4.1, devem ser substituídas para os níveis de aproximação II e III por:

$$\psi_{II,d,i} = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} \left( \frac{m_{sd,i} - m_{P,i}}{m_{Rd} - m_{P,i}} \right)^{1,5} \quad \text{Equação 3.161}$$

$$\psi_{III,d,i} = 1,2 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} \left( \frac{m_{sd,i} - m_{P,i}}{m_{Rd} - m_{P,i}} \right)^{1,5} \quad \text{Equação 3.162}$$

Onde  $m_{P,i}$  é o momento médio de descompressão na largura da faixa  $b_s$  devido à protensão. Para o nível I de aproximação de  $\psi$ , não há interferência da protensão. O *fib* MODEL CODE:2010 não fornece uma expressão para o cálculo de  $m_{P,i}$ . Neste texto será considerado o momento isostático da protensão, ou seja:

$$m_{P,i} = \frac{N_{Pk,i} \cdot e_{P,i}}{b_s} \quad \text{Equação 3.163}$$

Onde  $N_{Pk,i}$  é a soma da força normal devido as  $j$  cordoalhas:

$$N_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \quad \text{Equação 3.164}$$

Sendo  $F_{Pk,j}$  a força na cordoalha de protensão  $j$  a cada interseção da cordoalha com o perímetro  $b_i$ , em “Newton”, e já descontadas as perdas imediatas e diferidas.

E  $e_{P,i}$  é a excentricidade da força  $N_{Pk,i}$  em relação ao centro geométrico da seção, tomada na posição onde os cabos interceptam o perímetro  $b_i$ .

2) Ao se aproximar dos pilares, as cordoalhas de protensão geralmente se inclinam para cima, o que gera na ligação laje-pilar uma força cortante  $V_{Pk,i}$  dirigida de baixo para cima igual a:

$$V_{Pk,i} = \sum_j F_{Pk,j} \cdot \text{sen} \alpha_j \quad \text{Equação 3.165}$$

Onde  $\alpha_j$  é a inclinação da cordoalha de protensão em relação ao plano da laje, tomada na interseção com o perímetro crítico  $b_i$ .

Esta força alivia a força solicitante  $F_{Sd}$  na ligação laje-pilar. A segurança estrutural será garantida se:

$$F_{Sd} - V_{Pk,i} \leq V_{Rd} \quad \text{Equação 3.166}$$

Entretanto, é mais conveniente somar  $V_{Pk,i}$  à força resistente do que subtraí-la da força solicitante, o que não altera a Equação 3.166.

Note que tanto em situação de projeto como experimental, são considerados valores característicos da protensão, pois o coeficiente de majoração das ações devidas à protensão,  $\gamma_p$ , vale 1,0, segundo item 4.5.2.2.4 do código modelo.

### 3.4.7. VERIFICAÇÕES

Pode-se notar das expressões das cargas de resistência,  $V_{Rd}$ , que estas dependem de  $k_{\psi,d,i}$ , que por sua vez depende de  $\psi_{d,i}$ . Se  $\psi_{d,i}$  é calculado pelos níveis de aproximação II ou III, então este dependerá de  $m_{sd,i}$  e, portanto, das solicitações  $F_{Sd}$ ,  $M_{Sd,y}$  e  $M_{Sd,x}$ . Ou seja, o cálculo da resistência pelo *fib* MODEL CODE:2010 depende da própria carga solicitante. Matematicamente, pode-se dizer que a carga resistente  $V_{Rd}$  é função da carga solicitante  $F_{Sd}$ .

Mesmo quando  $\psi_{d,i}$  é calculado pelo nível I de aproximação,  $V_{Rd}$  ainda depende de  $b_{0,i}$ , que por sua vez depende de  $k_{e,i}$ , de  $e_{u,i}$  e, finalmente, de  $F_{Sd}$ ,  $M_{Sd,y}$  e  $M_{Sd,x}$ . Novamente observa-se que a carga resistente  $V_{Rd}$  é função da carga solicitante  $F_{Sd}$ , neste caso, uma função constante.

Em situações de projeto, o engenheiro conhece as cargas solicitantes de projeto através da análise estrutural. Então, pode calcular todos os parâmetros mencionados, obtendo um resultado para cada carga resistente,  $V_{Rd,max}$ ,  $V_{Rd,c}$ ,  $V_{Rd,cs}$  e  $V_{Rd,out}$ . A segurança estrutural

para lajes sem armaduras de punção será garantida se a Equação 3.167(a) for satisfeita, e quando há armaduras de punção, deve-se satisfazer a Equação 3.167(b):

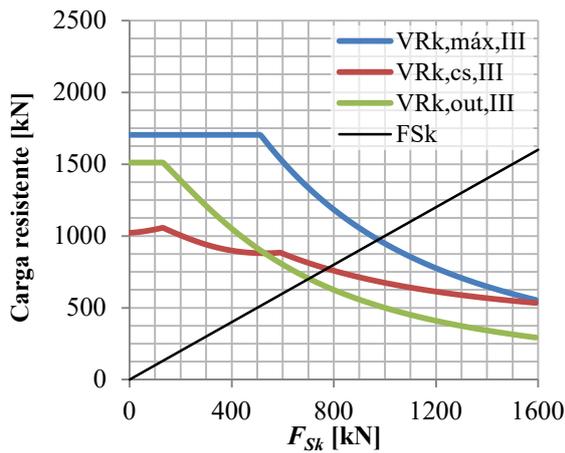
$$F_{Sd} \leq \begin{cases} V_{Rd,máx} + V_{Pk,1} \\ V_{Rd,c} + V_{Pk,1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.167(a) \end{array}$$

$$F_{Sd} \leq \begin{cases} V_{Rd,máx} + V_{Pk,1} \\ V_{Rd,cs} + V_{Pk,1} \\ V_{Rd,out} + V_{Pk,out} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ 3.167(b) \end{array}$$

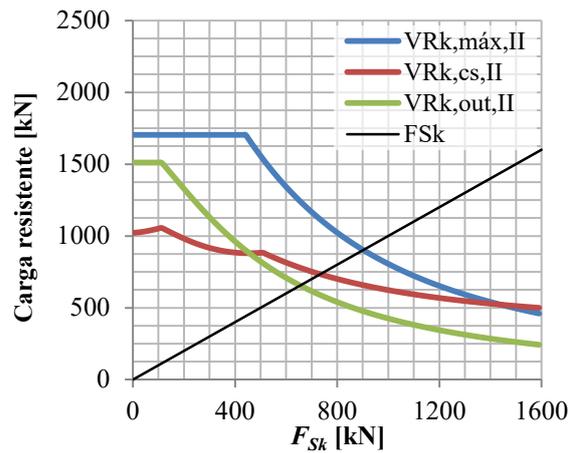
Em situações experimentais, o pesquisador não conhece a carga de ruptura da laje antes de realizar o experimento, mas precisa estimá-la. Neste caso, o processo de cálculo pelo *fib* MODEL CODE:2010 deverá ser iterativo:

Partindo da conclusão previamente discutida de que a carga resistente é função da carga solicitante, pode-se arbitrar algum valor inicial para a carga solicitante  $F_{Sk}$ ; então, de posse do valor de  $F_{Sk}$  e das excentricidades definidas pelo pesquisador e aplicadas ao modelo a ser ensaiado, pode-se prosseguir com o cálculo de  $k_{e,i}$  e da rotação da laje pelo nível de aproximação desejado. Assim é possível determinar uma carga resistente  $V_{Rk}$  e comparar com a solicitação  $F_{Sk}$  inicialmente arbitrada: se  $F_{Sk} < V_{Rk} + V_{Pk,i}$  a laje ainda não atinge a ruptura para aquele valor arbitrado de  $F_{Sk}$ . Então adiciona-se um incremento à  $F_{Sk}$  e repete-se o processo de forma iterativa até que  $F_{Sk} = V_{Rk} + V_{Pk,i}$ , quando a laje deve romper segundo este modelo de cálculo.

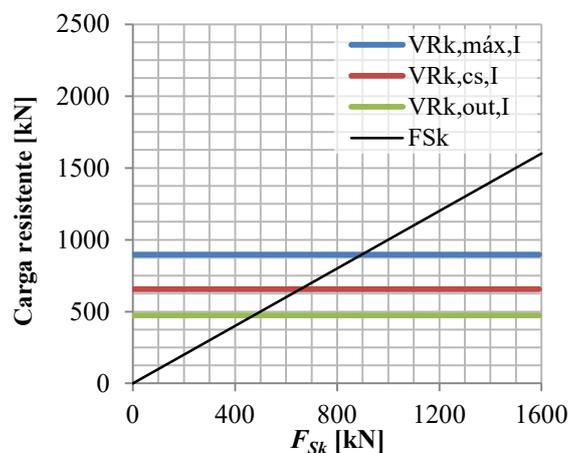
Graficamente, pode-se plotar as cargas resistentes em função da carga solicitante para cada nível de aproximação de  $\psi_{k,i}$ , como exemplificado na Figura 3.60 para uma ligação laje-pilar sem protensão. Verifica-se a carga na qual as curvas de resistência interceptam a reta de solicitações, determinando a carga de ruptura por cada modo de ruptura. Das três interseções a que ocorre com a menor carga solicitante é determinante para a ruptura da laje segundo este modelo de cálculo.



a) Nível III de aproximação:  $\psi_{III,k,i}$



b) Nível II de aproximação:  $\psi_{II,k,i}$



c) Nível I de aproximação:  $\psi_{I,k,i}$

Figura 3.60 – Verificação gráfica da carga característica de ruptura

### 3.4.8. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS PERÍMETROS CRÍTICOS

Do item 7.3.5.2 do código modelo, na ocasião em que há aberturas na laje distando menos de  $5d_v$  do perímetro crítico básico  $b_1$ , ou  $5d_{v,out}$  do perímetro crítico básico  $b_{out}$  o código modelo prescreve que o trecho compreendido entre os dois segmentos de reta que tangenciam a abertura da laje e se interceptam no centro geométrico do pilar deve ser desconsiderado do perímetro crítico básico, a exemplo da Figura 3.61.

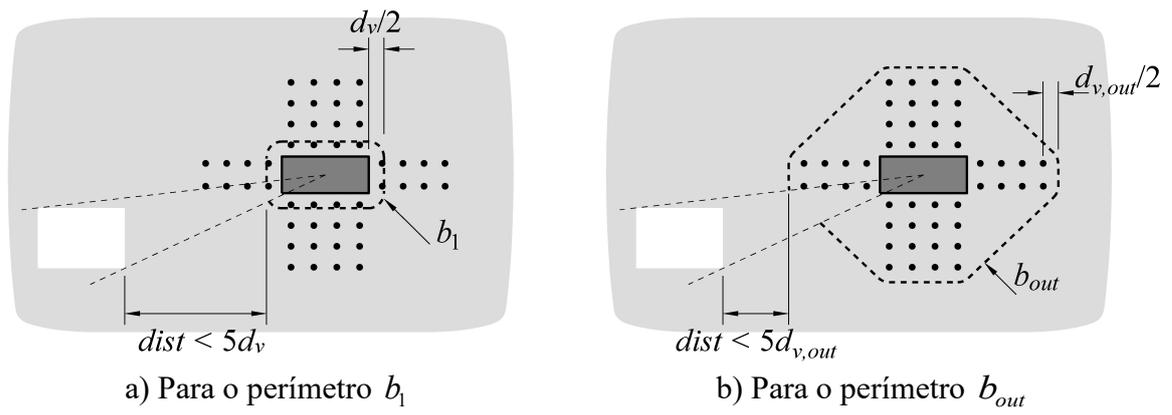


Figura 3.61 – Perímetros críticos caso haja abertura na laje

## 4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para exemplificar as verificações de projeto de cada norma, uma edificação em laje lisa foi modelada no software SAP2000 a fim de obter os esforços nas ligações laje-pilar, cujo dimensionamento será exemplificado em detalhes. A Figura 4.1 mostra o modelo do edifício.

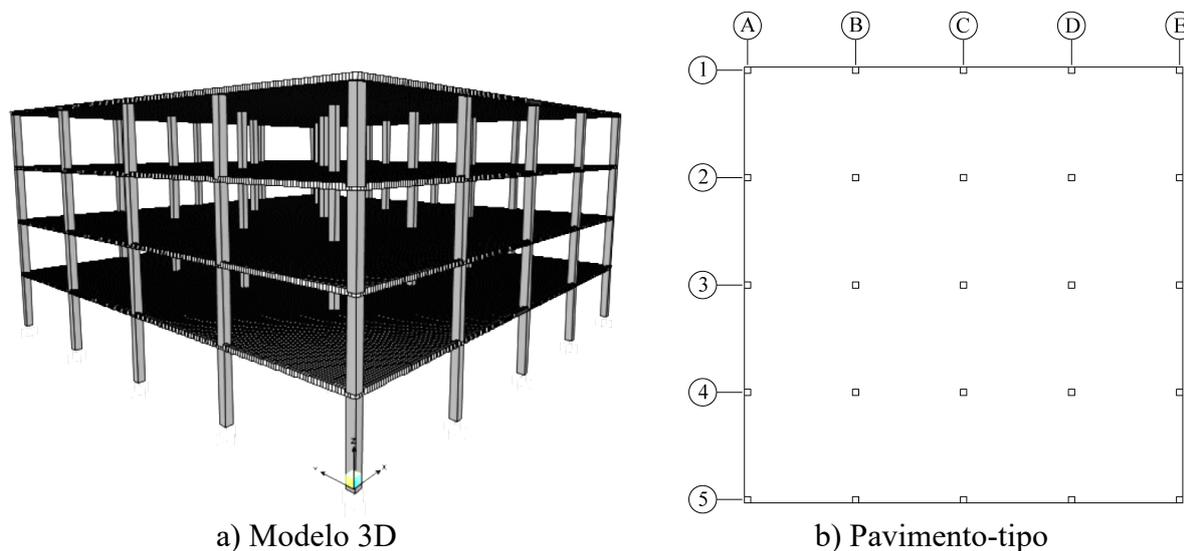


Figura 4.1 – Modelo do edifício no software SAP2000

- Vãos de 6,00 m e pé-direito de 3,00 m;
- Espessura da laje de 0,20 m, modelada em elementos tipo *shell* (0,12×0,12m) e (0,175×0,12m) no contorno do pavimento.
- Seção dos pilares de 0,35 m por 0,35 m, modelados com elementos tipo *frame*;
- Sobrecarga de 4,5 kN/m<sup>2</sup> (valor característico);
- Coeficiente de majoração das cargas permanentes e acidentais igual a 1,4.
- $f_{ck} = 35$  MPa, com  $E_c = 28.160.540$  kPa. Toda a armação será em aço CA-50.

As coordenadas globais do SAP2000 serão denominadas neste texto por  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , a fim de diferenciá-las das coordenadas locais definidas na Figura 3.3 para cálculo à punção. As numerações dos pilares e alinhamentos dos vãos serão denominadas pelas letras e números definidos na Figura 4.1(b). Realizado o processo de cálculo do SAP2000, já com cargas majoradas, as deformações no segundo pavimento, que será o modelo de pavimento-tipo para este projeto, podem ser conferidas na Figura 4.2. A flecha máxima obtida foi de 0,012 m.

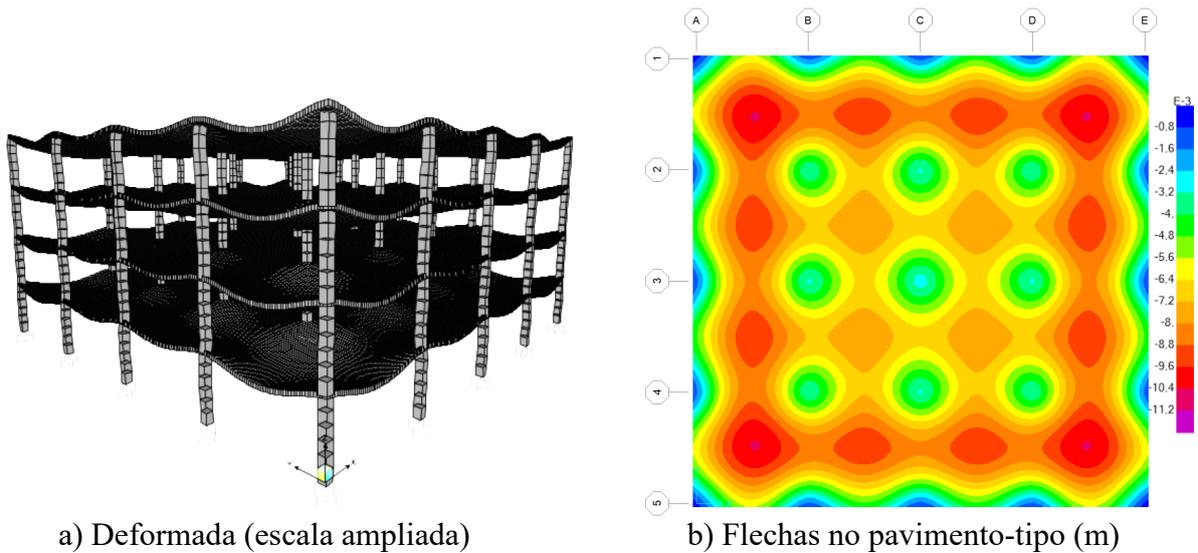


Figura 4.2 – Deformações de projeto no pavimento-tipo

Os mapeamentos dos esforços de flexão e cortantes por unidade de largura podem ser conferidos na Figura 4.3. A figura ilustra os esforços calculados para faixas ao longo da direção  $\bar{x}$ . Pela simetria do edifício, os gráficos para a direção  $\bar{y}$  seriam iguais, porém rotacionados em  $90^\circ$ .

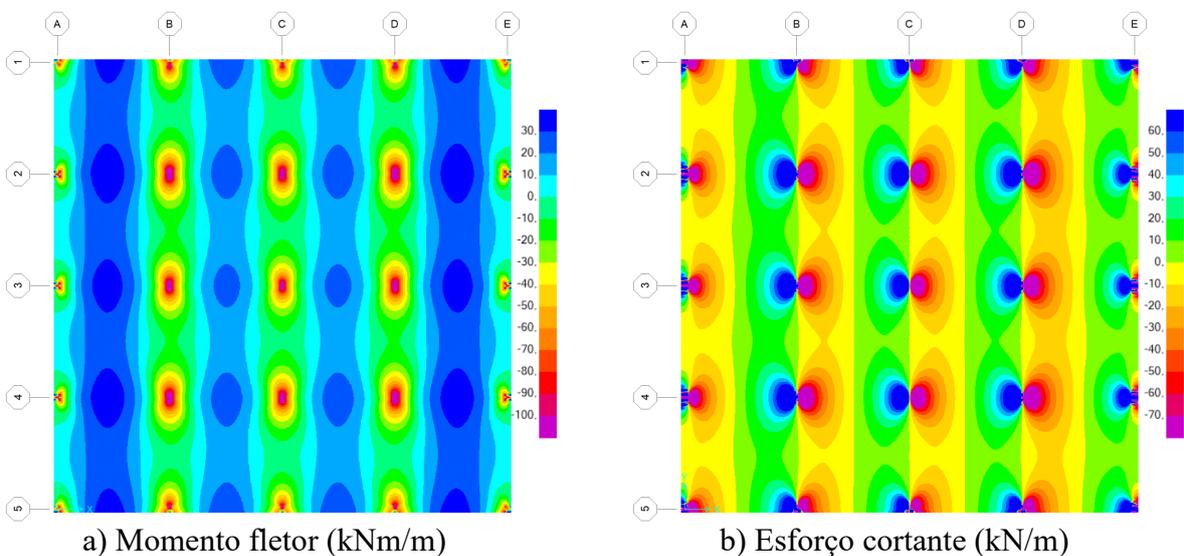
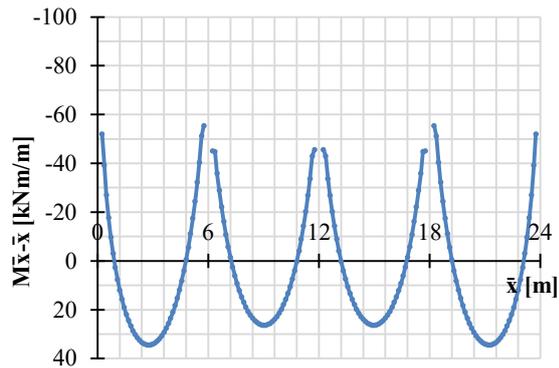
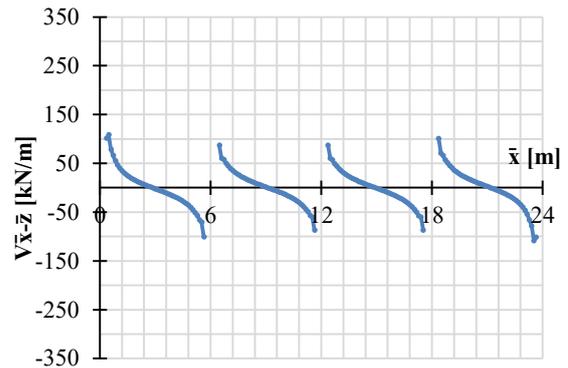


Figura 4.3 – Mapeamento dos esforços de projeto no pavimento-tipo ao longo da direção  $\bar{x}$

A partir dos valores obtidos nos elementos finitos ao longo dos alinhamentos 1, 2 e 3, podem ser plotados diagramas dos esforços, como mostrados da Figura 4.4 à 4.6.

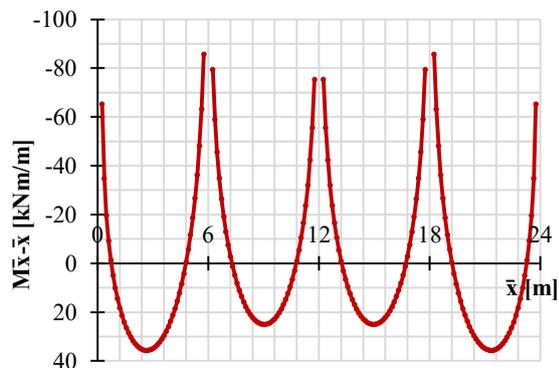


a) Momento fletor

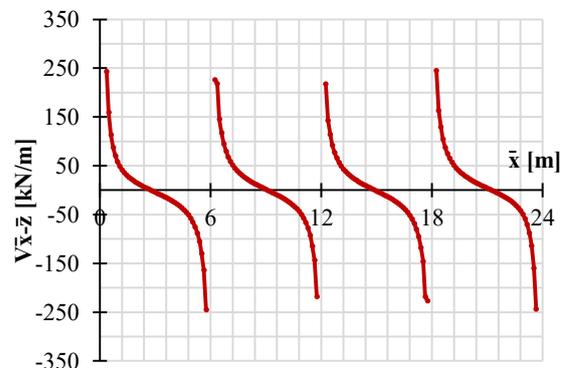


b) Esforço cortante

Figura 4.4 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 1

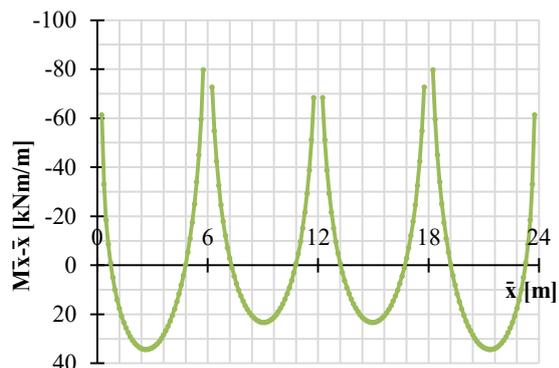


a) Momento fletor

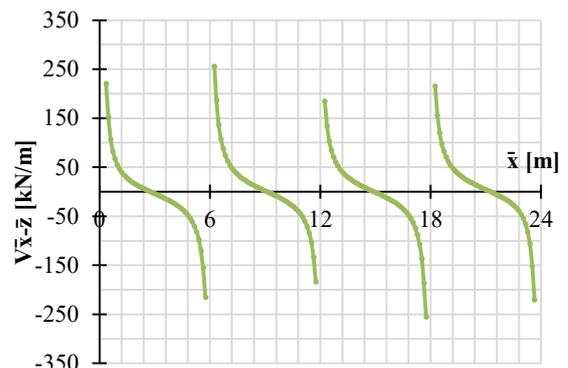


b) Esforço cortante

Figura 4.5 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 2



a) Momento fletor



b) Esforço cortante

Figura 4.6 – Diagramas de esforços de projeto ao longo do alinhamento 3

Os esforços nos pilares podem ser vistos graficamente na Figura 4.7, e os valores obtidos pelo software nos tramos em que o pilar se liga à laje constam na Tabela 4.1.

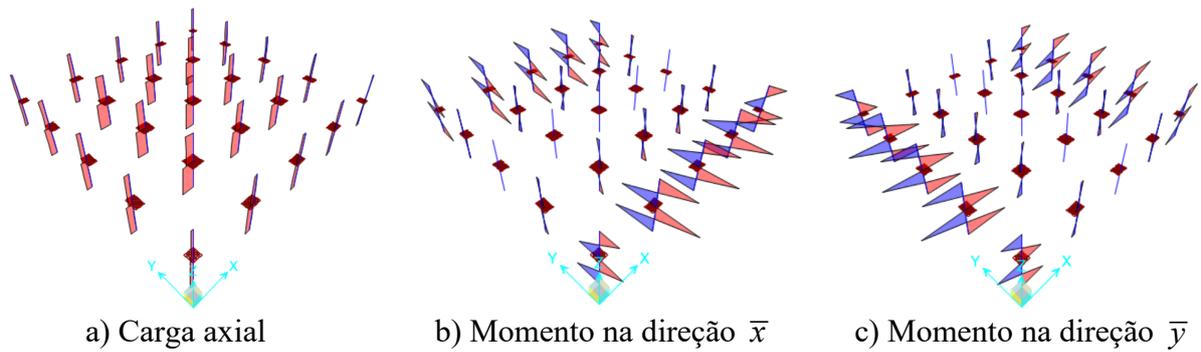


Figura 4.7 – Esforços de projeto nos pilares

Tabela 4.1 – Esforços de projeto nos pilares e esforços transferidos da laje ao pilar

Pilar	Esforços no tramo de pilar inferior à laje (kN e kNm)		Esforços no tramo de pilar superior à laje (kN e kNm)		Esforços transferidos da laje ao pilar (kN e kNm)	
	$F_{Sd,\bar{z},inf}$		$F_{Sd,\bar{z},sup}$		$F_{Sd,\bar{z}}$	
A1	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	358,5	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-247,2	$F_{Sd,\bar{z}}$	-111,3
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	-29,9	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	-26,4	$M_{Sd,\bar{x}}$	56,3
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	-29,9	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	-26,4	$M_{Sd,\bar{y}}$	56,3
A2	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	740,4	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-502,3	$F_{Sd,\bar{z}}$	-238,1
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	4,1	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	3,2	$M_{Sd,\bar{x}}$	-7,3
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	-53,2	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	-48,0	$M_{Sd,\bar{y}}$	101,2
A3	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	691,5	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-469,6	$F_{Sd,\bar{z}}$	-221,9
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x}}$	0
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	-50,5	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	-45,8	$M_{Sd,\bar{y}}$	96,3
B2	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	1648,7	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-1106,7	$F_{Sd,\bar{z}}$	-542,0
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	6,0	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	4,6	$M_{Sd,\bar{x}}$	-10,6
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	6,0	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	4,6	$M_{Sd,\bar{y}}$	-10,6
B3	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	1540,4	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-1036,1	$F_{Sd,\bar{z}}$	-504,3
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x}}$	0
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	6,5	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	5,0	$M_{Sd,\bar{y}}$	-11,5
C3	$F_{Sd,\bar{z},inf}$	1421,5	$F_{Sd,\bar{z},sup}$	-957,9	$F_{Sd,\bar{z}}$	-463,6
	$M_{Sd,\bar{x},inf}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x},sup}$	0,0	$M_{Sd,\bar{x}}$	0
	$M_{Sd,\bar{y},inf}$	0,0	$M_{Sd,\bar{y},sup}$	0,0	$M_{Sd,\bar{y}}$	0

Na Tabela 4.1, todos os esforços seguem o referencial global do SAP2000. A Figura 4.8 esclarece tal referencial. Com base na figura, os esforços solicitantes transferidos da laje ao pilar neste referencial, podem ser calculados pelo equilíbrio do nó pilar-laje-pilar.

$$F_{Sd,\bar{z}} = -(F_{Sd,\bar{z},inf} + F_{Sd,\bar{z},sup}) \quad \text{Equação 4.1}$$

$$M_{Sd,\bar{x}} = -(M_{Sd,\bar{x},inf} + M_{Sd,\bar{x},sup}) \quad \text{Equação 4.2}$$

$$M_{Sd,\bar{y}} = -(M_{Sd,\bar{y},inf} + M_{Sd,\bar{y},sup}) \quad \text{Equação 4.3}$$

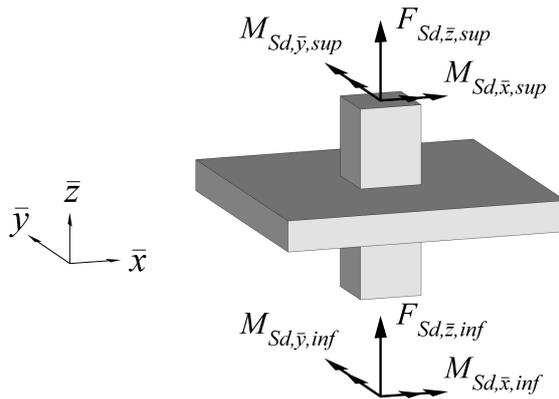


Figura 4.8 – Esforços nos tramos de pilar no referencial global do SAP2000

Finalmente, os esforços podem ser transcritos para os referenciais locais definidos na Figura 3.3 para cálculo à punção. Além disso, as unidades das cargas serão trabalhadas em Newton, e dos momentos em “N·mm”, como resumido na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Esforços transferidos da laje para o pilar

Laje-pilar	C3	B3	B2	A3	A2	A1
Situação	Interno	Interno	Interno	Borda	Borda	Canto
$F_{Sd}$ (N)	$463,6 \times 10^3$	$504,3 \times 10^3$	$542,0 \times 10^3$	$221,9 \times 10^3$	$238,1 \times 10^3$	$111,3 \times 10^3$
$M_{Sd,x}$ (N·mm)	0	0	$-10,6 \times 10^6$	0	$-7,3 \times 10^6$	$56,3 \times 10^6$
$M_{Sd,y}$ (N·mm)	0	$-11,5 \times 10^6$	$-10,6 \times 10^6$	96,3	$101,2 \times 10^6$	$56,3 \times 10^6$

Para proceder com os cálculos à punção, é preciso antes dimensionar o pavimento à flexão para obter a taxa de armadura de flexão tracionada,  $\rho$ , nas regiões de ligações laje-pilar. Então, com base nos gráficos da Figura 4.4 à 4.6, bem como o da Figura 4.3(a) são estudados os momentos fletores por largura unitária de laje que requerem o seguinte dimensionamento resumido na Figura 4.9.

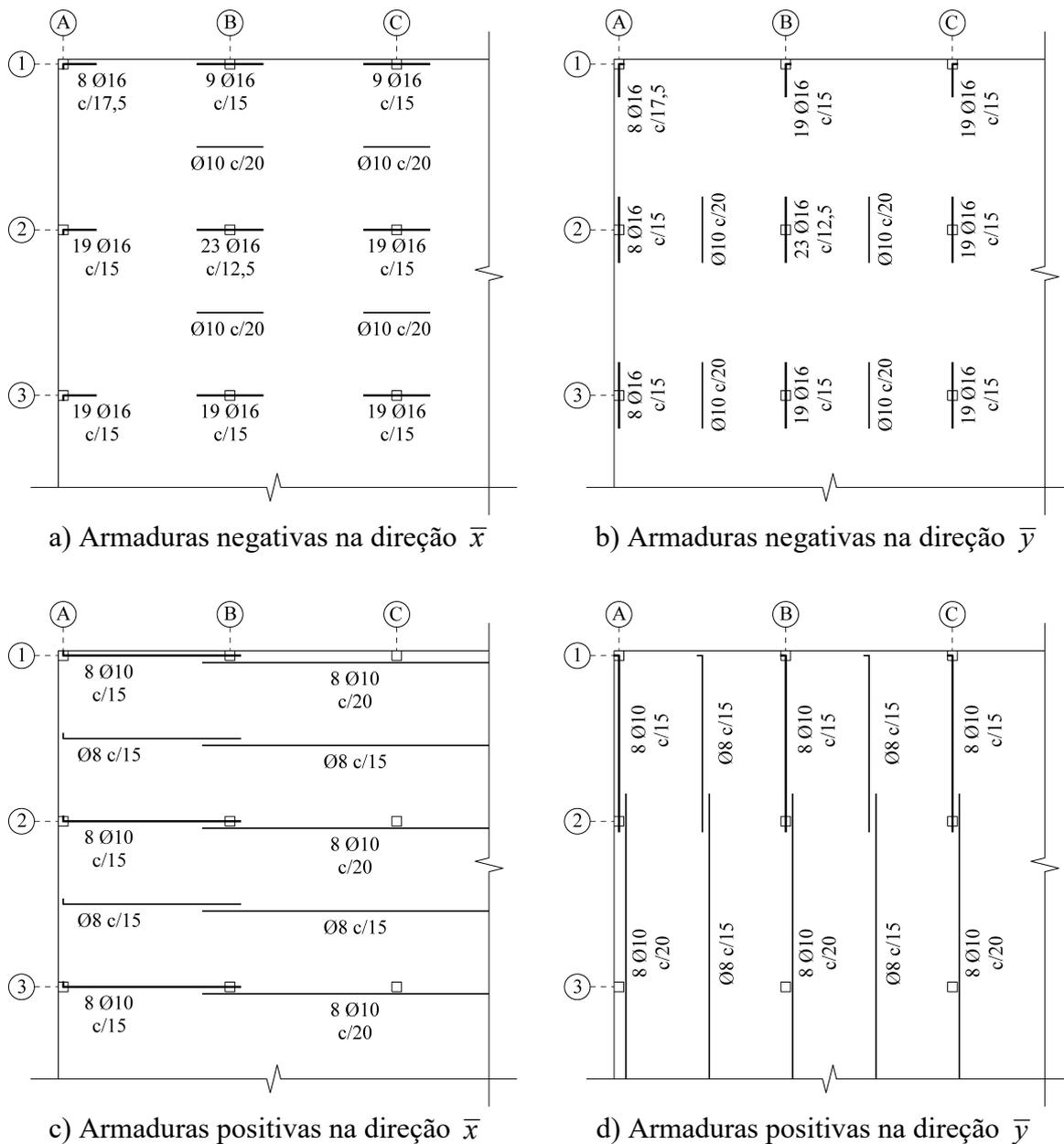


Figura 4.9 – Armaduras de flexão do pavimento

Portanto nas regiões de ligações laje-pilar serão utilizadas barras de 16 mm de diâmetro com cobrimento de 25 mm. Pelas Equações 3.1 e 3.2 podem ser calculadas a altura útil e a taxa de armadura de flexão tracionada em cada ligação laje-pilar, resultando nos valores da Tabela 4.3. A tabela também mostra o momento resistente calculado para o dimensionamento adotado nas regiões de ligação laje-pilar, calculado pela Equação 3.141.

Tabela 4.3 – Parâmetros para cálculo de  $d$  e  $\rho$

Laje-pilar	C3	B3	B2	A3	A2	A1
$d_x$ (mm)	167	167	167	167	167	167
$d_y$ (mm)	151	151	151	151	151	151
$b_{w,x}$ (mm)	150	150	125	150	150	175
$b_{w,y}$ (mm)	150	150	125	150	150	175
$A_{s,x}$ (mm <sup>2</sup> )	201	201	201	201	201	201
$A_{s,y}$ (mm <sup>2</sup> )	201	201	201	201	201	201
$\rho_x$ ( )	0,0080	0,0080	0,0096	0,0080	0,0080	0,0069
$\rho_y$ ( )	0,0089	0,0089	0,0107	0,0089	0,0089	0,0076
$d$ (mm)	159	159	159	159	159	159
$\rho$ ( )	0,0084	0,0084	0,0101	0,0084	0,0084	0,0072
$m_{Rd}$ (N·mm/mm)	84.769	84.769	99.800	84.769	84.769	73.640

Portanto, na Tabela 4.4 estão resumidas as características necessárias para o dimensionamento de cada ligação laje-pilar à punção.

Tabela 4.4 – Características gerais de cada ligação laje-pilar

Laje-pilar	C3	B3	B2	A3	A2	A1
Situação	Interno	Interno	Interno	Borda	Borda	Canto
$F_{Sd}$ (N)	$463,6 \times 10^3$	$504,3 \times 10^3$	$542,0 \times 10^3$	$221,9 \times 10^3$	$238,1 \times 10^3$	$111,3 \times 10^3$
$M_{Sd,x}$ (N·mm)	0	0	$-10,6 \times 10^6$	0	$-7,3 \times 10^6$	$56,3 \times 10^6$
$M_{Sd,y}$ (N·mm)	0	$-11,5 \times 10^6$	$-10,6 \times 10^6$	96,3	$101,2 \times 10^6$	$56,3 \times 10^6$
$f_{ck}$ (MPa)	35	35	35	35	35	35
$\rho$ (adimensional)	0,0084	0,0084	0,0101	0,0084	0,0084	0,0072
$d$ (mm)	159	159	159	159	159	159
$h$ (mm)	200	200	200	200	200	200

O dimensionamento das ligações laje-pilar B2, A2 e A1, que são as mais solicitadas de cada tipo – interna, de borda ou de canto – será exemplificado nas próximas seções pela NBR 6118:2014, pelo EUROCODE 2:2004, pelo ACI 318:2014 e pelo *fib* MODEL CODE:2010.

## 4.1. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELA NBR 6118:2014

### 4.1.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2

Com auxílio da Figura 4.10(a), calcula-se:

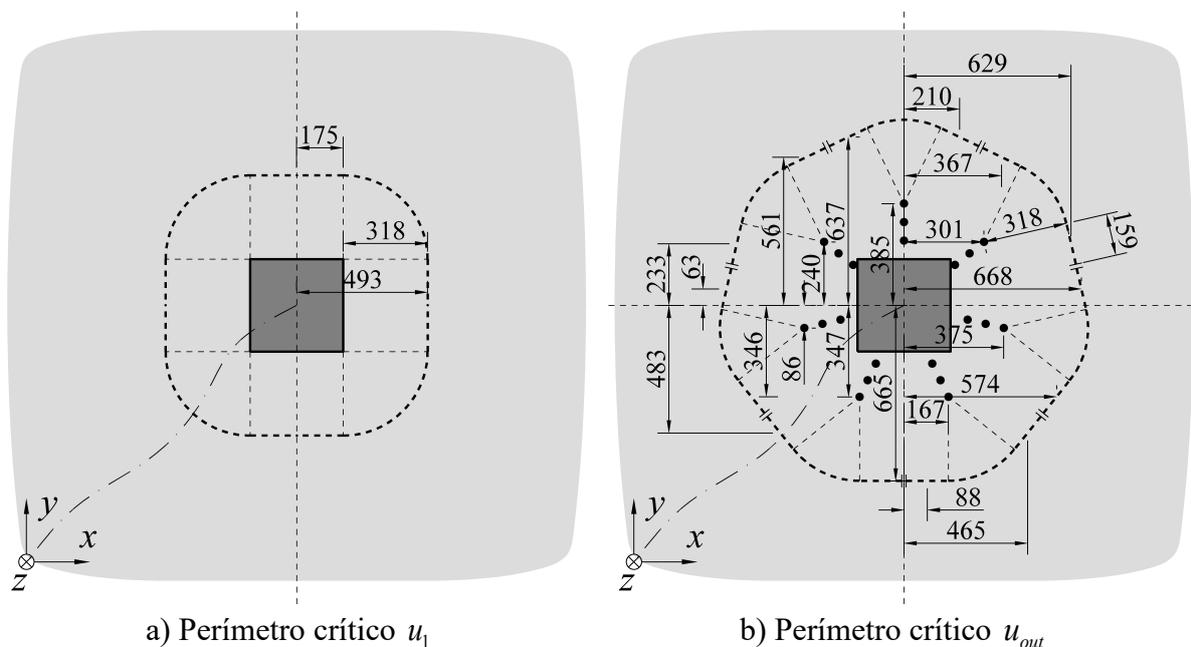


Figura 4.10 – Perímetros críticos para a ligação B2 pela NBR 6118:2014

$$u_0 = 8 \cdot 175 = 1.400 \text{ mm.}$$

$$u_1 = 8 \cdot 175 + 2\pi \cdot 318 = 3.398 \text{ mm.}$$

Os cálculos de  $W_{0,y}$  e  $W_{1,y}$  são feitos por trechos dos perímetro críticos  $u_0$  e  $u_1$ , com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. As Tabelas 4.5 e 4.6 detalham os cálculos.

Tabela 4.5 – Cálculo de  $W_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_0}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
87,5	0	175	15.312,5
175	0	175	30.625,0
$W_{0,y} = 4 \cdot \sum_{u_0/4} W_{\Delta u} =$			183.750 mm <sup>2</sup>

Tabela 4.6 – Cálculo de  $W_{1,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
175	0	318	0	$\pi / 2$	188.538,8
Trecos $\Delta u$ retos					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
87,5	0	175			15.312,5
493	0	175			86.275,0
$W_{1,y} = 4 \cdot \sum_{u_1/4} W_{\Delta u} =$					1.160.505 mm <sup>2</sup>

Pela bissetria dos perímetros:

$$W_{0,x} = W_{0,y} = 183.750 \text{ mm}^2.$$

$$W_{1,x} = W_{1,y} = 1.160.505 \text{ mm}^2.$$

Da Equação 3.12, com  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_x = k_y = 0,6$ . Então, pela Equação 3.14:

$$\beta_{Sd,0} = 1 + \frac{0,6 \cdot 1400}{183750} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} + \frac{0,6 \cdot 1400}{183750} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} = 1,17881.$$

$$\beta_{Sd,1} = 1 + \frac{0,6 \cdot 3398}{1160505} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} + \frac{0,6 \cdot 3398}{1160505} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} = 1,06872.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.43):

$$V_{Rd,max} = \frac{\left[ \frac{0,27}{1,4} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) \cdot 35 + 0 \right] 1400 \cdot 159}{1,17881} = 1.096.184 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.44):

$$V_{Rd,c} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 3398 \cdot 159}{1,06872} = 457.596 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de

diâmetro, distribuídos em 7 linhas e 3 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.10(b). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.6:

$$A_{sw} = 7 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 352 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min\{345; 500\} = 345 \text{ MPa}.$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.7:

$$1,5 \frac{159}{70} \frac{352 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 3398 \cdot 159} \geq 0,5 \left( \frac{542000}{3398 \cdot 159} \right) \Rightarrow 0,67 \geq 0,50 \Rightarrow \text{OK}.$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.49):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\left[ \frac{0,14}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{352 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 3398 \cdot 159} + 0 + 0 \right] \cdot 3398 \cdot 159}{1,06872} = 688.656 \text{ N}.$$

Com auxílio da Figura 4.10(b), calcula-se:

$$u_{out} = 14 \cdot 159 + 2\pi \cdot 318 = 4.224 \text{ mm}.$$

O cálculo de  $W_{out,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $u_{out}$ , com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. A Tabela 4.7 detalha os cálculos.

Tabela 4.7 – Cálculo de  $W_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trehos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
0	0	318	$5\pi/14$	$7\pi/14$	10.014,4
301	0	318	$\pi/14$	$5\pi/14$	154.523,6
375	0	318	$-3\pi/14$	$\pi/14$	192.590,5
167	0	318	$-7\pi/14$	$-3\pi/14$	85.742,1
Trehos $\Delta u$ retos					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
210	0	159			33.390,0
367	0	159			58.353,0
629	0	159			100.011,0

Continuação da Tabela 4.7

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
668	0	159	106.212,0
574	0	159	91.266,0
465	0	159	73.935,0
88	0	159	13.992,0
$W_{out,y} = 2 \cdot \sum_{u_{out}/2} W_{\Delta u} =$			1.840.059 mm <sup>2</sup>

O cálculo de  $W_{out,x}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.51, 3.53 e 3.58. A Tabela 4.8 detalha os cálculos.

Tabela 4.8 – Cálculo de  $W_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
385	0	318	$5\pi/14$	$7\pi/14$	98.822,5
240	0	318	$\pi/14$	$5\pi/14$	123.217,2
-86	0	318	$-3\pi/14$	$\pi/14$	44.074,2
-347	0	318	$-7\pi/14$	$-3\pi/14$	178.108,3
Trechos $\Delta u$ retos					
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
637	0	159			101.283,0
561	0	159			89.199,0
233	0	159			37.047,0
63	0	159			10.017,0
-346	0	159			55.014,0
-483	0	159			76.797,0
-665	0	159			105.735,0
$W_{out,x} = 2 \cdot \sum_{u_{out}/2} W_{\Delta u} =$					1.838.628 mm <sup>2</sup>

Pela Equação 3.14:

$$\beta_{Sd,out} = 1 + \frac{0,6 \cdot 4224}{1840059} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542000} + \frac{0,6 \cdot 4224}{1838628} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542000} = 1,05390.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção  
(Equação 3.50):

$$V_{Rd,out} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] \cdot 4224 \cdot 159}{1,05390} = 576.829 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

## 4.1.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2

Com auxílio da Figura 4.11(a) e (c), calcula-se:

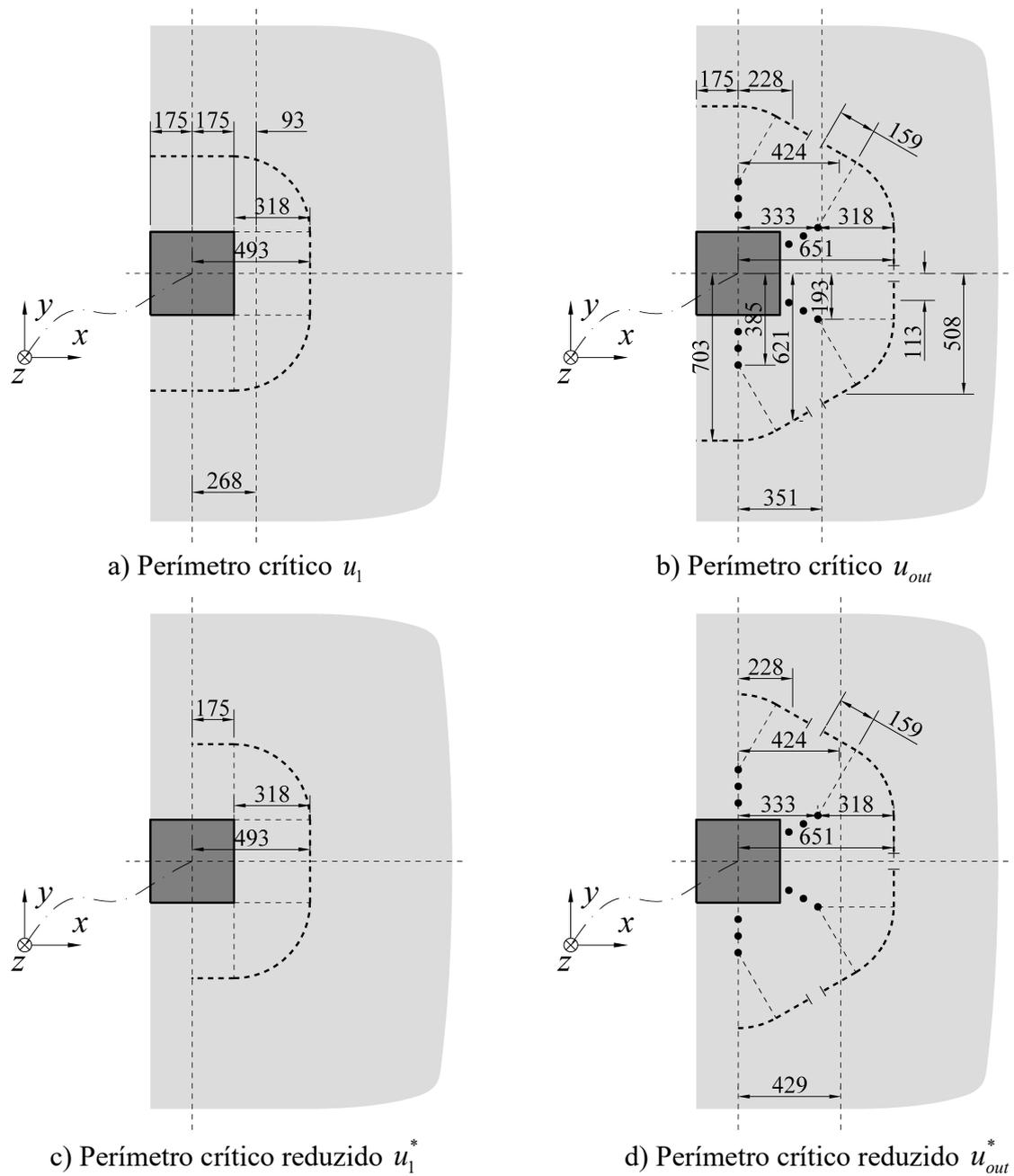


Figura 4.11 – Perímetros críticos para a ligação A2 pela NBR 6118:2014

$$u_0 = 6 \cdot 175 = 1.050 \text{ mm.}$$

$$u_0^* = 4 \cdot 175 = 700 \text{ mm.}$$

$$u_1 = 6 \cdot 175 + \pi 318 = 2.049 \text{ mm.}$$

$$u_1^* = 4 \cdot 175 + \pi 318 = 1.699 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Da Tabela 4.9 à 4.12 constam os cálculos.

Tabela 4.9 – Cálculo de  $x_{cg,u_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos	
$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
350	0
175	175
$x_{cg,u_0} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0} =$	
	58 mm

Tabela 4.10 – Cálculo de  $x_{cg,u_0}^*$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u^*$ retos	
$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175	87,5
175	175
$x_{cg,u_0}^* = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0^*} =$	
	131 mm

Tabela 4.11 – Cálculo de  $x_{cg,u_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
175	318	0	$\pi / 2$	499,5	377,4
Trechos $\Delta u$ retos					
$\Delta u$ (mm)					$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
350					0
175					493
$x_{cg,u_1} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1} =$					268 mm

Tabela 4.12 – Cálculo de  $x_{cg,u_1}^*$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u^*$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175	318	0	$\pi / 2$	499,5	377,4
Trecos $\Delta u^*$ retos					
$\Delta u^*$ (mm)					$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175					87,5
175					493
$x_{cg,u_1}^* = \frac{2 \cdot \sum_{u_1^*/2}^* x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1^*} =$					342 mm

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,u_0} = y_{cg,u_0}^* = y_{cg,u_1} = y_{cg,u_1}^* = 0$  mm.

Os cálculos de  $W_{0,y}$  e  $W_{1,y}$  são feitos por trechos dos perímetro críticos  $u_0$  e  $u_1$ , com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. As Tabelas 4.13 e 4.14 detalham os cálculos.

Tabela 4.13 – Cálculo de  $W_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_0}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
-87,5	58	175	25.462,5
29	58	58	1.682,0
116,5	58	117	6.844,5
175	58	175	20.475,0
$W_{0,y} = 2 \cdot \sum_{u_0/2} W_{\Delta u} =$			108.928 mm <sup>2</sup>

Tabela 4.14 – Cálculo de  $W_{1,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
175	268	318	$\cos^{-1}(93/318)$	$\pi / 2$	4.356,1
175	268	318	0	$\cos^{-1}(93/318)$	59.025,4

Continuação da Tabela 4.14

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
-87,5	268	175	62.212,5
87,5	268	175	31.587,5
493	268	175	39.375,0
$W_{1,y} = 2 \cdot \sum_{u_1/2} W_{\Delta u} =$			393.113 mm <sup>2</sup>

Os cálculos de  $W_{0,x}$  e  $W_{1,x}$  são feitos por trechos dos perímetro críticos  $u_0$  e  $u_1$ , com auxílio das Equações 3.51, 3.53 e 3.58. As Tabelas 4.15 e 4.16 detalham os cálculos.

Tabela 4.15 – Cálculo de  $W_{0,x}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos			
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_1}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
175	0	350	61.250,0
87,5	0	175	15.312,5
$W_{0,x} = 2 \cdot \sum_{u_0/2} W_{\Delta u} =$			153.125 mm <sup>2</sup>

Tabela 4.16 – Cálculo de  $W_{1,x}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_1}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
175	0	318	0	$\pi / 2$	188.538,8
Trechos $\Delta u$ retos					
$y_{médio}$ (mm)	$y_{cg,u_1}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
493	0	350			172.550,0
87,5	0	175			15.312,5
$W_{1,x} = 2 \cdot \sum_{u_1/2} W_{\Delta u} =$					752.803 mm <sup>2</sup>

Pela Equação 3.19:

$$M_{Sd,y,0}^* = 238100 \cdot 131 = 31.191.100 \text{ N}\cdot\text{mm.}$$

$$M_{Sd,y,1}^* = 238100 \cdot 342 = 81.430.200 \text{ N}\cdot\text{mm.}$$

Da Equação 3.12, com  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_y = 0,6$  e  $k_{x,ext} = 0,45$ . Então, pela Equação 3.23:

$$\beta_{Sd,0} = \frac{1050}{700} + \frac{0,6 \cdot 1050}{108928} \frac{|101,2 \cdot 10^6 - 31191100|}{238100} + \frac{0,45 \cdot 1050}{153125} \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 3,29518.$$

$$\beta_{Sd,1} = \frac{2049}{1699} + \frac{0,6 \cdot 2049}{393113} \frac{|101,2 \cdot 10^6 - 81430200|}{238100} + \frac{0,45 \cdot 2049}{752803} \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 1,50322.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.43):

$$V_{Rd,max} = \frac{\left[ \frac{0,27}{1,4} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) \cdot 35 + 0 \right] 1050 \cdot 159}{3,29518} = 294.110 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.44):

$$V_{Rd,c} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 2049 \cdot 159}{1,50322} = 184.485 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 4 linhas e 3 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.11(b) e (d). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.6:

$$A_{sw} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 201 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min\{345; 500\} = 345 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.7:

$$1,5 \frac{159}{70} \frac{201 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 2049 \cdot 159} \geq 0,5 \left( \frac{238100}{2049 \cdot 159} \right) \Rightarrow 0,63 \geq 0,37 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.49):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\left[ \frac{0,14}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{201 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 2049 \cdot 159} + 0 + 0 \right] \cdot 2049 \cdot 159}{1,50322} = 278.585 \text{ N.}$$

Com auxílio da Figura 4.11(b) e (d), calcula-se:

$$u_{out} = 175 \cdot 2 + 159 \cdot 6 + \pi \cdot 318 = 2.303 \text{ mm.}$$

$$u_{out}^* = 159 \cdot 6 + \pi \cdot 318 = 1.953 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico do perímetro crítico é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Nas Tabelas 4.17 e 4.18 constam os cálculos.

Tabela 4.17 – Cálculo de  $x_{cg, u_{out}}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u$ (mm)	$x_{cg, \Delta u}$ (mm)
0	318	$2\pi/6$	$3\pi/6$	166,5	81,4
333	318	0	$2\pi/6$	333,0	596,0
Trechos $\Delta u$ retos					
$\Delta u$ (mm)					$x_{cg, \Delta u}$ (mm)
175					-87,5
159					228
159					424
159					651
$x_{cg, u_{out}} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg, \Delta u} \cdot \Delta u}{u_{out}} =$					351 mm

Tabela 4.18 – Cálculo de  $x_{cg, u_{out}^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u^*$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg, \Delta u^*}$ (mm)
0	318	$2\pi/6$	$3\pi/6$	166,5	81,4
333	318	0	$2\pi/6$	333,0	596,0
Trechos $\Delta u^*$ retos					
$\Delta u^*$ (mm)					$x_{cg, \Delta u^*}$ (mm)
159					228
159					424

Continuação da Tabela 4.18

Trechos $\Delta u^*$ retos	
$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
159	651
$x_{cg,u_{out}^*} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_{out}^*} =$	
429 mm	

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,u_{out}} = y_{cg,u_{out}^*} = 0$  mm.

O cálculo de  $W_{out,y}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. A Tabela 4.19 detalha os cálculos.

Tabela 4.19 – Cálculo de  $W_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
0	351	318	$2\pi/6$	$3\pi/6$	44.895,0
333	351	318	0	$2\pi/6$	81.581,8
Trechos $\Delta u$ retos					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
-87,5	351	175			76.737,5
228	351	159			19.557,0
424	351	159			11.607,0
651	351	159			47.700,0
$W_{out,y} = 2 \cdot \sum_{u_{out}/2} W_{\Delta u} =$					564.157 mm <sup>2</sup>

O cálculo de  $W_{out,x}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.51, 3.53 e 3.58. A Tabela 4.20 detalha os cálculos.

Tabela 4.20 – Cálculo de  $W_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ circulares					
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
-385	0	318	$-3\pi/6$	$-2\pi/6$	114.666,2
-193	0	318	$-2\pi/6$	0	114.832,7
Trecos $\Delta u$ retos					
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
-703	0	175			123.025,0
-621	0	159			98.739,0
-508	0	159			80,772,0
-113	0	159			17.967,0
$W_{out,x} = 2 \cdot \sum_{u_{out}/2} W_{\Delta u} =$					1.100.004 mm <sup>2</sup>

Pela Equação 3.19:

$$M_{Sd,y,out}^* = 238100 \cdot 429 = 102.144.900 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Pela Equação 3.23:

$$\beta_{Sd,out} = \frac{2303}{1953} + \frac{0,6 \cdot 2303}{564157} \frac{|101,2 \cdot 10^6 - 102144900|}{238100} + \frac{0,45 \cdot 2303}{1100004} \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 1,21782.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.50):

$$V_{Rd,out} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 2303 \cdot 159}{1,21782} = 255.948 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.1.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1

Com auxílio da Figura 4.12(a) e (c), calcula-se:

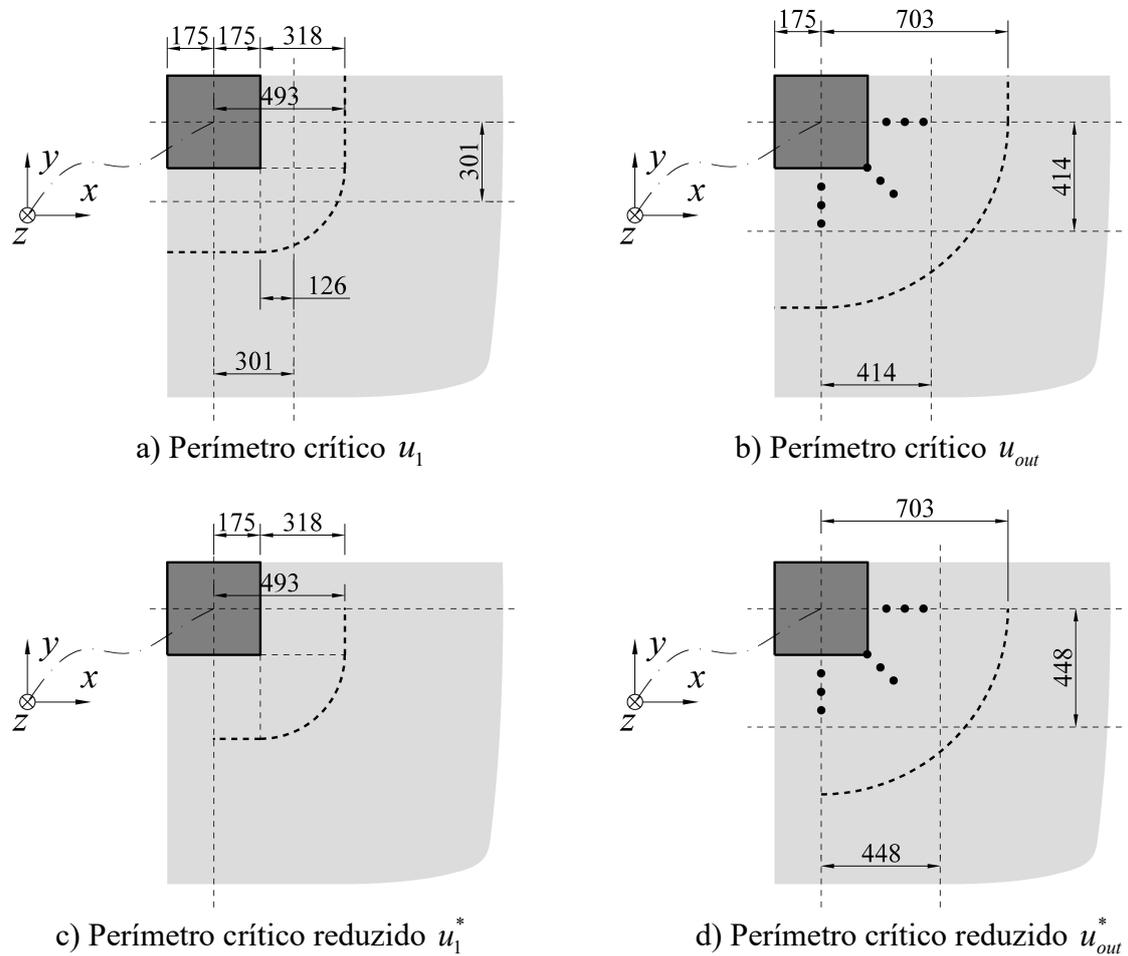


Figura 4.12 – Perímetros críticos para a ligação A1 pela NBR 6118:2014

$$u_0 = 4 \cdot 175 = 700 \text{ mm.}$$

$$u_0^* = 2 \cdot 175 = 350 \text{ mm.}$$

$$u_1 = 4 \cdot 175 + \pi 318 / 2 = 1.200 \text{ mm.}$$

$$u_1^* = 2 \cdot 175 + \pi 318 / 2 = 850 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Das Tabelas 4.21 à 4.24 constam os cálculos.

Tabela 4.21 – Cálculo de  $x_{cg,u_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trehos $\Delta u$ retos	
$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
350	0
350	175
$x_{cg,u_0} = \frac{\sum_{u_0} x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0} =$	
88 mm	

Tabela 4.22 – Cálculo de  $x_{cg,u_0^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trehos $\Delta u^*$ retos	
$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175	87,5
175	175
$x_{cg,u_0^*} = \frac{\sum_{u_0^*} x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0^*} =$	
131 mm	

Tabela 4.23 – Cálculo de  $x_{cg,u_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trehos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
175	318	$-\pi/2$	0	499,5	377,4
Trehos $\Delta u$ retos					
$\Delta u$ (mm)					$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
350					0
350					493
$x_{cg,u_1} = \frac{\sum_{u_1} x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1} =$					301 mm

Tabela 4.24 – Cálculo de  $x_{cg,u_1^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trehos $\Delta u^*$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175	318	$-\pi/2$	0	499,5	377,4

Continuação da Tabela 4.24

Trechos $\Delta u^*$ retos	
$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
175	87,5
175	493
$x_{cg,u_1^*} = \frac{\sum_{u_1^*} x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1^*} =$	
	342 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,u_0} = -x_{cg,u_0} = -88 \text{ mm.}$$

$$y_{cg,u_0^*} = -x_{cg,u_0^*} = -131 \text{ mm.}$$

$$y_{cg,u_1} = -x_{cg,u_1} = -301 \text{ mm.}$$

$$y_{cg,u_1^*} = -x_{cg,u_1^*} = -342 \text{ mm.}$$

Os cálculos de  $W_{0,y}$  e  $W_{1,y}$  são feitos por trechos dos perímetro críticos  $u_0$  e  $u_1$ , com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. As Tabelas 4.25 e 4.26 detalham os cálculos.

Tabela 4.25 – Cálculo de  $W_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_0}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
-87,5	88	175	30.712,5
44	88	88	3.872,0
131,5	88	87	3.784,5
175	88	350	30.450,0
$W_{0,y} = \sum_{u_0} W_{\Delta u} =$			68.819 mm <sup>2</sup>

Tabela 4.26 – Cálculo de  $W_{1,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
175	301	318	$-\cos^{-1}(126/318)$	0	46.232,5
175	301	318	$-\pi/2$	$-\cos^{-1}(126/318)$	8.047,1

Continuação da Tabela 4.26

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_i}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
0	301	350	105.350,0
493	301	350	67.200,0
$W_{1,y} = \sum_{u_i} W_{\Delta u} =$			226.830 mm <sup>2</sup>

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$W_{0,x} = W_{0,y} = 68.819 \text{ mm}^2.$$

$$W_{1,x} = W_{1,y} = 226.830 \text{ mm}^2.$$

Pelas Equações 3.26 e 3.27:

$$M_{Sd,y,0}^* = 111300 \cdot 131 = 14.580.300 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,0}^* = -111300 \cdot (-131) = 14.580.300 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,y,1}^* = 111300 \cdot 342 = 38.064.600 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,1}^* = -111300 \cdot (-342) = 38.064.600 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Da Equação 3.12, com  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_{x,ext} = k_{y,ext} = 0,45$ . Então, pela Equação 3.36:

$$\beta_{Sd,0} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{700}{350} - \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} + \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} \right| \\ \left| \frac{700}{350} + \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} + \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} \right| \\ \left| \frac{700}{350} + \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} - \frac{0,45 \cdot 700}{68819} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 14580300)}{111300} \right| \end{array} \right. = 5,43145.$$

$$\beta_{Sd,1} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1200}{850} - \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} + \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} \right| \\ \left| \frac{1200}{850} + \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} + \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} \right| \\ \left| \frac{1200}{850} + \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} - \frac{0,45 \cdot 1200}{226830} \frac{(56,3 \cdot 10^6 - 38064600)}{111300} \right| \end{array} \right. = 2,19185.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.43):

$$V_{Rd,m\acute{a}x} = \frac{\left[ \frac{0,27}{1,4} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) \cdot 35 + 0 \right] 700 \cdot 159}{5,43145} = 118.955 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.44):

$$V_{Rd,c} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 1200 \cdot 159}{2,19185} = 70.388 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 3 linhas e 3 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.12(b) e (d). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.6:

$$A_{sw} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 151 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min\{345; 500\} = 345 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.7:

$$1,5 \frac{159}{70} \frac{151 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 1200 \cdot 159} \geq 0,5 \left( \frac{111300}{1200 \cdot 159} \right) \Rightarrow 0,81 \geq 0,29 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.49):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\left[ \frac{0,14}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{151 \cdot 345 \cdot 1}{1,15 \cdot 1200 \cdot 159} + 0 + 0 \right] \cdot 1200 \cdot 159}{2,19185} = 124.561 \text{ N.}$$

Com auxílio da Figura 4.12(b) e (d), calcula-se:

$$u_{out} = 175 \cdot 2 + \pi \cdot 703/2 = 1.454 \text{ mm.}$$

$$u_{out}^* = \pi \cdot 703/2 = 1.104 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico do perímetro crítico é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Nas Tabelas 4.27 e 4.28 constam os cálculos.

Tabela 4.27 – Cálculo de  $x_{cg,u_{out}}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
0	703	$-\pi / 2$	0	1.104,3	447,5
Trechos $\Delta u$ retos					
$\Delta u$ (mm)					$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
175					-87,5
175					703
$x_{cg,u_{out}} = \frac{\sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_{out}} =$					414 mm

Tabela 4.28 – Cálculo de  $x_{cg,u_{out}^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u^*$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
0	703	$-\pi / 2$	0	1.104,3	447,5
$x_{cg,u_{out}^*} = \frac{\sum x_{cg,\Delta u^*} \cdot \Delta u^*}{u_{out}^*} =$					448 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,u_{out}} = -x_{cg,u_{out}} = -414 \text{ mm.}$$

$$y_{cg,u_{out}^*} = -x_{cg,u_{out}^*} = -448 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $W_{out,y}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. A Tabela 4.29 detalha os cálculos.

Tabela 4.29 – Cálculo de  $W_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
0	414	703	$-\cos(414/703)$	0	125.523,2
0	414	703	$-\pi/2$	$-\cos(414/703)$	88.481,9
Trecos $\Delta u$ retos					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
703	414	175			50.575,0
-87,5	414	175			87.762,5
$W_{out,y} = \sum_{u_{out}} W_{\Delta u} =$					352.343 mm <sup>2</sup>

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$W_{out,x} = W_{out,y} = 352.3423 \text{ mm}^2.$$

Pelas Equações 3.26 e 3.27:

$$M_{Sd,y,out}^* = 111300 \cdot 448 = 49.862.400 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,out}^* = -111300 \cdot (-448) = 49.862.400 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Pela Equação 3.36:

$$\beta_{Sd,out} = \max \left\{ \left| \frac{1454}{1104} - \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} + \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} \right|, \left| \frac{1454}{1104} + \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} + \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} \right|, \left| \frac{1454}{1104} + \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} - \frac{0,45 \cdot 1454 (56,3 \cdot 10^6 - 49862400)}{352343 \cdot 111300} \right| \right\} = 1,53185.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.50):

$$V_{Rd,out} = \frac{\left[ \frac{0,182}{1,4} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right) (100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 1454 \cdot 159}{1,53185} = 122.032 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

## 4.2. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO EUROCODE 2:2004

Como os perímetros críticos  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_0^*$  e  $u_1^*$  pelo EUROCODE 2:2004 são iguais aos admitidos pela NBR 6118:2014, os parâmetros relativos a estes perímetros, já calculados na Seção 4.1 podem ser aproveitados. A Tabela 4.30 resume as características gerais de cada ligação laje-pilar a ser dimensionada à punção.

Tabela 4.30 – Parâmetros já calculados comuns à NBR 6118:2014 e ao EUROCODE 2:2004

Laje-pilar	B2	A2	A1
$u_0$ (mm)	1.400	1.050	700
$u_1$ (mm)	3.398	2.049	1.200
$u_0^*$ (mm)	-	700	350
$u_1^*$ (mm)	-	1.699	850
$x_{cg,u_0}$ (mm)	0	58	88
$y_{cg,u_0}$ (mm)	0	0	-88
$x_{cg,u_1}$ (mm)	0	268	301
$y_{cg,u_1}$ (mm)	0	0	-301
$x_{cg,u_0^*}$ (mm)	-	131	131
$y_{cg,u_0^*}$ (mm)	-	0	-131
$x_{cg,u_1^*}$ (mm)	-	342	342
$y_{cg,u_1^*}$ (mm)	-	0	-342
$W_{0,y}$ (mm <sup>2</sup> )	183.750	108.928	68.819
$W_{0,x}$ (mm <sup>2</sup> )	183.750	153.125	68.819
$W_{1,y}$ (mm <sup>2</sup> )	1.160.505	393.113	226.830
$W_{1,x}$ (mm <sup>2</sup> )	1.160.505	752.803	226.830
$M_{Sd,y,0}^*$ (N·mm)	-	31.191.100	14.580.300
$M_{Sd,x,0}^*$ (N·mm)	-	0	14.580.300
$M_{Sd,y,1}^*$ (N·mm)	-	81.430.200	38.064.600
$M_{Sd,x,1}^*$ (N·mm)	-	0	38.064.600

Da Equação 3.12, como  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_x = k_y = 0,6$ , e  $k_{x,ext} = k_{y,ext} = 0,45$ .

Da Equação 3.64 tem-se, para todas as ligações laje-pilar:

$$\xi = \min \left\{ \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{159}} \right), 2 \right\} = 2.$$

#### 4.2.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2

Com auxílio da Figura 4.13(a) e da Tabela 4.30, calcula-se:

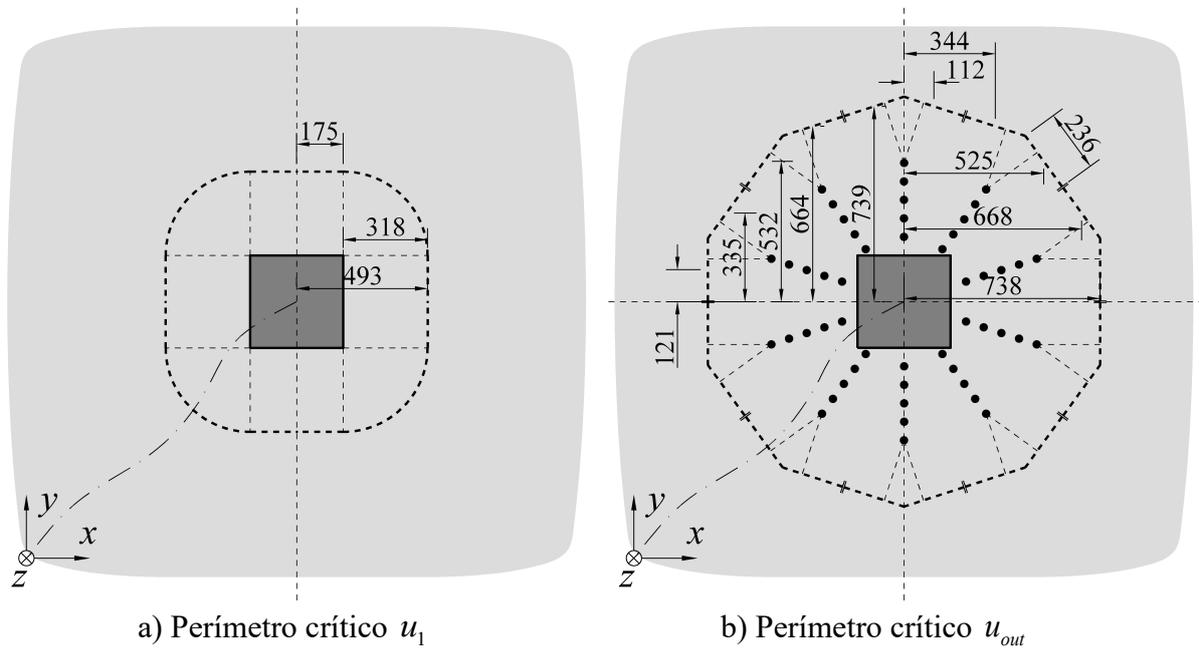


Figura 4.13 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo EUROCODE 2:2004

Pela Equação 3.70:

$$\beta_{sd,0} = 1 + \frac{0,6 \cdot 1400}{183750} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} + \frac{0,6 \cdot 1400}{183750} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} = 1,17881 .$$

$$\beta_{sd,1} = 1 + \frac{0,6 \cdot 3398}{1160505} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} + \frac{0,6 \cdot 3398}{1160505} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542.000} = 1,06872 .$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.75):

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,24}{1,5} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) \cdot 35 + 0 \right] 1400 \cdot 159}{1,17881} = 909.427 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.76):

$$V_{Rd,c} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] \cdot 3398 \cdot 159 \right.}{1,06872} = 398.197 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 10 linhas e 5 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.13(b). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.68:

$$A_{sw} = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 503 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min \left\{ \frac{1,15(250 + 0,25 \cdot 159)}{500} \right\} = 333 \text{ MPa.}$$

Da Equação 3.63:

$$v_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} \\ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} \end{array} \right. = 0,78766 \text{ MPa.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.81):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\min \left\{ \left[ 0,75 \cdot 0,78766 + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{503 \cdot 333 \cdot 1}{1,15 \cdot 3398 \cdot 159} + 0 + 0 \right] 3398 \cdot 159 \right.}{1,06872} = 597.292 \text{ N.}$$

Com auxílio da Figura 4.13(b), calcula-se:

$$u_{out} = 20 \cdot 236 = 4.720 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $W_{out,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $u_{out}$ , com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. A Tabela 4.31 detalha os cálculos.

Tabela 4.31 – Cálculo de  $W_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

Tremos $\Delta u$ retos			
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
112	0	236	26.432,0
344	0	236	81.184,0
525	0	236	123.900,0
668	0	236	157.648,0
738	0	236	174.168,0
$W_{out,y} = 4 \cdot \sum_{u_{out}/4} W_{\Delta u} =$			2.253.328 mm <sup>2</sup>

O cálculo de  $W_{out,x}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.51, 3.53 e 3.58. A Tabela 4.32 detalha os cálculos.

Tabela 4.32 – Cálculo de  $W_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

Tremos $\Delta u$ retos			
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
739	0	236	174.404,0
664	0	236	156.704,0
532	0	236	125.552,0
335	0	236	79.060,0
121	0	236	28.556,0
$W_{out,x} = 4 \cdot \sum_{u_{out}/4} W_{\Delta u} =$			2.257.104 mm <sup>2</sup>

Pela Equação 3.70:

$$\beta_{Sd,out} = 1 + \frac{0,6 \cdot 4720}{2253328} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542000} + \frac{0,6 \cdot 4720}{2257104} \frac{|-10,6 \cdot 10^6|}{542000} = 1,04912.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.82):

$$V_{Rd,out} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0101 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 4720 \cdot 159 \right.}{1,04912} = 563.450 \text{ N.}$$

$$\left. \left[ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} + 0 + 0 \right] 4720 \cdot 159 \right\}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

## 4.2.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2

Com auxílio da Figura 4.14(a) e (c) e da Tabela 4.30, calcula-se:

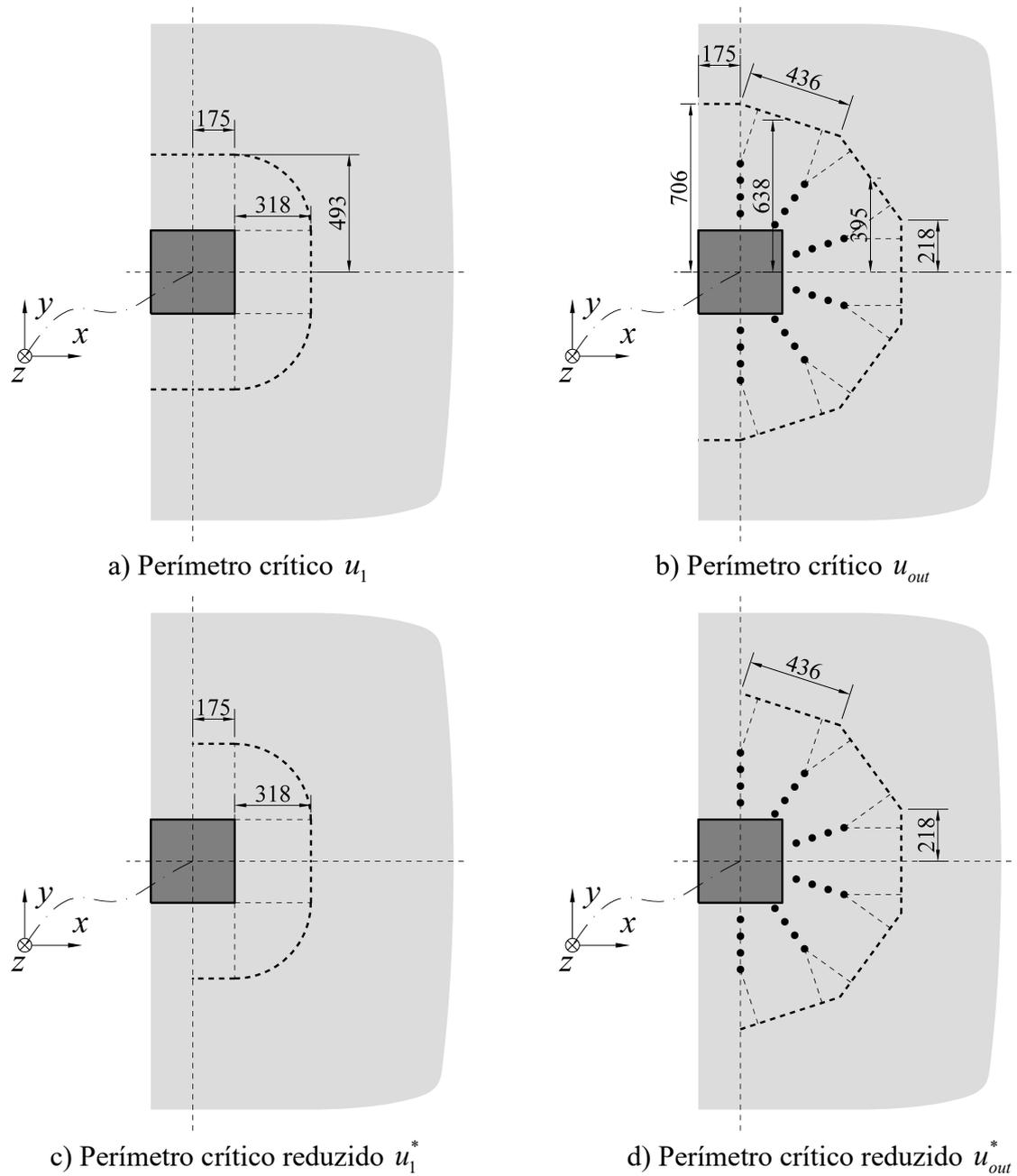


Figura 4.14 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo EUROCODE 2:2004

Pela Equação 3.72:

$$\beta_{sd,0} = \frac{1050}{700} + \frac{0,45 \cdot 1050}{153125} \cdot \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 1,59461.$$

$$\beta_{Sd,1} = \frac{2049}{1699} + \frac{0,45 \cdot 2049}{752803} \cdot \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 1,24356.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.75):

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,24}{1,5} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) 35 + 0 \right] \cdot 1050 \cdot 159}{1,59461} = 504.218 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.76):

$$V_{Rd,c} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] \cdot 2049 \cdot 159 \right.}{1,24356} = 194.059 \text{ N.}$$

$$\left. \left[ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} + 0 + 0 \right] \cdot 2049 \cdot 159 \right\}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 6 linhas e 4 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.14(b) e (d). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.68:

$$A_{sw} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 302 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min \left\{ \frac{1,15(250 + 0,25 \cdot 159)}{500} \right\} = 333 \text{ MPa.}$$

Da Equação 3.63:

$$v_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} \\ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} \end{array} \right. = 0,74073 \text{ MPa.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.81):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\min \left\{ \left[ 0,75 \cdot 0,74073 + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{302 \cdot 333 \cdot 1}{1,15 \cdot 2049 \cdot 159} + 0 + 0 \right] 2049 \cdot 159 \right.}{1,24356} = 291.087 \text{ N.}$$

$$\left. \left[ 1,5 \cdot 0,74073 + 0 + 0 \right] 2049 \cdot 159 \right\}$$

Com auxílio da Figura 4.14(b) e (d), calcula-se:

$$u_{out} = 2 \cdot 175 + 5 \cdot 436 = 2.530 \text{ mm.}$$

$$u_{out}^* = 5 \cdot 436 = 2.180 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $W_{out,x}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.51, 3.53 e 3.58. A Tabela 4.33 detalha os cálculos.

Tabela 4.33 – Cálculo de  $W_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos			
$y_c$ (mm)	$y_{cg,u_{out}}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,x}$ (mm <sup>2</sup> )
706	0	175	123.550,0
638	0	436	278.168,0
395	0	436	172.220,0
109	0	218	23.762,0
$W_{out,x} = 2 \cdot \sum_{u_{out}/2} W_{\Delta u} =$			1.195.400 mm <sup>2</sup>

Pela Equação 3.72:

$$\beta_{Sd,out} = \frac{2530}{2180} + \frac{0,45 \cdot 2530}{1195400} \cdot \frac{|-7,3 \cdot 10^6|}{238100} = 1,18975.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.82):

$$V_{Rd,out} = \frac{\max \left\{ \left[ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0084 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 2530 \cdot 159 \right. \right.}{1,18975} = 250.451 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é menor ou igual as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.2.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1

Com auxílio da Figura 4.15(a) e (c) e da Tabela 4.30, calcula-se:

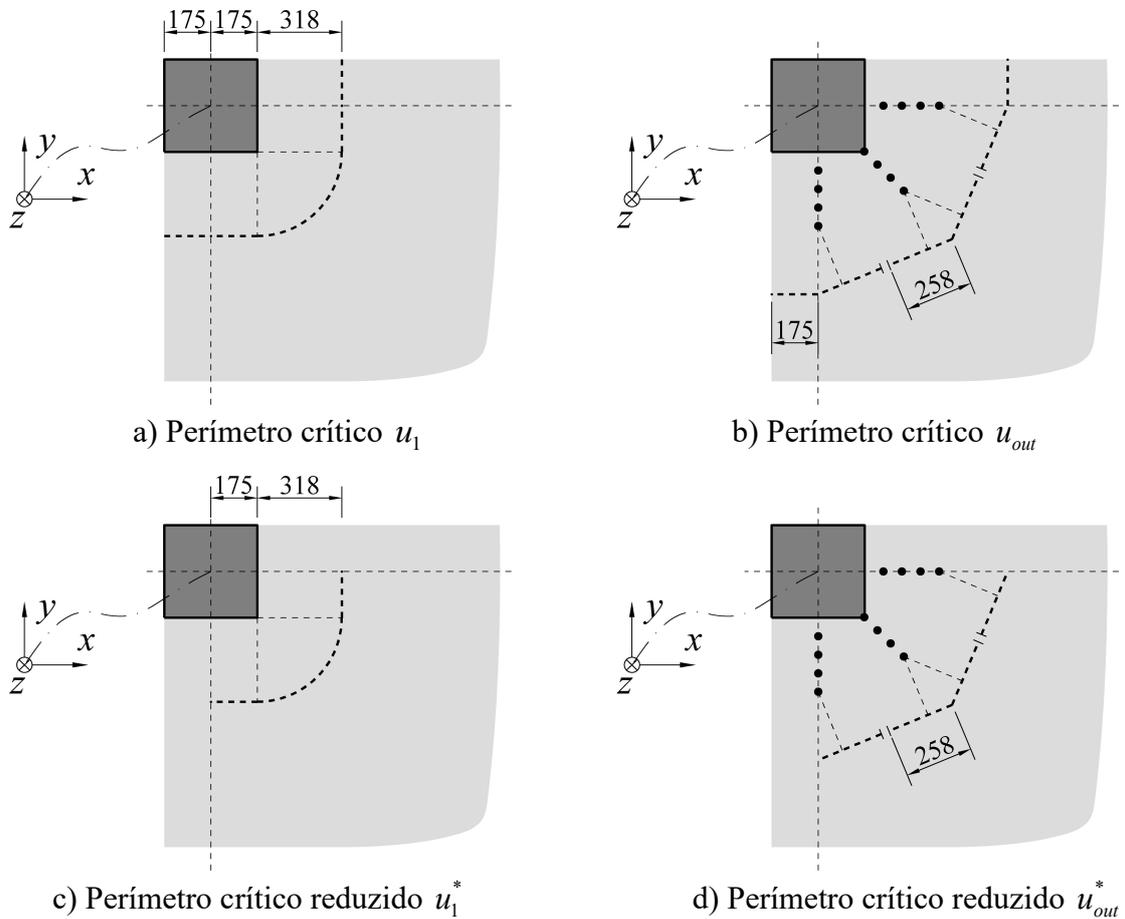


Figura 4.15 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo EUROCODE 2:2004

Pela Equação 3.73:

$$\beta_{sd,0} = \frac{700}{350} = 2,00000.$$

$$\beta_{sd,1} = \frac{1200}{850} = 1,41176.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.75):

$$V_{Rd,máx} = \frac{\left[ \frac{0,24}{1,5} \left( 1 - \frac{35}{250} \right) \cdot 35 + 0 \right] 700 \cdot 159}{2,00000} = 268.010 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.76):

$$V_{Rd,c} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] \cdot 1200 \cdot 159 \right.}{1,41176} = 95.096 \text{ N.}$$

$$\left. \left[ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} + 0 + 0 \right] \cdot 1200 \cdot 159 \right\}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 3 linhas e 4 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.15(b) e (d). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.68:

$$A_{sw} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 151 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min \left\{ \frac{1,15(250 + 0,25 \cdot 159)}{500} \right\} = 333 \text{ MPa.}$$

Da Equação 3.63:

$$v_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} \\ \left( \frac{0,0525}{1,5} \right) \sqrt{2^3 \cdot 35} \end{array} \right. = 0,70363 \text{ MPa.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.81):

$$V_{Rd,cs} = \frac{\min \left\{ \left[ 0,75 \cdot 0,70363 + 1,5 \cdot \frac{159}{70} \cdot \frac{151 \cdot 333 \cdot 1}{1,15 \cdot 1200 \cdot 159} + 0 + 0 \right] 1200 \cdot 159 \right.}{1,41176} = 142.644 \text{ N.}$$

$$\left. \left[ 1,5 \cdot 0,70363 + 0 + 0 \right] 1200 \cdot 159 \right\}$$

Com auxílio da Figura 4.15(b) e (d), calcula-se:

$$u_{out} = 2 \cdot 175 + 4 \cdot 258 = 1.382 \text{ mm.}$$

$$u_{out}^* = 4 \cdot 258 = 1.032 \text{ mm.}$$

Pela Equação 3.73:

$$\beta_{Sd,out} = \frac{1382}{1032} = 1,33915.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.82):

$$V_{Rd,out} = \frac{\max \left\{ \left[ \left( \frac{0,18}{1,5} \right) 2(100 \cdot 0,0072 \cdot 35)^{1/3} + 0 + 0 \right] 1382 \cdot 159 \right.}{1,33915} = 115.457 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.3. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO ACI 318:2014

#### 4.3.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2

Com auxílio da Figura 4.16(a), calcula-se:

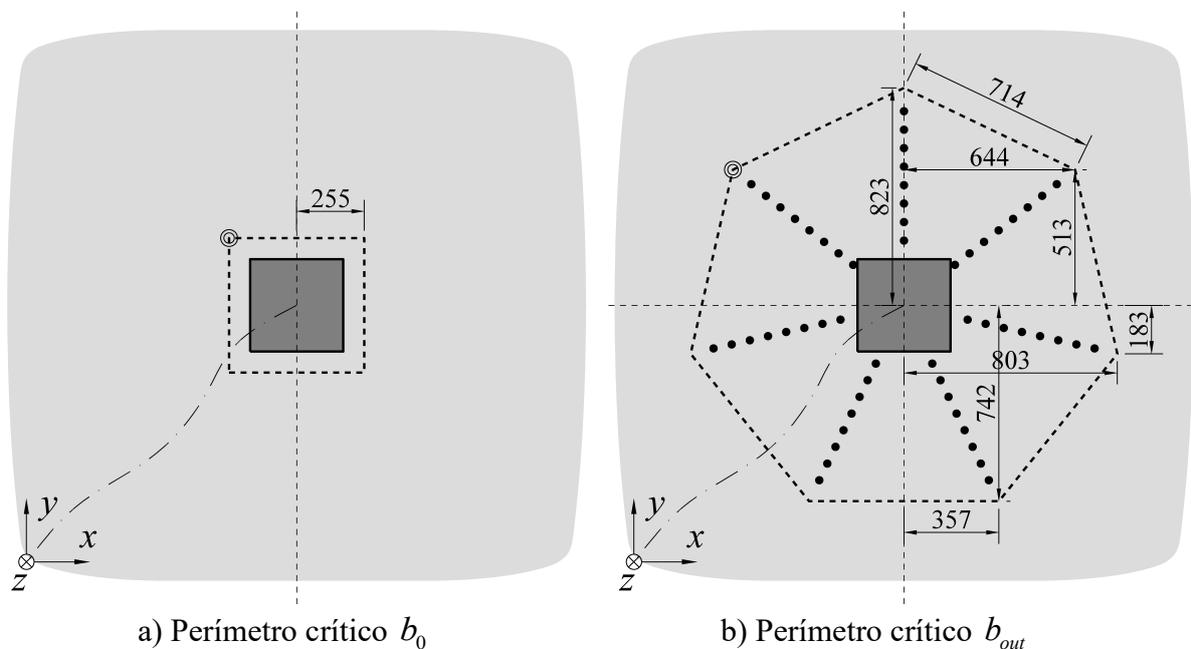


Figura 4.16 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo ACI 318:2014

$$b_0 = 8 \cdot 255 = 2.040 \text{ mm.}$$

$$b_{x,0} = b_{y,0} = 2 \cdot 255 = 510 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $J_{0,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_0$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.34 detalha os cálculos.

Tabela 4.34 – Cálculo de  $J_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_0}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	0	-255	255	255	255	-	1.928.462.108
159	0	255	255	-255	255	-	5.272.877.250
$J_{0,y} = 2 \cdot \sum_{b_0/2} J_{\Delta b,y} =$							14.402.678.715 mm <sup>4</sup>

Pela bissimetria do perímetro:

$$J_{0,x} = J_{0,y} = 14.402.678.715 \text{ mm}^4.$$

Da Equação 3.84,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_s = 40$ , e  $\beta = 1$ .

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,0} = \gamma_{vx,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{510}{510}}} = 0,40.$$

Da Equação 3.101:

$$\beta_{Sd,0} = \max_{(x,y) \in b_0} \left\{ \left| 1 + \frac{0,4 \cdot 2040 \cdot 159 \cdot x \cdot (-10,6 \cdot 10^6)}{14402678715 \cdot 542000} - \frac{0,4 \cdot 2040 \cdot 159 \cdot y \cdot (-10,6 \cdot 10^6)}{14402678715 \cdot 542000} \right| \right\}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_0$  destacado na Figura 4.16(a), cujas coordenadas são (-255; 255). Assim:

$$\beta_{Sd,0} = 1,08985.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.119):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 \left[ 0,5\sqrt{35} + 0 \right] 2040 \cdot 159}{1,08985} = 660.277 \text{ N}.$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.120):

$$V_{Rd,c} = \frac{\min \begin{cases} 0,75 \cdot 0,33 \cdot 1\sqrt{35} \cdot 2040 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,17 \left( 1 + \frac{2}{1} \right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 2040 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,083 \left( 2 + \frac{40 \cdot 159}{2040} \right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 2040 \cdot 159 \end{cases}}{1,08985} = 435.782 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 7 linhas e 8 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.16(b). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.87:

$$A_{sw} = 7 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 352 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min\{500; 420\} = 420 \text{ MPa}.$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.88:

$$351 \geq 0,17\sqrt{35} \cdot 2040 \cdot 70 / 420 \Rightarrow 351 \geq 342 \Rightarrow \text{OK}.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.124):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 \left[ 0,66\sqrt{35} + 0 \right] 2040 \cdot 159}{1,08985} = 871.565 \text{ N}.$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.125):

$$V_{Rd,cs} = \frac{0,75 \left[ 0,25 \cdot 1\sqrt{35} + \frac{352 \cdot 420}{2040 \cdot 70} + 0 + 0 \right] 2040 \cdot 159}{1,08985} = 561.231 \text{ N}.$$

Com o auxílio da Figura 4.16(b), calcula-se:

$$b_{out} = 714 \cdot 7 = 4.998 \text{ mm}.$$

$$b_{x,out} = 803 \cdot 2 = 1.606 \text{ mm}.$$

$$b_{y,out} = 823 + 742 = 1.565 \text{ mm}.$$

O cálculo de  $J_{out,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_{out}$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.35 detalha os cálculos.

Tabela 4.35 – Cálculo de  $J_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_{out}}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	0	0	644	823	513	1,12217	15.710.440.133
159	0	644	803	513	-183	0,22459	59.658.817.458
159	0	803	357	-183	-742	0,67343	40.134.864.375
159	0	357	0	-742	-742	-	2.531.047.979
$J_{out,y} = 2 \cdot \sum_{b_{out}/2} J_{\Delta b,y} =$							226.070.339.891 mm <sup>4</sup>

O cálculo de  $J_{out,x}$  é feito por trecho do perímetro crítico, com auxílio das Equações 3.128, 3.129, 3.131, 3.133 e 3.91, como consta na Tabela 4.36.

Tabela 4.36 – Cálculo de  $J_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$y_{cg,b_{out}}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,x}$ (mm <sup>4</sup> )
159	0	0	644	823	513	1,12217	51.619.752.416
159	0	644	803	513	-183	0,22459	7.672.817.797
159	0	803	357	-183	-742	0,67343	27.282.887.367
159	0	357	0	-742	-742	-	31.251.664.332
$J_{out,x} = 4 \cdot \sum_{b_{out}/4} J_{\Delta b,x} =$							235.654.243.823 mm <sup>4</sup>

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,out} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1606}{1565}}} = 0,40.$$

$$\gamma_{vx,out} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1565}{1606}}} = 0,40.$$

Da Equação 3.101:

$$\beta_{Sd,out} = \max_{(x,y) \in b_{out}} \left\{ 1 + \frac{0,4 \cdot 4998 \cdot 159 \cdot x \cdot (-10,6 \cdot 10^6)}{226070339891 \cdot 542000} - \frac{0,4 \cdot 4998 \cdot 159 \cdot y \cdot (-10,6 \cdot 10^6)}{235654243823 \cdot 542000} \right\}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_{out}$  destacado na Figura 4.16(b), cujas coordenadas são (-644; 513). Assim:

$$\beta_{Sd,out} = 1,03124.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.126):

$$V_{Rd,out} = \frac{0,75 \left[ 0,17 \cdot 1 \cdot \sqrt{35} + 0 + 0 \right] 4998 \cdot 159}{1,03124} = 581.270 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.3.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2

Com auxílio da Figura 4.17(a), calcula-se:

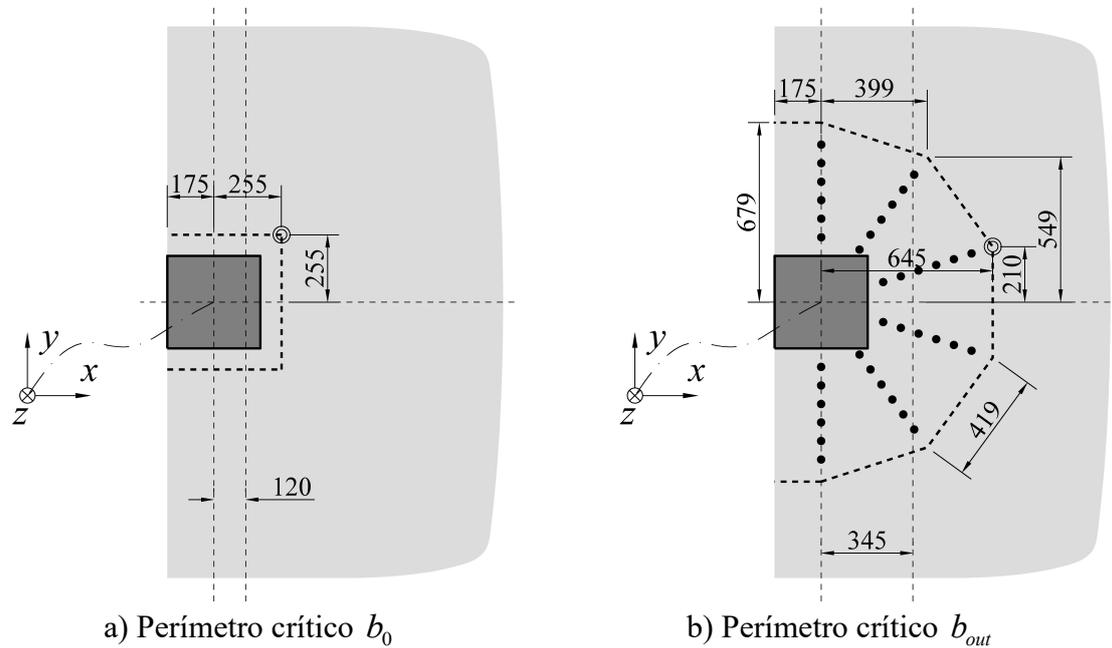


Figura 4.17 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo ACI 318:2014

$$b_0 = 4 \cdot 255 + 2 \cdot 175 = 1.370 \text{ mm.}$$

$$b_{x,0} = 255 + 175 = 430 \text{ mm.}$$

$$b_{y,0} = 2 \cdot 255 = 510 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.37 constam os cálculos.

Tabela 4.37 – Cálculo de  $x_{cg,b_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	-87,5
255	127,5
255	255
$x_{cg,b_0} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_0} =$	
	120 mm

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,b_0} = 0$  mm.

O cálculo de  $J_{0,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_0$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.38 detalha os cálculos.

Tabela 4.38 – Cálculo de  $J_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_0}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	120	-175	255	255	255	-	1.635.074.248
159	120	255	255	0	255	-	738.932.625
$J_{0,y} = 2 \cdot \sum_{b_0/2} J_{\Delta b,y} =$							4.748.013.745 mm <sup>4</sup>

O cálculo de  $J_{0,x}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_0$ , com auxílio das Equações 3.128, 3.129, 3.131, 3.133 e 3.91. A Tabela 4.39 detalha os cálculos.

Tabela 4.39 – Cálculo de  $J_{0,x}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$y_{cg,b_0}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,x}$ (mm <sup>4</sup> )
159	0	-175	255	255	255	-	4.445.759.250
159	0	255	255	0	255	-	964.231.054
$J_{0,x} = 2 \cdot \sum_{b_0/2} J_{\Delta b,x} =$							10.819.980.608 mm <sup>4</sup>

Das Equações 3.103 e 3.104:

$$M_{Sd,y,0}^* = 238100 \cdot 120 = 28.572.000 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,0}^* = -238100 \cdot 0 = 0 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Da Equação 3.84,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_s = 30$ , e  $\beta = 1$ .

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{430}{510}}} = 0,38.$$

$$\gamma_{vx,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{510}{430}}} = 0,42.$$

Da Equação 3.111:

$$\beta_{Sd,0} = \max_{(x,y) \in b_0} \left\{ \left| 1 + \frac{0,38 \cdot 1370 \cdot 159 (x-120) (101,2 \cdot 10^6 - 28572000)}{4748013745 \cdot 238100} - \frac{0,42 \cdot 1370 \cdot 159 (y) (-7,3 \cdot 10^6)}{10819980608 \cdot 238100} \right| \right\}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_0$  destacado na Figura 4.17(a), cujas coordenadas são (255; 255). Assim,

$$\beta_{Sd,0} = 1,78401.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.119):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 [0,5\sqrt{35} + 0] 1370 \cdot 159}{1,78401} = 270.885 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.120):

$$V_{Rd,c} = \frac{\min \begin{cases} 0,75 \cdot 0,33 \cdot 1\sqrt{35} \cdot 1370 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,17 \left(1 + \frac{2}{1}\right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 1370 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,083 \left(2 + \frac{30 \cdot 159}{1370}\right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 1370 \cdot 159 \end{cases}}{1,78401} = 178.784 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 6 linhas e 6 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.17(b). Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.87:

$$A_{sw} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 302 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min \{500; 420\} = 420 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.88:

$$302 \geq 0,17\sqrt{35} \cdot 1370 \cdot 70 / 420 \Rightarrow 302 \geq 229 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.124):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 \left[ 0,66\sqrt{35} + 0 \right] 1370 \cdot 159}{1,78401} = 357.569 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.125):

$$V_{Rd,cs} = \frac{0,75 \left[ 0,25 \cdot 1\sqrt{35} + \frac{302 \cdot 420}{1370 \cdot 70} + 0 + 0 \right] 1370 \cdot 159}{1,78401} = 256.564 \text{ N.}$$

Com o auxílio da Figura 4.17(b), calcula-se:

$$b_{out} = 419 \cdot 5 + 175 \cdot 2 = 2.445 \text{ mm.}$$

$$b_{x,out} = 645 + 175 = 820 \text{ mm.}$$

$$b_{y,out} = 679 \cdot 2 = 1.358 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.40 constam os cálculos.

Tabela 4.40 – Cálculo de  $x_{cg,bout}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	-87,5
419	199,5
419	522
209,5	645
$x_{cg,bout} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_{out}} =$	
345 mm	

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,bout} = 0$  mm.

O cálculo de  $J_{out,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_{out}$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.41 detalha os cálculos.

Tabela 4.41 – Cálculo de  $J_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_{out}}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	345	-175	0	679	679	-	5.334.472.194
159	345	0	399	679	549	1,25583	2.297.753.022
159	345	399	645	549	210	0,62774	2.422.283.121
159	345	645	645	210	0	-	3.005.100.000
$J_{out,y} = 2 \cdot \sum_{b_{out}/2} J_{\Delta b,y} =$							26.119.216.673 mm <sup>4</sup>

O cálculo de  $J_{out,x}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_{out}$ , com auxílio das Equações 3.128, 3.129, 3.131, 3.133 e 3.91. A Tabela 4.42 detalha os cálculos.

Tabela 4.42 – Cálculo de  $J_{out,x}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$y_{cg,b_{out}}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,x}$ (mm <sup>4</sup> )
159	0	-175	0	679	679	-	12.828.465.825
159	0	0	399	679	549	1,25583	25.248.415.963
159	0	399	645	549	210	0,62774	10.229.171.354
159	0	645	645	210	0	-	561.177.383
$J_{out,x} = 2 \cdot \sum_{b_{out}/2} J_{\Delta b,x} =$							97.734.461.048 mm <sup>4</sup>

Das Equações 3.103 e 3.104:

$$M_{Sd,y,out}^* = 238100 \cdot 345 = 82.144.500 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,out}^* = -238100 \cdot (0) = 0 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,out} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{820}{1358}}} = 0,34.$$

$$\gamma_{vx,out} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1358}{820}}} = 0,46.$$

Da Equação 3.111:

$$\beta_{Sd,out} = \max_{(x,y) \in b_{out}} \left\{ 1 + \frac{0,34 \cdot 2445 \cdot 159 \cdot (x - 345) (101,2 \cdot 10^6 - 82144500)}{26119216673} - \frac{0,46 \cdot 2445 \cdot 159 \cdot (y - 0) (-7,3 \cdot 10^6 - 0)}{97734461048} \right\} \cdot \frac{1}{238100}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_{out}$  destacado na Figura 4.17(b), cujas coordenadas são (645; 210). Assim,

$$\beta_{Sd,out} = 1,13328.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.126):

$$V_{Rd,out} = \frac{0,75 \left[ 0,17 \cdot 1 \cdot \sqrt{35} + 0 + 0 \right] 2445 \cdot 159}{1,13328} = 258.752 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.3.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1

Com auxílio da Figura 4.18(a), calcula-se:

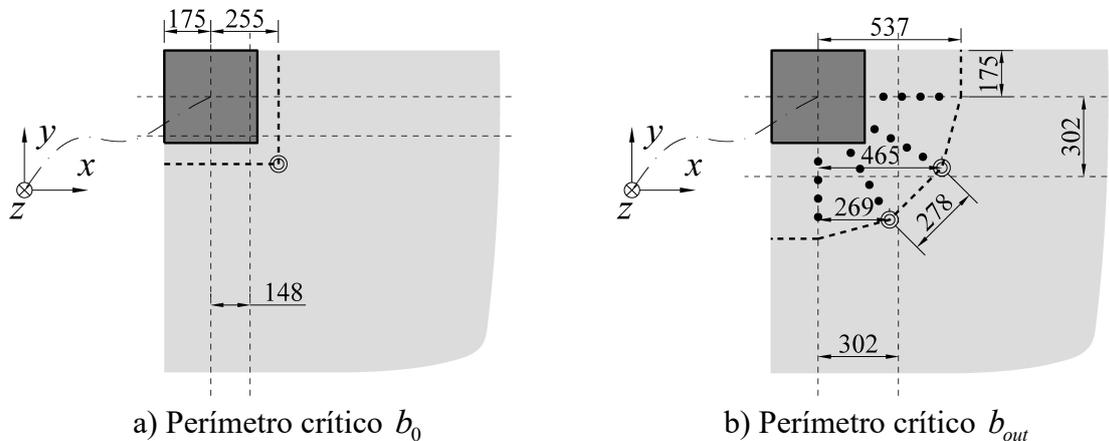


Figura 4.18 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo ACI 318:2014

$$b_0 = 2(255 + 175) = 860 \text{ mm.}$$

$$b_{x,0} = b_{y,0} = 255 + 175 = 430 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.43 constam os cálculos.

Tabela 4.43 – Cálculo de  $x_{cg,b_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	-87,5
255	127,5
430	255
$x_{cg,b_0} = \frac{\sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_0} =$	148 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,b_0} = -x_{cg,b_0} = -148 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $J_{0,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_0$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.44 detalha os cálculos.

Tabela 4.44 – Cálculo de  $J_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_0}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	148	-175	255	-255	-255	-	1.994.973.928
159	148	255	255	-255	175	-	782.768.130
$J_{0,y} = \sum_{b_0} J_{\Delta b,y} =$							2.777.742.058 mm <sup>4</sup>

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$J_{0,x} = J_{0,y} = 2.777.742.058 \text{ mm}^4.$$

Das Equações 3.103 e 3.104:

$$M_{Sd,y,0}^* = 111300 \cdot 148 = 16.472.400 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,0}^* = -111300 \cdot (-148) = 16.472.400 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Da Equação 3.84,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_s = 20$ , e  $\beta = 1$ .

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,0} = \gamma_{vx,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{430}{430}}} = 0,40.$$

Da Equação 3.111:

$$\beta_{Sd,0} = \max_{(x,y) \in b_0} \left\{ 1 + \frac{0,40860 \cdot 159(x-148)(56,3 \cdot 10^6 - 16472400)}{2777742058 \cdot 111300} - \frac{0,40860 \cdot 159(y+148)(56,3 \cdot 10^6 - 16472400)}{2777742058 \cdot 111300} \right\}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_0$  destacado na Figura 4.18(a), cujas coordenadas são (255; -255). Assim,

$$\beta_{Sd,0} = 2,50788.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.119):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 \left[ 0,5\sqrt{35} + 0 \right] 860 \cdot 159}{2,50788} = 120.963 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.120):

$$V_{Rd,c} = \frac{\min \begin{cases} 0,75 \cdot 0,33 \cdot 1\sqrt{35} \cdot 860 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,17 \left( 1 + \frac{2}{1} \right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 860 \cdot 159 \\ 0,75 \cdot 0,083 \left( 2 + \frac{20 \cdot 159}{860} \right) \cdot 1\sqrt{35} \cdot 860 \cdot 159 \end{cases}}{2,50788} = 79.836 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é maior que a resistência à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 4 linhas e 4 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.18b. Calculando a área de aço e a tensão característica pela Equação 3.87:

$$A_{sw} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 201 \text{ mm}^2.$$

$$f_{ywk} = \min \{ 500; 420 \} = 420 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.88:

$$201 \geq 0,17\sqrt{35} \cdot 860 \cdot 70 / 420 \Rightarrow 201 \geq 144 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.124):

$$V_{Rd,max} = \frac{0,75 \left[ 0,66\sqrt{35} + 0 \right] 860 \cdot 159}{2,50788} = 159.672 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.125):

$$V_{Rd,cs} = \frac{0,75 \left[ 0,25 \cdot 1\sqrt{35} + \frac{201 \cdot 420}{860 \cdot 70} + 0 + 0 \right] 860 \cdot 159}{2,50788} = 117.827 \text{ N.}$$

Com o auxílio da Figura 4.18(b), calcula-se:

$$b_{out} = 278 \cdot 3 + 175 \cdot 2 = 1.184 \text{ mm.}$$

$$b_{x,out} = b_{y,out} = 537 + 175 = 712 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.45 constam os cálculos.

Tabela 4.45 – Cálculo de  $x_{cg,b_{out}}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	-87,5
278	134,5
278	367
278	501
275	537
$x_{cg,b_{out}} = \frac{\sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_{out}} =$	
	302 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,b_{out}} = -x_{cg,b_{out}} = -302 \text{ mm.}$$

O cálculo de  $J_{out,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico  $b_{out}$ , com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.46 detalha os cálculos.

Tabela 4.46 – Cálculo de  $J_{out,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_{out}}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
159	302	-175	0	-537	-537	-	4.350.969.744
159	302	0	269	-537	-465	1,30927	1.509.226.114
159	302	269	465	-465	-269	0,78540	327.297.458
159	302	465	537	-269	0	0,26153	1.772.524.150
159	302	537	537	0	175	-	1.536.635.625
$J_{out,y} = \sum_{b_{out}} J_{\Delta b,y} =$							9.496.653.091 mm <sup>4</sup>

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$J_{out,x} = J_{out,y} = 9.496.653.091 \text{ mm}^4.$$

Das Equações 3.103 e 3.104:

$$M_{Sd,y,out}^* = 111300 \cdot 305 = 33.612.600 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

$$M_{Sd,x,out}^* = -111300 \cdot (-305) = 33.612.600 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,out} = \gamma_{vx,out} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{712}{712}}} = 0,4.$$

Da Equação 3.111:

$$\beta_{Sd,out} = \max_{(x,y) \in b_{out}} \left\{ 1 + \frac{0,4 \cdot 1184 \cdot 159 \cdot (x-305) (56,3 \cdot 10^6 - 33612600)}{9496653091 \cdot 111300} - \frac{0,4 \cdot 1184 \cdot 159 \cdot (y+302) (56,3 \cdot 10^6 - 33612600)}{9496653091 \cdot 111300} \right\}.$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre nos vértices do perímetro  $b_{out}$  destacados na Figura 4.18(b), cujas coordenadas são (465; -269) e (269; -465). Assim,

$$\beta_{Sd,out} = 1,21012.$$

- Verificação da tração diagonal na região externa às armaduras de punção (Equação 3.126):

$$V_{Rd,out} = \frac{0,75 \left[ 0,17 \cdot 1 \cdot \sqrt{35} + 0 + 0 \right] 1182 \cdot 159}{1,21012} = 117.345 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

#### 4.4. DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO PELO *fib* MODEL CODE:2010

Considerando concreto com agregado de máximo diâmetro,  $d_g = 19$  mm, da Equação 3.150 calcula-se:

$$k_{dg} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{32}{16+19} = 0,91429 . \\ 0,75 \end{array} \right.$$

Este parâmetro é comum a todas as ligações laje-pilar do pavimento.

##### 4.4.1. LIGAÇÃO LAJE-PILAR B2

Com auxílio da Figura 4.19(a) e considerando o nível III de aproximação, calcula-se:

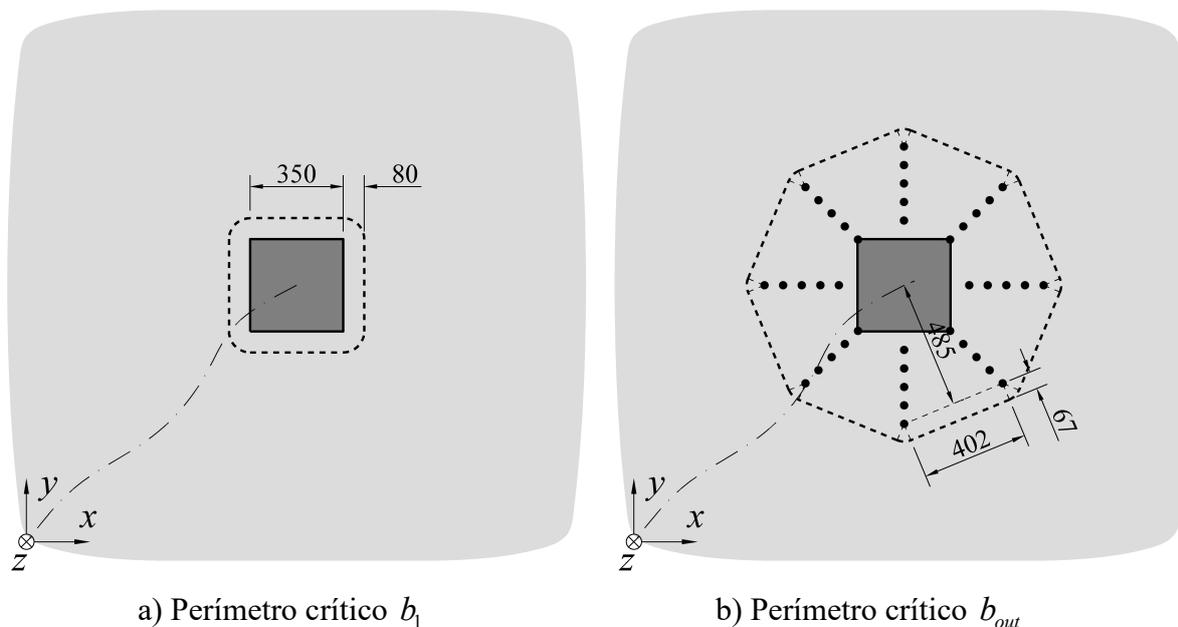


Figura 4.19 – Perímetros críticos para a ligação B2 pelo *fib* MODEL CODE:2010

$$b_1 = 4 \cdot 350 + 2\pi 80 = 1.903 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.140:  $r_s = \sqrt{(0,22 \cdot 6000) \cdot (0,22 \cdot 6000)} = 1.320$  mm. Porém, como foi feita a análise dos momentos fletores no pavimento, apresentadas na Figura 4.3(a), optou-se por utilizar a distância real entre o pilar e os pontos onde o momento fletor na laje se anula, a saber:  $r_{s,x} = 1.300$  mm e  $r_{s,y} = 1.300$  mm, e portanto  $r_s = \sqrt{(1300) \cdot (1300)} = 1.300$  mm.

Das Equações 3.142 e 3.143:

$$e_{u,x,1} = \frac{-10,6 \cdot 10^6}{542000} - 0 = -20 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,1} = -\frac{-10,6 \cdot 10^6}{542000} - 0 = 20 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.146 com  $b_s = 1,5 \cdot 1300 = 1.950 \text{ mm}$ :

$$m_{sd,1} = 542000 \left( \frac{1}{8} + \frac{|20|}{2 \cdot 1950} \right) = 70.529 \text{ N}\cdot\text{mm/mm.}$$

A resistência à flexão da laje, da Equação 3.141:

$$m_{Rd} = \frac{0,0101 \cdot 159^2 \cdot 500}{1,15} \left( 1 - \frac{0,0101 \cdot 500 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,85 \cdot 35 \cdot 1,15} \right) = 98.726 \text{ N}\cdot\text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.139:

$$\psi_{III,d,1} = 1,2 \frac{1300}{159} \frac{500}{210000 \cdot 1,15} \left( \frac{70529}{98726} \right)^{1,5} = 0,01227 \text{ rad.}$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,d,1} = \min \left\{ \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 0,91429 \cdot 0,01227 \cdot 159} = 0,32203. \right. \\ \left. 0,6 \right.$$

Com auxílio da Figura 4.19(a) calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_1$ :

$$\text{Área} = \pi \cdot 80^2 + 350 \cdot 80 \cdot 4 + 350^2 = 254.606 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,1}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot 254606}{\pi}} = 569 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,1} = \sqrt{(-20)^2 + (20)^2} = 28 \text{ mm.}$$

$$k_{e,1} = \frac{1}{1 + \frac{28}{569}} = 0,95302.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,1} = 0,95302 \cdot 1903 = 1.814 \text{ mm.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 0,32203 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 \end{array} \right. = 366.331 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.155):

$$V_{Rd,c} = 0,32203 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 = 366.331 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é maior que as resistências à compressão e à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 8 linhas e 5 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.19(b). Haverá duas camadas de armaduras contidas na zona delimitada pelas distâncias de  $0,35 \cdot d_v$  e  $1,00 \cdot d_v$  das extremidades do pilar, portanto:

$$\sum A_{sw} = 2 \cdot 8 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 804 \text{ mm}^2.$$

Das Equações 3.158 e 3.157:

$$f_{bk} = 2,0 \cdot 1,75 \sqrt{35/25} = 4,14 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{swd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{210000 \cdot 0,01227}{6} (1+0) \left( 1 + \frac{4,14}{500} \frac{1,15}{1,5} \frac{159}{8} \right) \\ \frac{500}{1,15} \end{array} \right. = 435 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.159:

$$(804) \cdot 0,95302 \frac{500}{1,15} \geq 0,5 \cdot 542000 \Rightarrow 333.143 \geq 271.000 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,8 \cdot 0,32203 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 \end{array} \right. = 1.025.726 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.156):

$$V_{Rd,cs} = 0,32203 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 1814 \cdot 159 + (804) 0,95302 \cdot 435 \cdot 1 = 699.640 \text{ N.}$$

Considerando cobrimento inferior dos *studs* igual a 2,5 cm, tem-se  $d_{v,out} = 159 - 25 = 134 \text{ mm}$ .

Com auxílio da Figura 4.19(b), calcula-se:

$$b_{out} = 2\pi \cdot 67 + 8 \cdot 402 = 3.637 \text{ mm.}$$

A área interna ao perímetro crítico  $b_{out}$  vale:

$$Área = \pi \cdot 67^2 + 402 \cdot 67 \cdot 8 + 8 \cdot (402 \cdot 485/2) = 1.009.455 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,out}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,out} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.009.455}{\pi}} = 1.134 \text{ mm.}$$

Como o centro geométrico dos perímetros  $b_1$  e  $b_{out}$  coincidem, então  $e_{u,out} = e_{u,1}$ . Por consequência,  $m_{sd,out}$ ,  $\psi_{III,d,out}$  e  $k_{\psi,d,out}$  também coincidem com os valores calculados para o perímetro  $b_1$ . Da Equação 3.152:

$$k_{e,out} = \frac{1}{1 + \frac{28}{1134}} = 0,97590.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,out} = 0,97590 \cdot 3637 = 3.549 \text{ mm.}$$

- Verificação da tração diagonal na região externas às armaduras de punção (Equação 3.160):

$$V_{Rd,out} = 0,32203 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 3549 \cdot 134 = 604.018 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 542.000 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

#### 4.4.2. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A2

Com auxílio da Figura 4.20(a) e considerando o nível III de aproximação de calcula-se:

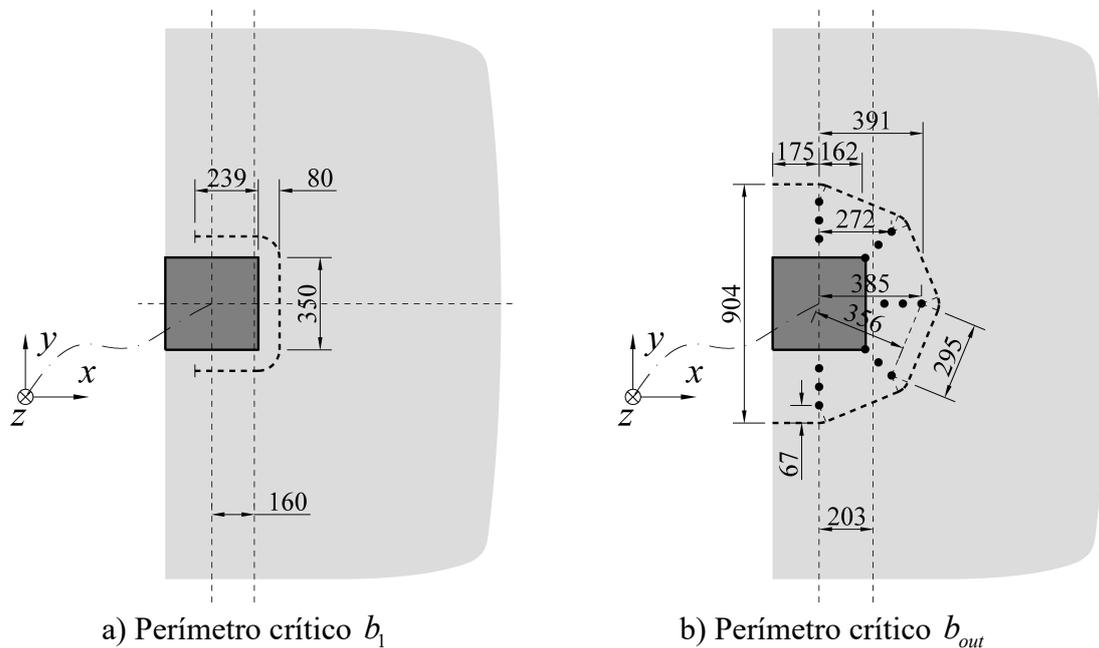


Figura 4.20 – Perímetros críticos para a ligação A2 pelo *fib* MODEL CODE:2010

$$b_1 = 2 \cdot 239 + 350 + \pi 80 = 1.079 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.140:  $r_s = \sqrt{(0,16 \cdot 6000) \cdot (0,22 \cdot 6000)} = 1.126 \text{ mm}$ . Porém, como foi feita a análise dos momentos fletores no pavimento, apresentadas na Figura 4.3(a), optou-se por utilizar a distância real entre o pilar e os pontos onde o momento fletor na laje se anula, a saber:  $r_{s,x} = 900 \text{ mm}$  e  $r_{s,y} = 1.200 \text{ mm}$ , e portanto  $r_s = \sqrt{(900) \cdot (1200)} = 1.039 \text{ mm}$ .

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.47 consta o cálculo.

Tabela 4.47 – Cálculo de  $x_{cg,b_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	80	0	$\pi / 2$	125,7	225,9

Continuação da Tabela 4.47

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
239	55,5
175	255
$x_{cg,b_1} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_1} =$	
	160 mm

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,b_1} = 0$  mm.

Das Equações 3.142 e 3.143:

$$e_{u,x,1} = \frac{101,2 \cdot 10^6}{238100} - 160 = 265 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,1} = -\frac{-7,3 \cdot 10^6}{238100} - 0 = 31 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.147 com  $b_s = 1,5 \cdot 1039 = 1.559$  mm:

$$m_{sd,1} = \max \left\{ \begin{array}{l} 238100 \left( \frac{1}{8} + \frac{|31|}{1559} \right) \\ 238100 \left( \frac{1}{8} + \frac{|265|}{2 \cdot 1559} \right) = 59.525 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.} \\ \frac{238100}{4} \end{array} \right.$$

A resistência à flexão da laje, da Equação 3.141:

$$m_{Rd} = \frac{0,0084 \cdot 159^2 \cdot 500}{1,15} \left( 1 - \frac{0,0084 \cdot 500 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,85 \cdot 35 \cdot 1,15} \right) = 83.830 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.139:

$$\psi_{III,d,1} = 1,2 \frac{1039}{159} \frac{500}{210000 \cdot 1,15} \left( \frac{59525}{83830} \right)^{1,5} = 0,00971 \text{ rad.}$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,d,1} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,5 + 0,9 \cdot 0,91429 \cdot 0,00971 \cdot 159 = 0,36096. \\ 0,6 \end{array} \right.$$

Com auxílio da Figura 4.20(a) calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_1$ :

$$Área = \pi \cdot 80^2 / 2 + 350 \cdot 80 + 239(350 + 80 + 80) = 159.943 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,1}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot 159943}{\pi}} = 451 \text{ mm}.$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,1} = \sqrt{(265)^2 + (31)^2} = 267 \text{ mm}.$$

$$k_{e,1} = \frac{1}{1 + \frac{267}{451}} = 0,62813.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,1} = 0,62813 \cdot 1079 = 678 \text{ mm}.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 0,36096 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 \end{array} \right. = 153.472 \text{ N}.$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.155):

$$V_{Rd,c} = 0,36096 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 = 153.472 \text{ N}.$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é maior que as resistências à compressão e à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 5 linhas e 3 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.20(b). Haverá duas camadas de armaduras contidas na zona delimitada pelas distâncias de  $0,35 \cdot d_v$  e  $1,00 \cdot d_v$  das extremidades do pilar, portanto:

$$\sum A_{sw} = 2 \cdot 5 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 503 \text{ mm}^2.$$

Das Equações 3.158 e 3.157:

$$f_{bk} = 2,0 \cdot 1,75 \sqrt{35 / 25} = 4,14 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{swd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{210000 \cdot 0,00971}{6} (1+0) \left( 1 + \frac{4,14 \cdot 1,15 \cdot 159}{500 \cdot 1,5 \cdot 8} \right) \\ \frac{500}{1,15} \end{array} \right. = 382 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.159:

$$(503) \cdot 0,62813 \frac{500}{1,15} \geq 0,5 \cdot 238100 \Rightarrow 137.369 \geq 119.050 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,8 \cdot 0,36096 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 \end{array} \right. = 425.177 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.156):

$$V_{Rd,cs} = 0,36096 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 678 \cdot 159 + (503) 0,62813 \cdot 382 \cdot 1 = 274.164 \text{ N.}$$

Considerando cobrimento inferior dos *studs* igual a 2,5 cm, tem-se  $d_{v,out} = 159 - 25 = 134 \text{ mm}$ .

Com auxílio da Figura 4.20(b), calcula-se:

$$b_{out} = 175 \cdot 2 + \pi \cdot 67 + 4 \cdot 295 = 1.740 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.48 consta o cálculo de.

Tabela 4.48 – Cálculo de  $x_{cg,b_{out}}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
0	67	$3\pi/8$	$4\pi/8$	26,3	13,0
272	67	$\pi/8$	$3\pi/8$	52,6	318,2
385	67	0	$\pi/8$	26,3	450,3

Continuação da Tabela 4.48

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	-87,5
295	162
295	391
$x_{cg,b_{out}} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_{out}} =$	
203 mm	

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,b_{out}} = 0$  mm.

Das Equações 3.142 e 3.143:

$$e_{u,x,out} = \frac{101,2 \cdot 10^6}{238100} - 203 = 222 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,out} = -\frac{-7,3 \cdot 10^6}{238100} - 0 = 31 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.147 com  $b_s = 1.559$  mm:

$$m_{sd,out} = \max \left\{ \begin{array}{l} 238100 \left( \frac{1}{8} + \frac{|31|}{1559} \right) \\ 238100 \left( \frac{1}{8} + \frac{|222|}{2 \cdot 1559} \right) \\ \frac{238100}{4} \end{array} \right. = 59.525 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.139:

$$\psi_{III,d,out} = 1,2 \frac{1039}{159} \frac{500}{210000 \cdot 1,15} \left( \frac{59525}{83830} \right)^{1,5} = 0,00971 \text{ rad.}$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,d,out} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 0,91429 \cdot 0,00971 \cdot 159} \\ 0,6 \end{array} \right. = 0,36096.$$

Com auxílio da Figura 4.20(b) calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_{out}$  :

$$\text{Área} = \pi \cdot 67^2 / 2 + 295 \cdot 67 \cdot 4 + 4 \cdot (295 \cdot 356 / 2) + 904 \cdot 175 = 454.351 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,out}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,out} = \sqrt{\frac{4 \cdot 454351}{\pi}} = 761 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,out} = \sqrt{(222)^2 + (31)^2} = 224 \text{ mm.}$$

$$k_{e,out} = \frac{1}{1 + \frac{224}{761}} = 0,77259.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,out} = 0,77259 \cdot 1740 = 1.344 \text{ mm.}$$

- Verificação da tração diagonal na região externas às armaduras de punção (Equação 3.160):

$$V_{Rd,out} = 0,36096 \frac{\sqrt{35}}{1,5} \cdot 1344 \cdot 134 = 256.393 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 238.100 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

### 4.4.3. LIGAÇÃO LAJE-PILAR A1

Com auxílio da Figura 4.21(a) e considerando o nível III de aproximação de calcula-se:

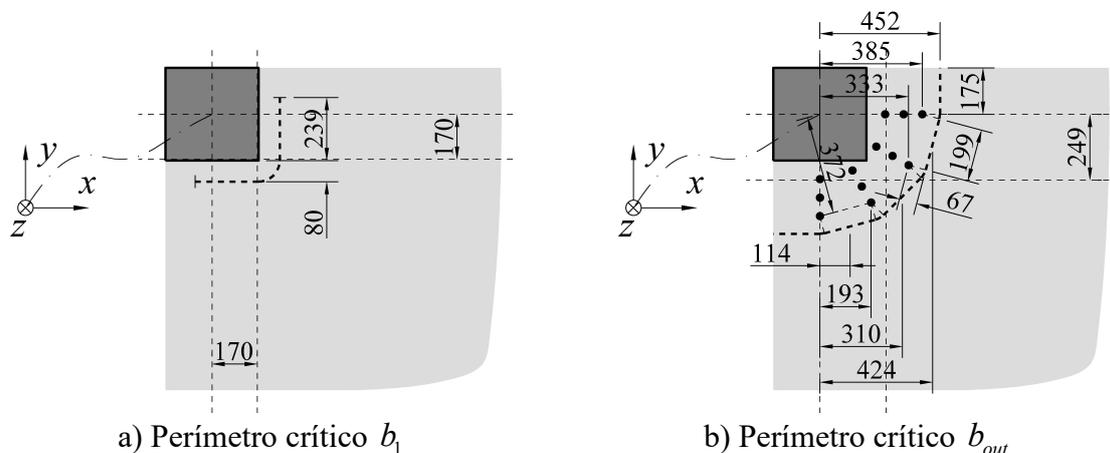


Figura 4.21 – Perímetros críticos para a ligação A1 pelo *fib* MODEL CODE:2010

$$b_1 = 2 \cdot 239 + (\pi/2) \cdot 80 = 604 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.140:  $r_s = \sqrt{(0,16 \cdot 6000) \cdot (0,16 \cdot 6000)} = 960 \text{ mm}$ . Porém, como foi feita a análise dos momentos fletores no pavimento, apresentadas na Figura 4.3(a), optou-se por utilizar a distância real entre o pilar e os pontos onde o momento fletor na laje se anula, a saber:  $r_{s,x} = 950 \text{ mm}$  e  $r_{s,y} = 950 \text{ mm}$ , e portanto  $r_s = \sqrt{(950) \cdot (950)} = 950 \text{ mm}$ .

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro na Tabela 4.49, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60.

Tabela 4.49 – Cálculo de  $x_{cg,b_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175	80	$-\pi / 2$	0		
Trechos $\Delta b$ retos					
$\Delta b$ (mm)					$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
239					255
239					55,5
$x_{cg,b_1} = \frac{\sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_1} =$					170 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,b_1} = -x_{cg,b_1} = -170 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.142 e 3.143:

$$e_{u,x,1} = \frac{56,3 \cdot 10^6}{111300} - 170 = 336 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,1} = -\frac{56,3 \cdot 10^6}{111300} - (-170) = -336 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.148 com  $b_s = 1,5 \cdot 950 = 1.425 \text{ mm}$ :

$$m_{sd,1} = \max \left\{ \begin{array}{l} 111300 \left( \frac{1}{8} + \frac{|336|}{1450} \right) \\ \frac{111300}{2} \end{array} \right. = 55.650 \text{ N}\cdot\text{mm/mm.}$$

A resistência à flexão da laje, da Equação 3.141:

$$m_{Rd} = \frac{0,0072 \cdot 159^2 \cdot 500}{1,15} \left( 1 - \frac{0,0072 \cdot 500 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,85 \cdot 35 \cdot 1,15} \right) = 72.895 \text{ N}\cdot\text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.139:

$$\psi_{III,d,1} = 1,2 \frac{950}{159} \frac{500}{210000 \cdot 1,15} \left( \frac{55650}{72895} \right)^{1,5} = 0,00990 \text{ rad.}$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,d,1} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 0,91429 \cdot 0,00990 \cdot 159} \\ 0,6 \end{array} \right. = 0,35775 .$$

Com auxílio da Figura 4.21(a) calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_1$ :

$$\text{Área} = \pi \cdot 80^2 / 4 + 239 \cdot 80 \cdot 2 + 239^2 = 100.388 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,1}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100388}{\pi}} = 358 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,1} = \sqrt{(336)^2 + (-336)^2} = 475 \text{ mm.}$$

$$k_{e,1} = \frac{1}{1 + \frac{475}{358}} = 0,42977.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,1} = 0,42977 \cdot 604 = 260 \text{ mm.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 0,35775 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 \end{array} \right. = 58.330 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.155):

$$V_{Rd,c} = 0,35775 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 = 58.330 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é maior que as resistências à compressão e à tração diagonal, a verificação não está satisfeita. Opta-se, portanto, por reforçar a ligação com a adoção de *studs* de 8 mm de diâmetro, distribuídos em 4 linhas e 3 camadas, com  $s_0 = s_r = 70$  mm, conforme mostrado na Figura 4.21(b). Haverá duas camadas de armaduras contidas na zona delimitada pelas distâncias de  $0,35 \cdot d_v$  e  $1,00 \cdot d_v$  das extremidades do pilar, portanto:

$$\sum A_{sw} = 2 \cdot 4 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 402 \text{ mm}^2.$$

Das Equações 3.158 e 3.157:

$$f_{bk} = 2,0 \cdot 1,75 \sqrt{35 / 25} = 4,14 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{swd} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{210000 \cdot 0,00990}{6} (1+0) \left( 1 + \frac{4,14 \cdot 1,15 \cdot 159}{500 \cdot 1,5 \cdot 8} \right) \\ \frac{500}{1,15} \end{array} \right. = 390 \text{ MPa.}$$

Verificando a adoção de armadura mínima pela Equação 3.159:

$$(402) \cdot 0,42977 \frac{500}{1,15} \geq 0,5 \cdot 111300 \Rightarrow 75.116 \geq 55.650 \Rightarrow \text{OK.}$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rd,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,8 \cdot 0,35775 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 \\ \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 \end{array} \right. = 163.047 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal com armaduras de punção (Equação 3.156):

$$V_{Rd,cs} = 0,35775 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 260 \cdot 159 + (402) 0,42977 \cdot 390 \cdot 1 = 125.709 \text{ N.}$$

Considerando cobrimento inferior dos *studs* igual a 2,5 cm, tem-se  $d_{v,out} = 159 - 25 = 134 \text{ mm}$ .

Com auxílio da Figura 4.21(b), calcula-se:

$$b_{out} = 175 \cdot 2 + \pi \cdot 67 / 2 + 3 \cdot 199 = 1.052 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro na Tabela 4.50, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60.

Tabela 4.50 – Cálculo de  $x_{cg,bout}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
0	67	$-6\pi/12$	$-5\pi/12$	17,5	8,7
193	67	$-5\pi/12$	$-3\pi/12$	35,1	226,1
333	67	$-3\pi/12$	$-\pi/12$	35,1	390,4
385	67	$-\pi/12$	0	17,5	451,2
Trechos $\Delta b$ retos					
$\Delta b$ (mm)					$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
175					-87,5
199					114
199					310
199					424
175					452
$x_{cg,bout} = \frac{\sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_{out}} =$					249 mm

Pela simetria com relação à bissetriz dos eixos  $x$  e  $y$  no quarto quadrante, tem-se:

$$y_{cg,b_{out}} = -x_{cg,b_{out}} = -249 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.142 e 3.143:

$$e_{u,x,out} = \frac{56,3 \cdot 10^6}{111300} - 249 = 257 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,out} = -\frac{56,3 \cdot 10^6}{111300} - (-249) = -257 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.148 com  $b_s = 1,5 \cdot 950 = 1.425 \text{ mm}$ :

$$m_{sd,out} = \max \left\{ \begin{array}{l} 111300 \left( \frac{1}{8} + \frac{|257|}{1450} \right) \\ \frac{111300}{2} \end{array} \right. = 55.650 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.139:

$$\psi_{III,d,out} = 1,2 \frac{950}{159} \frac{500}{210000 \cdot 1,15} \left( \frac{55650}{72895} \right)^{1,5} = 0,00990 \text{ rad.}$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,d,out} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 0,91429 \cdot 0,00990 \cdot 159} \\ 0,6 \end{array} \right. = 0,35775 .$$

Com auxílio da Figura 4.21(b) calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_{out}$  :

$$\text{Área} = \pi \cdot 67^2 / 4 + 199 \cdot 67 \cdot 3 + 3 \cdot (199 \cdot 372 / 2) + 452 \cdot 175 \cdot 2 + 175^2 = 343.392 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,out}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,out} = \sqrt{\frac{4 \cdot 343392}{\pi}} = 661 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,out} = \sqrt{(257)^2 + (-257)^2} = 363 \text{ mm.}$$

$$k_{e,out} = \frac{1}{1 + \frac{363}{661}} = 0,64551.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,out} = 0,64551 \cdot 1052 = 679 \text{ mm.}$$

- Verificação da tração diagonal na região externas às armaduras de punção  
(Equação 3.160):

$$V_{Rd,out} = 0,35775 \frac{\sqrt{35}}{1,5} 679 \cdot 134 = 128.380 \text{ N.}$$

Como  $F_{Sd}$ , igual a 111.300 N, é menor que as resistências, a verificação está satisfeita.

#### 4.5. PREVISÃO DA CARGA DE RUPTURA EXPERIMENTAL

Para exemplificar a previsão da carga de ruptura experimental por cada norma, as características de um modelo de ligação laje-pilar de borda L14, ensaiado por BARBÁN (2008), serão descritas. Tais características subsidiam os cálculos da previsão da carga de ruptura, que serão exemplificados em detalhes.

- Laje com 1,2 m na direção  $x$  por 2,0 metros na direção  $y$ , e 0,124 m de espessura;
- Seção dos pilares de 0,20 m por 0,20 m;
- $f_{ck} = 55,2$  MPa;
- Armação passiva de flexão em aço CA-50, conforme detalhamento da Figura 4.22(a); com  $d_x = 104$  mm,  $d_y = 96$  mm, e com  $f_{yk} = 592$  MPa e  $E_s = 206$  GPa;
- Armação protendida em monocordoalhas não-aderentes de 12,7 mm de diâmetro e aço CP 190 RB, conforme detalhado na Figura 4.23;
- O esquema estático de aplicação de cargas é ilustrado na Figura 4.22(b).

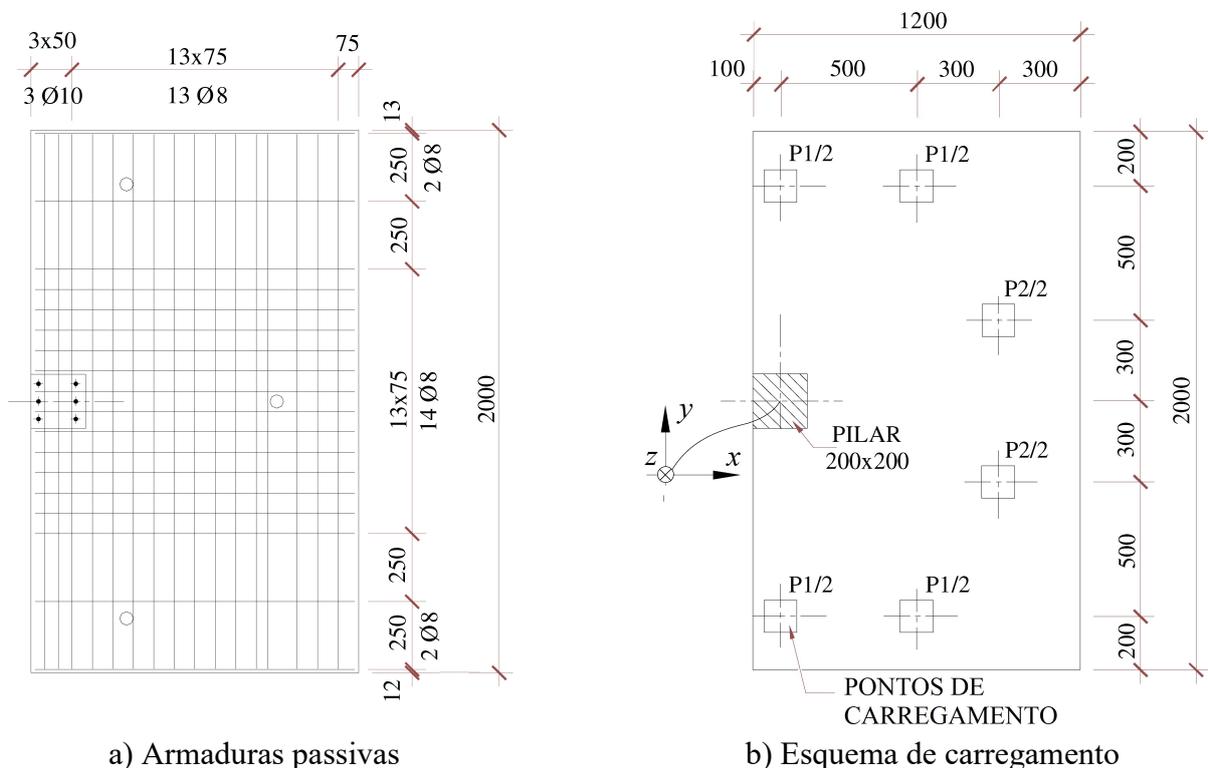
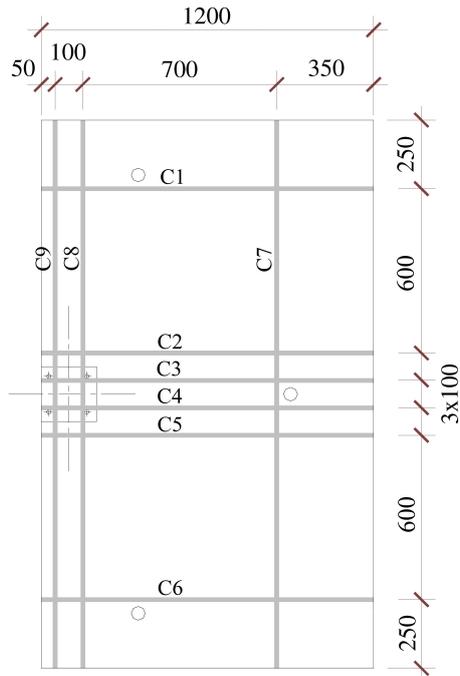
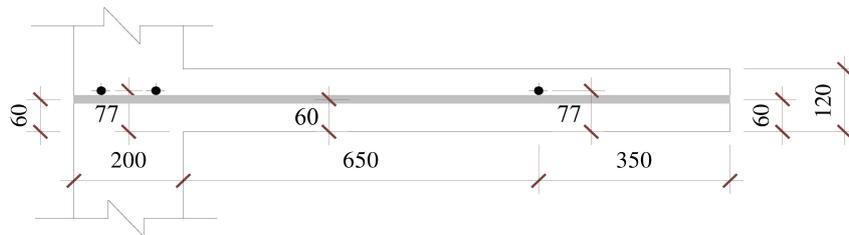


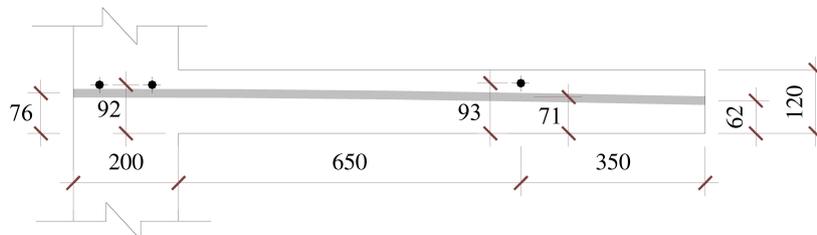
Figura 4.22 – Detalhamento das armaduras de flexão passivas e do esquema de carregamento, em planta [modificado – BARBÁN (2008)]



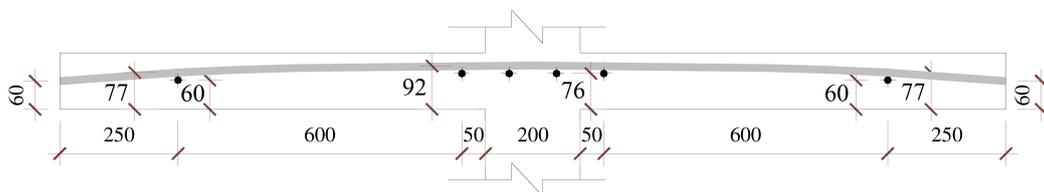
a) Armaduras de protensão, em planta



b) Cordoalhas C1 e C6, em corte



c) Cordoalhas C2, C3, C4 e C5, em corte



d) Cordoalhas C7, C8 e C9, em corte

Figura 4.23 – Detalhamento das monocordoalhas de protensão [modificado – BARBÁN (2008)]

As forças nas cordoalhas, medidas no início do ensaio, são dadas na Tabela 4.51, bem como a inclinação  $\alpha_j$  destes cabos em relação ao plano da laje, calculadas com base nas medidas feitas por BARBÁN (2008) e mostradas na Figura 4.23(c) e (d). Destas figuras, pode-se estimar as inclinações de cada uma das  $j$  cordoalhas da direção  $x$  nas proximidades dos perímetros críticos por:

$$\alpha_j = \text{tg}^{-1}\left(\frac{76-71}{650}\right).$$

E para as cordoalhas da direção  $y$ , estima-se por:

$$\alpha_j = \text{tg}^{-1}\left(\frac{92-77}{600}\right).$$

As cordoalhas C1 e C6 são retas, portanto têm  $\alpha_j = 0$ .

Tabela 4.51 – Força e inclinação das cordoalhas de protensão

Cordoalha $j$	Direção	$F_{Pk,j}$ (N)	$\alpha_j$ (rad)
1	$x$	124.900	0,00000
2	$x$	118.700	0,00769
3	$x$	123.900	0,00769
4	$x$	120.400	0,00769
5	$x$	118.900	0,00769
6	$x$	124.400	0,00000
7	$y$	138.200	0,02499
8	$y$	123.700	0,02499
9	$y$	122.700	0,02499

Pelo esquema estático do ensaio, ilustrado na Figura 4.22(b), a força solicitante resultante vale:  $F_{Sk} = 2(P1) + (P2)$ .

Esta resultante está aplicada em um ponto da laje cujas excentricidades em relação à origem do plano cartesiano são:

$$e_x = \frac{(P1) \cdot 0 + (P1) \cdot 500 + (P2) \cdot 800}{2 \cdot P1 + P2}.$$

$$e_y = 0.$$

Para a laje L14, BARBÁN (2008) determinou a relação de aplicação das cargas  $(P1) = (P2) \cdot 0,5$ . Substituindo no cálculo das excentricidades resulta  $e_x = 525$  mm e  $e_y = 0$  mm.

A altura útil pode ser calculada pela Equação 3.1. Com  $d_x = 104$  mm e  $d_y = 96$  mm, valerá:

$$d = \frac{d_x + d_y}{2} = \frac{104 + 96}{2} = 100 \text{ mm.}$$

Observando a Figura 4.22(a), as armaduras passivas na direção  $x$  presentes em uma largura de laje que contém o pilar acrescida de uma margem de  $3d$  além das faces do pilar somam 10 Ø8.

Portanto:

$$\rho_x = \frac{A_{s,x}}{(c_y + 6d)d_x} = \frac{10(\pi \cdot 8^2/4)}{(200 + 6 \cdot 100)104} = 0,0060.$$

Na direção  $y$  somam 3 Ø10 + 4 Ø8. Portanto:

$$\rho_y = \frac{A_{s,y}}{(c + 3d)d_y} = \frac{3 \cdot (\pi 10^2/4) + 4 \cdot (\pi 8^2/4)}{(200 + 3 \cdot 100)96} = 0,0091.$$

Pela Equação 3.2:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{0,0060 \cdot 0,0091} = 0,0074.$$

#### 4.5.1. PREVISÃO PELA NBR 6118:2014

Com auxílio da Figura 4.24, calcula-se:

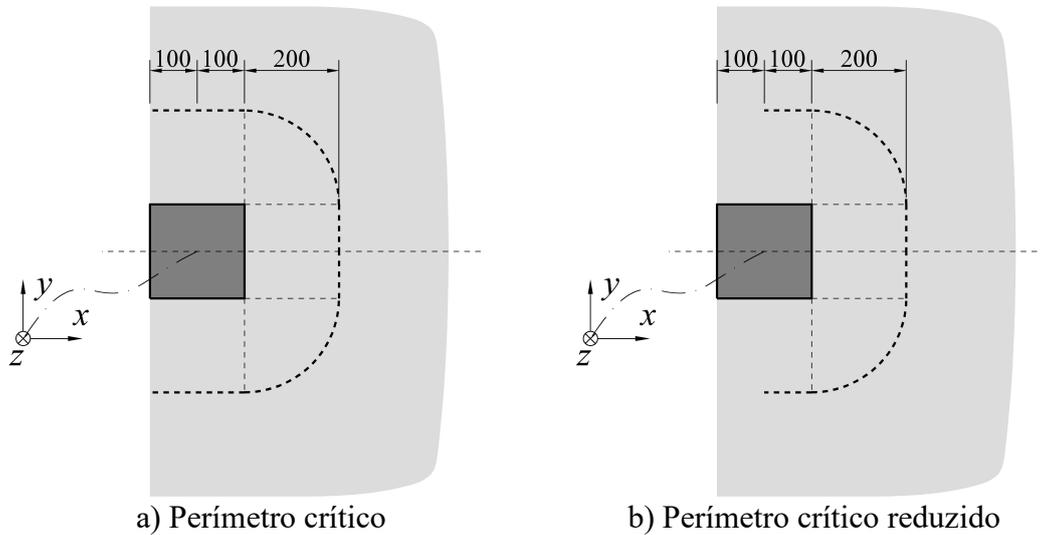


Figura 4.24 – Perímetros críticos para o modelo L14 pela NBR 6118:2014

$$u_0 = 6 \cdot 100 = 600 \text{ mm.}$$

$$u_1 = 6 \cdot 100 + \pi \cdot 200 = 1.228 \text{ mm.}$$

$$u_0^* = 4 \cdot 100 = 400 \text{ mm.}$$

$$u_1^* = 4 \cdot 100 + \pi \cdot 200 = 1.028 \text{ mm.}$$

O cálculo de posição do centro geométrico dos perímetros críticos é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Da Tabela 4.52 à 4.55 constam os cálculos.

Tabela 4.52 – Cálculo de  $x_{cg,u_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos	
$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
200	0
100	100
$x_{cg,u_0} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0} =$	
	33 mm

Tabela 4.53 – Cálculo de  $x_{cg,u_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u$ (mm)	$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
100	200	0	$\pi / 2$	314,2	227,3
Trecos $\Delta u$ retos					
$\Delta u$ (mm)					$x_{cg,\Delta u}$ (mm)
200					0
100					300
$x_{cg,u_1} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1} =$					165 mm

Tabela 4.54 – Cálculo de  $x_{cg,u_0^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u^*$ retos		
$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)	
100	50	
100	100	
$x_{cg,u_0^*} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_0^*} =$		75 mm

Tabela 4.55 – Cálculo de  $x_{cg,u_1^*}$  por trechos do perímetro crítico

Trecos $\Delta u^*$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta u^*$ (mm)	$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
100	200	0	$\pi / 2$	314,2	227,3
Trecos $\Delta u^*$ retos					
$\Delta u^*$ (mm)					$x_{cg,\Delta u^*}$ (mm)
100					50
100					300
$x_{cg,u_1^*} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta u} \cdot \Delta u}{u_1^*} =$					207 mm

O cálculo de  $W_{0,y}$  e  $W_{1,y}$  é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.52, 3.54 e 3.59. As Tabelas 4.56 e 4.57 detalham os cálculos.

Tabela 4.56 – Cálculo de  $W_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ retos			
$x_{médio}$ (mm)	$x_{cg,u_0}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
-50	33	100	8.300,0
16,5	33	33	544,5
66,5	33	67	2.244,5
100	33	100	6.700,0
$W_{0,y} = 2 \cdot \sum_{u_0/2} W_{\Delta u} =$			35.578 mm <sup>2</sup>

Tabela 4.57 – Cálculo de  $W_{1,y}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta u$ circulares					
$x_c$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
100	165	200	$\cos^{-1}(65/200)$	$\pi/2$	2.131,7
100	165	200	0	$\cos^{-1}(65/200)$	21.711,4
Trechos $\Delta u$ retos					
$x_{médio}$ (mm)	$x_{cg,u_1}$ (mm)	$\Delta u$ (mm)			$W_{\Delta u,y}$ (mm <sup>2</sup> )
0	165	200			33.000,0
300	165	100			13.500,0
$W_{1,y} = 2 \cdot \sum_{u_1/2} W_{\Delta u} =$					140.686 mm <sup>2</sup>

Como pode ser observado com auxílio da Figura 4.23(a), o perímetro  $u_1$  é interceptado pelas cordoalhas C2, C3, C4 e C5 uma vez, e pelas cordoalhas C8 e C9 duas vezes. O perímetro  $u_0$  acrescido de uma margem de  $d/2$  do pilar também sofre as interseções das mesmas cordoalhas. Trazendo da Tabela 4.51 os valores relativos apenas a estas cordoalhas, são calculados os parâmetro relativos à protensão, dados na Seção 3.1.7.

$$N_{Pk,1} = \sum_{j=2}^5 F_{Pk,j} + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 F_{Pk,j} = 974.700 \text{ N.}$$

$$V_{Pk,0} = V_{Pk,1} = \sum_{j=2}^5 (F_{Pk,j} \cdot 0,00769) + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 (F_{Pk,j} \cdot 0,02499) = 16.021 \text{ N.}$$

Portanto:

$$0,1 \cdot \sigma_{cpk,1} \cdot 1 = 0,1 \cdot \frac{N_{Pk,1}}{u_1 \cdot d} = 0,1 \cdot \frac{974700}{1228 \cdot 100} = 0,794 \text{ MPa.}$$

$$\tau_{cp,0} = \frac{V_{Pk,0}}{u_0 \cdot d} = \frac{16021}{600 \cdot 100} = 0,267 \text{ MPa.}$$

$$\tau_{cp,1} = \frac{V_{Pk,1}}{u_1 \cdot d} = \frac{16021}{1228 \cdot 100} = 0,130 \text{ MPa.}$$

Da Equação 3.12, com  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_y = 0,6$  e  $k_{x,ext} = 0,45$ . Então, pela Equação 3.23 aplicada ao caso experimental, em que  $M_{Sk,y}/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x}/F_{Sk}$ , equivalem, respectivamente, às excentricidades da carga em relação ao centro geométrico do pilar,  $e_x$  e  $-e_y$ ; e,  $M_{Sk,y,i}^*/F_{Sk}$  equivale a  $x_{cg,u_i^*}$ :

$$\beta_{Sk,i} = \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_y u_i}{W_{i,y}} |e_x - x_{cg,u_i^*}| + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} |-e_y|.$$

Logo:

$$\beta_{Sk,0} = \frac{600}{400} + \frac{0,6 \cdot 600}{35578} |525 - 75| + 0 = 6,05328.$$

$$\beta_{Sk,1} = \frac{1228}{1028} + \frac{0,6 \cdot 1228}{140686} |525 - 207| + 0 = 2,85998.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.43):

$$V_{Rk,máx} = \frac{\left[ 0,27 \left( 1 - \frac{55,2}{250} \right) 55,2 + 0,267 \right] 600 \cdot 100}{6,05328} = 117.756 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.44):

$$V_{Rk,c} = \frac{\left[ 0,182 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{100}} \right) (100 \cdot 0,0074 \cdot 55,2)^{1/3} + 0,794 + 0,130 \right] 1228 \cdot 100}{2,85998} = 104.648 \text{ N.}$$

Segundo a NBR 6118:2014, a laje deve romper quando  $F_{Sk} = 104.648 \text{ N}$ . Com o ensaio, BARBÁN (2008) obteve  $V_{exp} = 127.500 \text{ N}$ .

#### 4.5.2. PREVISÃO PELO EUROCODE 2:2004

Como os perímetros críticos  $u_0$ ,  $u_0^*$ ,  $u_1$  e  $u_1^*$  pelo EUROCODE 2:2004 são definidos da mesma forma que pela NBR 6118:2014, todos os dados geométricos relativos aos perímetros, calculados na Seção 4.5.1 se repetem para o EUROCODE 2:2004. As tensões relativas à protensão também são tomadas da mesma forma.

Da Equação 3.64:

$$\xi = \min \left\{ \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{100}} \right) = 2. \right. \\ \left. 2 \right.$$

Da Equação 3.12,  $c_x/c_y = 1$ , tem-se  $k_y = 0,6$  e  $k_{x,ext} = 0,45$ .

A grande diferença em relação ao modelo da NBR 6118:2014 reside no parâmetro  $\beta_{Sk,i}$ : pela Equação 3.72 aplicada ao caso experimental, tem-se:

$$\beta_{Sk,i} = \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_{x,ext} u_i}{W_{i,x}} | -e_y |.$$

Logo:

$$\beta_{Sk,0} = \frac{600}{400} + 0 = 1,5.$$

$$\beta_{Sk,1} = \frac{1228}{1028} + 0 = 1,19455.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.75):

$$V_{Rk,máx} = \frac{\left[ 0,24 \left( 1 - \frac{55,2}{250} \right) 55,2 + 0,267 \right] 600 \cdot 100}{1,5} = 423.594 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.76):

$$V_{Rk,c} = \frac{\max \left\{ \left[ 0,18 \cdot 2 (100 \cdot 0,0074 \cdot 55,2)^{1/3} + 0,794 + 0,130 \right] \cdot 1228 \cdot 100 \right. \\ \left. \left[ 0,0525 \sqrt{2^3 \cdot 55,2} + 0,794 + 0,130 \right] \cdot 1228 \cdot 100 \right\}}{1,19455} = 222.441 \text{ N.}$$

Segundo o EUROCODE 2:2004, a laje deve romper quando  $F_{Sk} = 222.441$  N. Com o ensaio, BARBÁN (2008) obteve  $V_{exp} = 127.500$  N.

Observa-se que a previsão do EUROCODE 2:2004 é muito maior que a carga experimental, ou seja, é contra a segurança. Se alternativamente os parâmetros  $\beta_{Sk,i}$  fossem calculados considerando o momento na direção  $y$ , tal como pela NBR 6118:2014, o resultado teria sido melhor, como demonstrado pelos próximos cálculos:

$$\beta_{Sk,i} = \frac{u_i}{u_i^*} + \frac{k_y \cdot u_i}{W_{i,y}} \left| e_x - x_{cg,u_i} \right| + \frac{k_{x,ext} \cdot u_i}{W_{i,x}} \left| -e_y \right|.$$

Logo:

$$\beta_{Sk,0} = \frac{600}{400} + \frac{0,6 \cdot 600}{35578} |525 - 75| + 0 = 6,05328.$$

$$\beta_{Sk,1} = \frac{1228}{1028} + \frac{0,6 \cdot 1228}{140686} |525 - 207| + 0 = 2,85998.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.75):

$$V_{Rk,máx} = \frac{\left[ 0,24 \left( 1 - \frac{55,2}{250} \right) 55,2 + 0,267 \right] 600 \cdot 100}{6,05328} = 104.966 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.76):

$$V_{Rk,c} = \frac{\max \left\{ \begin{array}{l} \left[ 0,18 \cdot 2 \left( 100 \cdot 0,0074 \cdot 55,2 \right)^{1/3} + 0,794 + 0,130 \right] \cdot 1228 \cdot 100 \\ \left[ 0,0525 \sqrt{2^3 \cdot 55,2} + 0,794 + 0,130 \right] \cdot 1228 \cdot 100 \end{array} \right.}{2,85998} = 92.909 \text{ N.}$$

Segundo o EUROCODE 2:2004 adaptado pela consideração do momento fletor na direção  $y$ , a laje deve romper quando  $F_{Sk} = 92.909$  N. Este resultado se mostra mais próximo do experimental, e à favor da segurança.

### 4.5.3. PREVISÃO PELO ACI 318:2014

Com auxílio Figura 4.25, calcula-se:

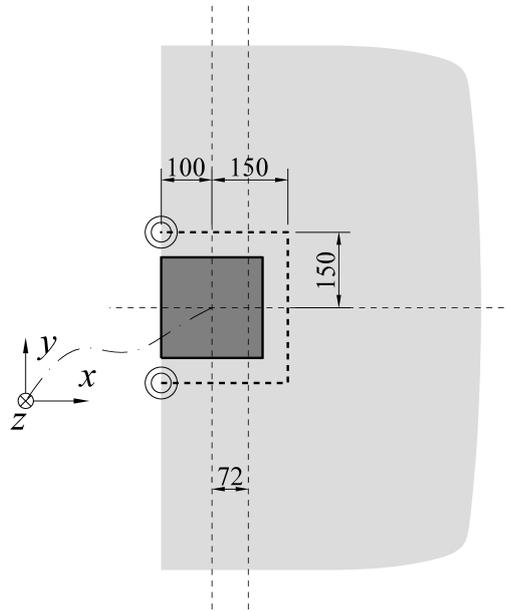


Figura 4.25 – Perímetro crítico para o modelo L14 pelo ACI 318:2014

$$b_0 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 150 = 800 \text{ mm.}$$

$$b_{x,0} = 100 + 150 = 250 \text{ mm.}$$

$$b_{y,0} = 2 \cdot 150 = 300 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico do perímetro crítico é feito por trechos do perímetro na Tabela 4.58, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60.

Tabela 4.58 – Cálculo de  $x_{cg,b_0}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
100	-50
150	75
150	150
$x_{cg,b_0} = \frac{2 \cdot \sum_{b_0/2} x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_0} =$	
	72 mm

O cálculo de  $J_{0,y}$  é feito por trecho do perímetro crítico, com auxílio das Equações 3.127, 3.129, 3.130, 3.132 e 3.90. A Tabela 4.59 detalha os cálculos.

Tabela 4.59 – Cálculo de  $J_{0,y}$  por trechos do perímetro crítico

$d$ (mm)	$x_{cg,b_0}$ (mm)	$x_a$ (mm)	$x_b$ (mm)	$y_a$ (mm)	$y_b$ (mm)	$\Omega$ (rad)	$J_{\Delta b,y}$ (mm <sup>4</sup> )
100	72	-100	150	150	150	-	206.266.667
100	72	150	150	150	0	-	91.260.000
$J_{0,y} = 2 \cdot \sum_{b_0/2} J_{\Delta b,y} =$							595.053.333 mm <sup>4</sup>

Da Equação 3.84,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_s = 30$ , e  $\beta = 1$ .

Das Equações 3.96 e 3.97:

$$\gamma_{vy,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{250}{300}}} = 0,38.$$

$$\gamma_{vx,0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{300}{250}}} = 0,42.$$

Como pode ser observado com auxílio da Figura 4.23(a), o perímetro  $b_0$  é interceptado pelas cordoalhas C2, C3, C4 e C5 uma vez, e pelas cordoalhas C8 e C9 duas vezes. Trazendo da Tabela 4.51 os valores relativos apenas a estas cordoalhas, calcula-se os parâmetro relativos à protensão, dados na Seção 3.3.7.

$$N_{Pk,0} = \sum_{j=2}^5 F_{Pk,j} + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 F_{Pk,j} = 974.700 \text{ N.}$$

$$V_{Pk,0} = \sum_{j=2}^5 (F_{Pk,j} \cdot 0,00769) + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 (F_{Pk,j} \cdot 0,02499) = 16.021 \text{ N.}$$

Portanto:

$$0,3 \cdot f_{pc,0} = 0,3 \cdot \frac{N_{Pk,0}}{b_0 \cdot d} = 0,3 \cdot \frac{974700}{800 \cdot 100} = 3,655 \text{ MPa.}$$

$$v_{pc,0} = \frac{V_{Pk,0}}{b_0 \cdot d} = \frac{16021}{800 \cdot 100} = 0,200 \text{ MPa.}$$

Pela Equação 3.111 aplicada ao caso experimental, em que  $M_{Sk,y}/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x}/F_{Sk}$ , equivalem, respectivamente, às excentricidades  $e_x$  e  $-e_y$ ; além de  $M_{Sk,y,i}^*/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x,i}^*/F_{Sk}$ , que equivalem a  $x_{cg,b_i}$  e  $-y_{cg,b_i}$ :

$$\beta_{Sk,i} = \max_{(x,y) \in b_i} \left\{ \left| 1 + \frac{\gamma_{vy,i} \cdot b_i \cdot d (x - x_{cg,b_i}) (e_x - x_{cg,b_i})}{J_{0,y}} - \frac{\gamma_{vx,i} \cdot b_i \cdot d (y - y_{cg,b_i}) (-e_y + y_{cg,b_i})}{J_{0,x}} \right| \right\}$$

Logo:

$$\beta_{Sk,0} = \max_{(x,y) \in b_0} \left\{ \left| 1 + \frac{0,38800 \cdot 100 (x - 72)}{595053333} (525 - 72) - 0 \right| \right\}$$

Verifica-se que o máximo desta função ocorre no vértice do perímetro  $b_0$  destacado na Figura 4.25, cujas coordenadas são (-100; 150). Assim:

$$\beta_{Sk,0} = 2,98056.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.119):

$$V_{Rk,máx} = \frac{[0,5\sqrt{55,2} + 0,200] 800 \cdot 100}{2,98056} = 105.076 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.120):

$$V_{Rk,c} = \frac{\min \left\{ \begin{array}{l} [0,29 \cdot 1\sqrt{55,2} + 3,655 + 0,200] 800 \cdot 100 \\ [0,083 \left( 1,5 + \frac{30 \cdot 100}{800} \right) 1\sqrt{55,2} + 3,655 + 0,200] 800 \cdot 100 \end{array} \right\}}{2,98056} = 161.301 \text{ N.}$$

Segundo o ACI 318:2014, a laje deve romper quando  $F_{Sk} = 105.076 \text{ N}$ . Com o ensaio, BARBÁN (2008) obteve  $V_{exp} = 127.500 \text{ N}$ .

#### 4.5.4. PREVISÃO PELO *fib* MODEL CODE:2010

Com auxílio da Figura 4.26 e considerando o nível III de aproximação, calcula-se:

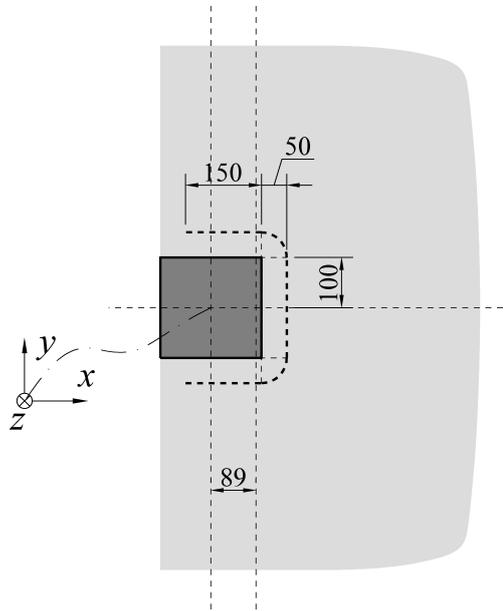


Figura 4.26 – Perímetros críticos para o modelo L14 pelo *fib* MODEL CODE:2010

$$b_1 = 150 \cdot 2 + 100 \cdot 2 + \pi 50 = 657 \text{ mm.}$$

Considerando as distâncias dos pontos de aplicação de carga em relação ao centro geométrico do pilar, mostrados na Figura 4.22(b), tem-se que  $r_{s,x} = r_{s,y} = 800 \text{ mm}$ .

Da Equação 3.140:

$$r_s = \sqrt{800 \cdot 800} = 800 \text{ mm.}$$

O cálculo da posição do centro geométrico do perímetro crítico é feito por trechos do perímetro, com auxílio das Equações 3.55, 3.57 e 3.60. Na Tabela 4.60 consta o cálculo.

Tabela 4.60 – Cálculo de  $x_{cg,b_1}$  por trechos do perímetro crítico

Trechos $\Delta b$ circulares					
$x_c$ (mm)	$r$ (mm)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
100	50	0	$\pi / 2$	78,5	131,8

Continuação da Tabela 4.60

Trechos $\Delta b$ retos	
$\Delta b$ (mm)	$x_{cg,\Delta b}$ (mm)
150	25
100	150
$x_{cg,b_1} = \frac{2 \cdot \sum x_{cg,\Delta b} \cdot \Delta b}{b_1} =$	
	89 mm

Pela simetria com relação ao eixo  $x$ , tem-se:  $y_{cg,b_1} = 0$  mm.

Das Equações 3.142 e 3.143, aplicadas ao caso experimental, em que  $M_{Sk,y}/F_{Sk}$  e  $M_{Sk,x}/F_{Sk}$ , equivalem, respectivamente, às excentricidades  $e_x$  e  $-e_y$ , vem que:

$$e_{u,x,1} = 525 - 89 = 436 \text{ mm.}$$

$$e_{u,y,1} = 0 - 0 = 0 \text{ mm.}$$

Da Equação 3.141:

$$m_{Rk} = \frac{0,0074 \cdot 100^2 \cdot 592}{1} \left( 1 - \frac{0,0074 \cdot 592 \cdot 1}{2 \cdot 0,95 \cdot 55,2 \cdot 1} \right) = 41.978 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.147, com  $b_s = 1,5 \cdot 800 = 1.200$  mm e com uma estimativa inicial de  $F_{Sk} = 50.000$  N, tem-se:

$$m_{sk,1} = \max \left\{ \begin{array}{l} 50000 \left( \frac{1}{8} + \frac{|0|}{1200} \right) \\ 50000 \left( \frac{1}{8} + \frac{|436|}{2 \cdot 1200} \right) \\ \frac{50000}{4} \end{array} \right. = 15.333 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Como pode ser observado com auxílio da Figura 4.23(a), o perímetro  $b_1$  é interceptada pelas cordoalhas C2, C3, C4 e C5 uma vez, e pelas cordoalhas C8 e C9 duas vezes. Trazendo da Tabela 4.51 os valores relativos apenas a estas cordoalhas, calculam-se os parâmetro relativos à protensão, dados na Seção 3.4.6.

$$N_{Pk,1} = \sum_{j=2}^5 F_{Pk,j} + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 F_{Pk,j} = 974.700 \text{ N.}$$

$$V_{Pk,1} = \sum_{j=2}^5 (F_{Pk,j} \cdot 0,00769) + 2 \cdot \sum_{j=8}^9 (F_{Pk,j} \cdot 0,02499) = 16.021 \text{ N.}$$

Com auxílio das cotas da Figura 4.23(c) e (d), estima-se  $e_{p,1} = 76 - 124/2 = 14 \text{ mm}$ . Portanto, da Equação 3.163, tem-se:

$$m_{p,i} = \frac{974700 \cdot 14}{1200} = 11.372 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

Da Equação 3.162:

$$\psi_{III,k,1} = 1,2 \frac{800}{100} \frac{592}{206000 \cdot 1} \left( \frac{15333 - 11372}{41978 - 11372} \right)^{1,5} = 0,00128 \text{ rad.}$$

BARBÁN (2008) relata ter utilizado concreto com brita 0, portanto será admitido diâmetro máximo do agregado igual a 12,5 mm. Da Equação 3.150 :

$$k_{dg} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{32}{16 + 12,5} = 1,12281. \\ 0,75 \end{array} \right.$$

Da Equação 3.149:

$$k_{\psi,k,1} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 1,12281 \cdot 0,00128 \cdot 100} = 0,6 \\ 0,6 \end{array} \right.$$

Com auxílio da Figura 4.26 calcula-se a área interna ao perímetro crítico  $b_1$  :

$$\text{Área} = \pi \cdot 50^2 / 2 + 200 \cdot 50 + 150 \cdot 300 = 58.927 \text{ mm}^2.$$

Então, determina-se o diâmetro  $b_{u,1}$  do círculo de mesma área:

$$b_{u,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot 58927}{\pi}} = 274 \text{ mm.}$$

Das Equações 3.153 e 3.152:

$$e_{u,1} = \sqrt{(436)^2 + (0)^2} = 436 \text{ mm.}$$

$$k_{e,1} = \frac{1}{1 + \frac{436}{274}} = 0,38592.$$

Da Equação 3.151:

$$b_{0,1} = 0,38592 \cdot 657 = 254 \text{ mm.}$$

Como não há armaduras de punção,  $k_{sys} = 1$ .

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154) acrescida da carga vertical de protensão:

$$V_{Rk,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 0,6 \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 \\ \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 \end{array} \right. = 129.249 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.155) acrescida da carga vertical de protensão:

$$V_{Rk,c} = 0,6 \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 = 129.249 \text{ N.}$$

A resistência resulta maior que a solicitação inicialmente arbitrada de  $F_{Sk} = 50.000 \text{ N}$ , o que significa que neste nível de carga a laje ainda não rompe, segundo este modelo de cálculo.

Recalculando com  $F_{Sk} = 70.000$ , os resultados seriam:

$$m_{sk,1} = \max \left\{ \begin{array}{l} 70000 \left( \frac{1}{8} + \frac{|0|}{1200} \right) \\ 70000 \left( \frac{1}{8} + \frac{|436|}{2 \cdot 1200} \right) \\ \frac{70000}{4} \end{array} \right. = 21.467 \text{ N} \cdot \text{mm/mm.}$$

$$\psi_{III,k,1} = 1,2 \frac{800}{100} \frac{592}{206000 \cdot 1} \left( \frac{21467 - 11372}{41978 - 11372} \right)^{1,5} = 0,00523 \text{ rad.}$$

$$k_{\psi,k,1} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot 1,12281 \cdot 0,00523 \cdot 100} \\ 0,6 \end{array} \right. = 0,49297.$$

- Verificação da compressão diagonal (Equação 3.154):

$$V_{Rk,máx} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 0,49297 \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 \\ \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 \end{array} \right. = 109.051 \text{ N.}$$

- Verificação da tração diagonal (Equação 3.155):

$$V_{Rk,c} = 0,49297 \frac{\sqrt{55,2}}{1} 254 \cdot 100 + 16021 = 109.051 \text{ N.}$$

Novamente, a resistência resulta maior que a solicitação arbitrada de  $F_{Sk} = 70.000 \text{ N}$ , significando que neste nível de carga a laje ainda não rompe segundo este modelo de cálculo, mas está se aproximando da carga de ruptura. Realizando mais algumas iterações com pequenos incrementos em  $F_{Sk}$ , a solicitação se iguala à resistência quando  $F_{Sk} = 89.609 \text{ N}$ .

Portanto, segundo o *fib* MODEL CODE:2010, a laje deve romper quando  $F_{Sk} = 89.609 \text{ N}$ . Com o ensaio, BARBÁN (2008) obteve  $V_{exp} = 127.500 \text{ N}$ .

## 5. ANÁLISE DOS MODELOS DE CÁLCULO

Os dimensionamentos detalhados no Capítulo 4 para as ligações laje-pilar do pavimento pelos diferentes modelos de cálculo podem ser conferidos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Resumo dos dimensionamentos das ligações laje-pilar à punção

Modelo Ligação	NBR 6118:214	EUROCODE 2:2004	ACI 318:2014	fib MODEL CODE:2010
B2 (Interna) $F_{Sd} = 542,0 \text{ kN}$	21 <i>studs</i> de 8 mm: 7 linhas 3 camadas $V_{Rd,max} = 1.096 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 689 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 577 \text{ kN}$	50 <i>studs</i> de 8 mm: 10 linhas 5 camadas $V_{Rd,max} = 909 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 597 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 563 \text{ kN}$	56 <i>studs</i> de 8 mm: 7 linhas 8 camadas $V_{Rd,max} = 872 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 561 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 581 \text{ kN}$	40 <i>studs</i> de 8 mm: 8 linhas 5 camadas $V_{Rd,max} = 1.026 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 670 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 604 \text{ kN}$
A2 (Borda) $F_{Sd} = 238,1 \text{ kN}$	12 <i>studs</i> de 8 mm: 4 linhas 3 camadas $V_{Rd,max} = 294 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 279 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 256 \text{ kN}$	24 <i>studs</i> de 8 mm: 6 linhas 4 camadas $V_{Rd,max} = 504 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 291 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 250 \text{ kN}$	36 <i>studs</i> de 8 mm: 6 linhas 6 camadas $V_{Rd,max} = 357 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 257 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 259 \text{ kN}$	15 <i>studs</i> de 8 mm: 5 linhas 3 camadas $V_{Rd,max} = 425 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 274 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 256 \text{ kN}$
A1 (Canto) $F_{Sd} = 111,3 \text{ kN}$	9 <i>studs</i> de 8 mm: 3 linhas 3 camadas $V_{Rd,max} = 119 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 125 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 122 \text{ kN}$	12 <i>studs</i> de 8 mm: 3 linhas 4 camadas $V_{Rd,max} = 268 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 143 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 115 \text{ kN}$	16 <i>studs</i> de 8 mm: 4 linhas 4 camadas $V_{Rd,max} = 160 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 118 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 117 \text{ kN}$	12 <i>studs</i> de 8 mm: 4 linhas 3 camadas $V_{Rd,max} = 163 \text{ kN}$ $V_{Rd,cs} = 126 \text{ kN}$ $V_{Rd,out} = 128 \text{ kN}$

Distribuição radial em todos os casos, com  $s_0 = s_r = 70 \text{ mm}$ .

Foi possível nivelar os dimensionamentos resumidos na Tabela 5.1 utilizando os mesmos espaçamentos e diâmetros dos *studs*. Avaliando o total de *studs* necessários para a ligação interna B2 na Tabela 5.1, pode-se constatar que o dimensionamento pelo ACI 318:2014 foi o mais conservador enquanto pela NBR 6118:2014 foi o menos conservador. Para as ligações de borda e de canto, esta mesma relação se repete entre as normas. No caso da previsão da carga de ruptura experimental, realizada para o modelo de ligação laje-pilar de borda L14 de BARBÁN (2008), os resultados por cada modelo de cálculo constam na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Resumo das cargas de ruptura previstas para o modelo L14 de BARBÁN (2008)

Modelo Ligação	NBR 6118:2014	EUROCODE 2:2004	ACI 318:2014	fib MODEL CODE:2010
L14 (Borda) $V_{exp} = 127,5 \text{ kN}$	$V_{Rk} = 104,6 \text{ kN}$ $(0,82 \cdot V_{exp})$	$V_{Rk} = 222,4 \text{ kN}$ $(1,74 \cdot V_{exp})$ * $V_{Rk} = 92,9 \text{ kN}$ $(0,73 \cdot V_{exp})$	$V_{Rk} = 105,1 \text{ kN}$ $(0,82 \cdot V_{exp})$	$V_{Rk} = 89,6 \text{ kN}$ $(0,70 \cdot V_{exp})$
* <sup>1</sup> Considerando as excentricidades de carregamento nas duas direções, $e_x$ e $e_y$ (EUROCODE 2:2004 só considera $e_y$ );				

Com auxílio da Tabela 5.2, pode-se notar que, pela NBR 6118:2014 e pelo ACI 318:2014 são obtidas as melhores previsões, ambas praticamente iguais e à favor da segurança, uma vez que prevêem a ruptura com carga 18% menor do que a obtida com o experimento. Por outro lado, a previsão pelo EUROCODE 2:2004 resulta 74% maior que a obtida com o experimento, ou seja, contra a segurança. Vale ressaltar que originalmente o EUROCODE 2:2004 considera somente a excentricidade  $e_y$  em ligações de borda. Se o EUROCODE 2:2004 considerasse as duas excentricidades de carregamento,  $e_x$  e  $e_y$ , a previsão obtida seria próxima da carga experimental: 27% menor, e à favor da segurança. Pelo fib MODEL CODE:2010 a previsão foi 30% menor que a carga experimental.

Estas são conclusões aplicáveis apenas ao modelo de BARBÁN (2008). Para generalizá-las seria necessário analisar um banco de dados de lajes semelhantes a esta.

## 5.1. ELABORAÇÃO DE UM PROGRAMA DE CÁLCULO

As verificações de projeto descritas no Capítulo 3 e exemplificadas no Capítulo 4 para cada modelo de cálculo foram programadas no software EXCEL, possibilitando a rápida verificação de uma ligação laje-pilar genérica à punção. A maior dificuldade ao formular o código do programa se deu nas expressões matemáticas dos parâmetros  $W_{out,x}$  e  $W_{out,y}$  – pela NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004 –  $J_{out,x}$  e  $J_{out,y}$  – pelo ACI 318:2014 – e  $b_{u,out}$  – pelo

*fib* MODEL CODE:2010. Estas formulações puderam ser elaboradas com base nos desenvolvimentos apresentados neste texto nas Seções 3.1.9 e 3.3.9. Uma vez vencida esta etapa, o programa se torna muito útil para estudar uma ligação laje-pilar, seja para projeto ou para pesquisa experimental.

O programa será apresentado a seguir com dados de entrada iguais aos utilizados no Capítulo 4 para cada ligação laje-pilar, B2, A2 e A1, confirmando assim os dimensionamentos obtidos nos cálculos detalhados ao longo do capítulo.

A Figura 5.1 ilustra o menu inicial do programa, onde o usuário escolhe a norma que pretende utilizar, a posição do pilar no pavimento, a forma da seção transversal do pilar, o tipo de distribuição das armaduras de punção, caso seja necessário adotá-las, e o tipo de cálculo a ser realizado.

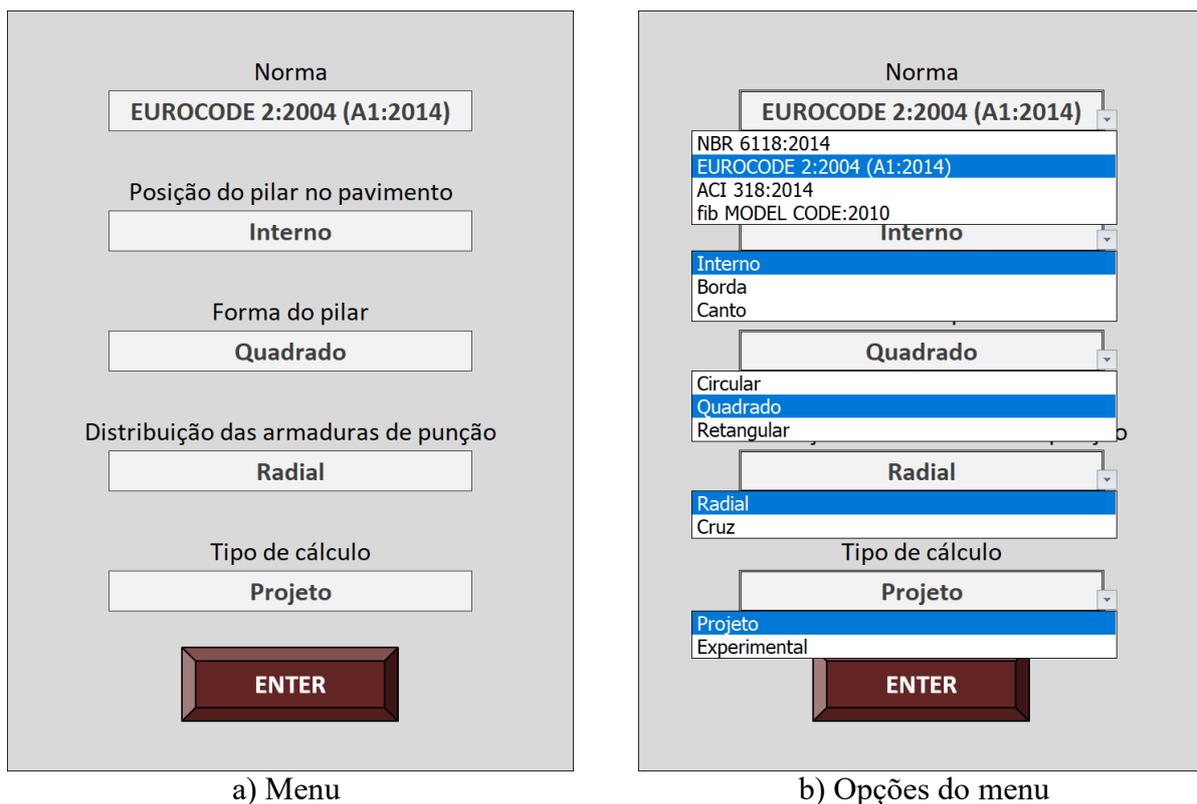


Figura 5.1 – Menu inicial do programa

Da Figura 5.2 à 5.13 são apresentados os formulários do programa para cada norma, sempre considerando pilar quadrado e distribuição radial das armaduras de punção, em conformidade

com as ligações laje-pilar calculadas no Capítulo 4. Nestes formulários, o usuário fornece os dados de entrada – células com fundo na cor branca – e o programa imediatamente retorna os parâmetros calculados, além da carga final de resistência – células com fundo na cor cinza.

A primeira coluna, “Dados de entrada”, contém dados que caracterizam a geometria da ligação laje-pilar. A segunda coluna, também nomeada “Dados de entrada” contém dados utilizados para caracterizar os materiais. Na terceira coluna “Verificações de projeto” o projetista informa as solicitações obtidas da análise estrutural e obtêm como resultado as cargas resistentes de projeto. Caso o usuário opte, no menu inicial, por uma verificação experimental, a terceira coluna seria parecida, mudando apenas os dados de entrada, que seriam as excentricidades  $e_x$  e  $e_y$ , do carregamento aplicado ao modelo experimental.

Nas Figuras 5.2 à 5.5 constam os resultados para a ligação laje-pilar interna B2, onde os dados de entrada “ $c$ ” “ $n$ ” e “ $q$ ” são, respectivamente, o lado do pilar quadrado, a quantidade de linhas e a quantidade de camadas de armaduras de punção.

NBR 6118:2014. Pilar quadrado interno. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente										
<b>Dados de entrada</b>			<b>Dados de entrada</b>			<b>Verificações de projeto</b>				
$d$	0,159	[m]	$h$	0,2	[m]	$F_{Sd}$	542	[kN]		
$c$	0,35	[m]	$f_{ck}$	35	[MPa]	$M_{Sd,y}$	-10,6	[kNm]		
$n$	7	[ ]	$\rho_{flexão}$	0,0101	[ ]	$M_{Sd,x}$	-10,6	[kNm]		
$q$	3	[ ]	Armadura	Studs	[ ]					
$s_0$	0,07	[m]	$\varnothing_{sv}$	0,008	[m]	<b>Resultados</b>				
$s_r$	0,07	[m]	$f_{ywk}$	500	[MPa]	$V_{Rd,máx}$	1096,19	[kN]		
			$\alpha$	90	[graus]	$V_{Rd,cs}$	688,53	[kN]		
$u_0$	1,400	[m]	$\tau_{Rk1}$	1,267	[MPa]	$V_{Rd,out}$	576,51	[kN]		
$u_1$	3,398	[m]	$\tau_{Rk2}$	8,127	[MPa]					
$u_{out}$	4,224	[m]	$\tau_{Rk3}$	1,740	[MPa]	Se não houvesse armaduras de punção:				
$W_{0,y}$	0,184	[m <sup>2</sup> ]	$\tau_{Rd1}$	0,905	[MPa]	$V_{Rd,máx}$	1096,19	[kN]		
$W_{0,x}$	0,184	[m <sup>2</sup> ]	$\tau_{Rd2}$	5,805	[MPa]	$V_{Rd,c}$	457,60	[kN]		
$W_{1,y}$	1,161	[m <sup>2</sup> ]	$\tau_{Rd3}$	1,362	[MPa]					
$W_{1,x}$	1,161	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{out,y}$	1,840	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{out,x}$	1,799	[m <sup>2</sup> ]								

Figura 5.2 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pela NBR 6118:2014

EUROCODE 2:2004. Pilar quadrado interno. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente						
←	<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>		<b>Verificações de projeto</b>	
	$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]	$F_{Sd}$	542 [kN]
	$c$	0,35 [m]	$\rho_{flexão}$	0,0101 [ ]	$M_{Sd,y}$	-10,6 [kNm]
	$n$	10 [ ]	Armadura	Studs [ ]	$M_{Sd,x}$	-10,6 [kNm]
	$q$	5 [ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]	<b>Resultados</b>	
	$s_0$	0,07 [m]	$f_{yvk}$	500 [MPa]	$V_{Rd,máx}$	909,43 [kN]
	$s_r$	0,07 [m]	$\alpha$	90 [graus]	$V_{Rd,cs}$	597,31 [kN]
	$u_0$	1,400 [m]	$v_{Rk,c}$	1,181 [MPa]	$V_{Rd,out}$	564,64 [kN]
	$u_1$	3,398 [m]	$v_{Rk,máx}$	7,224 [MPa]	Se não houvesse	
	$u_{out}$	4,730 [m]	$v_{Rk,cs}$	1,772 [MPa]	armaduras de punção:	
	$W_{0,y}$	0,184 [m <sup>2</sup> ]	$v_{Rd,c}$	0,788 [MPa]	$V_{Rd,máx}$	909,43 [kN]
	$W_{0,x}$	0,184 [m <sup>2</sup> ]	$v_{Rd,máx}$	4,816 [MPa]	$V_{Rd,c}$	398,20 [kN]
	$W_{1,y}$	1,161 [m <sup>2</sup> ]	$v_{Rd,cs}$	1,181 [MPa]		
	$W_{1,x}$	1,161 [m <sup>2</sup> ]				
	$W_{out,y}$	2,259 [m <sup>2</sup> ]				
$W_{out,x}$	2,263 [m <sup>2</sup> ]					

Figura 5.3 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo EUROCODE 2:2004

ACI 318:2014. Pilar quadrado interno. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente						
←	<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>		<b>Verificações de projeto</b>	
	$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]	$F_{Sd}$	542 [kN]
	$c$	0,35 [m]	Armadura	Studs [ ]	$M_{Sd,y}$	-10,6 [kNm]
	$n$	7 [ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]	$M_{Sd,x}$	-10,6 [kNm]
	$q$	8 [ ]	$f_{yk}$	500 [MPa]	<b>Resultados</b>	
	$s_0$	0,07 [m]	$\alpha$	90 [graus]	$V_{Rd,máx}$	869,72 [kN]
	$s_r$	0,07 [m]	$v_{Rk,máx}$	3,905 [MPa]	$V_{Rd,cs}$	560,40 [kN]
	$b_0$	2,036 [m]	$v_{Rk,c}$	1,952 [MPa]	$V_{Rd,out}$	581,97 [kN]
	$b_{out}$	5,001 [m]	$v_{Rk,cs}$	2,516 [MPa]	Se não houvesse	
	$J_{0,y}$	0,014 [m <sup>4</sup> ]	$v_{Rk,out}$	1,006 [MPa]	armaduras de punção:	
	$J_{0,x}$	0,014 [m <sup>4</sup> ]	$v_{Rd,máx}$	2,928 [MPa]	$V_{Rd,máx}$	658,88 [kN]
	$J_{out,y}$	0,236 [m <sup>4</sup> ]	$v_{Rd,c}$	1,464 [MPa]	$V_{Rd,c}$	434,86 [kN]
	$J_{out,x}$	0,236 [m <sup>4</sup> ]	$v_{Rd,cs}$	1,887 [MPa]		
			$v_{Rd,out}$	0,754 [MPa]		

Figura 5.4 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo ACI 318:2014

fib MODEL CODE:2010. Pilar quadrado interno. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente									
←	<b>Dados de entrada</b>			<b>Dados de entrada</b>			<b>Verificações de projeto</b>		
	$d$	0,159	[m]	$f_{ck}$	35	[MPa]	$F_{Sd}$	542	[kN]
	$d_v$	0,159	[m]	$d_g$	0,019	[m]	$M_{Sd,y}$	-10,6	[kNm]
	$d_{v,out}$	0,134	[m]	$\rho_{flexão}$	0,0101	[ ]	$M_{Sd,x}$	-10,6	[kNm]
	$c$	0,35	[m]	Armadura	Studs	[ ]	<b>Resultados</b>		
	$n$	8	[ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008	[m]	$V_{Rd,máx,I}$	659,58	[kN]
	$q$	5	[ ]	$f_{yk,punção}$	500	[MPa]	$V_{Rd,cs,I}$	569,01	[kN]
	$s_0$	0,07	[m]	$\alpha$	90	[graus]	$V_{Rd,out,I}$	388,96	[kN]
	$s_r$	0,07	[m]	$f_{yk,flexão}$	500	[MPa]	$V_{Rd,máx,II}$	907,87	[kN]
	$b_1$	1,900	[m]	$E_s$	210000	[MPa]	$V_{Rd,cs,II}$	657,68	[kN]
	$b_{out}$	3,636	[m]	$r_{s,x}$	1,3	[m]	$V_{Rd,out,II}$	535,38	[kN]
				$r_{s,y}$	1,3	[m]	$V_{Rd,máx,III}$	1025,11	[kN]
							$V_{Rd,cs,III}$	699,55	[kN]
							$V_{Rd,out,III}$	604,52	[kN]

Figura 5.5 – Cálculo da ligação laje-pilar interna B2 pelo fib MODEL CODE:2010

Por meio do programa, as cargas resistentes de projeto da ligação laje pilar interna B2 resultaram iguais àquelas calculadas no Capítulo 4, resumidas na Tabela 5.1.

Nas Figuras 5.6 à 5.9 constam os resultados do programa para a ligação laje-pilar de borda A2, onde aparece mais um dado de entrada, “ $H_x$ ”, que é a distância da borda livre da laje à face do pilar, medida na direção  $x$ . Esta distância é comumente denominada no meio técnico com o termo em inglês *overhang*, significando algo que se estende, um trecho em balanço.

Para a ligação laje pilar de canto A1, cujos resultados constam nas Figuras 5.10 à 5.13, aparece ainda o *overhang* medido na direção  $y$ .

NBR 6118:2014. Pilar quadrado de borda. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente										
<b>Dados de entrada</b>			<b>Dados de entrada</b>			<b>Verificações de projeto</b>				
$d$	0,159	[m]	$h$	0,2	[m]	$F_{Sd}$	238,1	[kN]		
$c$	0,35	[m]	$f_{ck}$	35	[MPa]	$M_{Sd,y}$	101,2	[kNm]		
$H_x$	0	[m]	$\rho_{flexão}$	0,0084	[ ]	$M_{Sd,x}$	-7,3	[kNm]		
$n$	4	[ ]	Armadura	Studs	[ ]				<b>Resultados</b>	
$q$	3	[ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008	[m]	$V_{Rd,máx}$	294,18	[kN]		
$s_0$	0,07	[m]	$f_{yw}$	500	[MPa]	$V_{Rd,cs}$	278,34	[kN]		
$s_r$	0,07	[m]	$\alpha$	90	[graus]	$V_{Rd,out}$	255,75	[kN]		
$u_0$	1,050	[m]	$\tau_{Rk1}$	1,192	[MPa]				Se não houvesse	
$u_1$	2,049	[m]	$\tau_{Rk2}$	8,127	[MPa]				armaduras de punção:	
$u_{out}$	2,303	[m]	$\tau_{Rk3}$	1,642	[MPa]	$V_{Rd,máx}$	294,18	[kN]		
$u_0^*$	0,700	[m]	$\tau_{Rd1}$	0,851	[MPa]	$V_{Rd,c}$	184,30	[kN]		
$u_1^*$	1,699	[m]	$\tau_{Rd2}$	5,805	[MPa]					
$u_{out}^*$	1,953	[m]	$\tau_{Rd3}$	1,286	[MPa]					
$W_{0,y}$	0,109	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{0,x}$	0,153	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{1,y}$	0,393	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{1,x}$	0,753	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{out,y}$	0,565	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{out,x}$	1,099	[m <sup>2</sup> ]								

Figura 5.6 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pela NBR 6118:2014

EUROCODE 2:2004. Pilar quadrado de borda. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente										
<b>Dados de entrada</b>			<b>Dados de entrada</b>			<b>Verificações de projeto</b>				
$d$	0,159	[m]	$f_{ck}$	35	[MPa]	$F_{Sd}$	238,1	[kN]		
$c$	0,35	[m]	$\rho_{flexão}$	0,0084	[ ]	$M_{Sd,y}$	101,2	[kNm]		
$H_x$	0	[m]	Armadura	Studs	[ ]	$M_{Sd,x}$	-7,3	[kNm]		
$n$	6	[ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008	[m]				<b>Resultados</b>	
$q$	4	[ ]	$f_{yw}$	500	[MPa]	$V_{Rd,máx}$	504,22	[kN]		
$s_0$	0,07	[m]	$\alpha$	90	[graus]	$V_{Rd,cs}$	291,09	[kN]		
$s_r$	0,07	[m]	$v_{Rk,c}$	1,111	[MPa]	$V_{Rd,out}$	250,56	[kN]		
$u_0$	1,050	[m]	$v_{Rk,máx}$	7,224	[MPa]				Se não houvesse	
$u_1$	2,049	[m]	$v_{Rk,cs}$	1,667	[MPa]	$V_{Rd,máx}$	504,22	[kN]		
$u_{out}$	2,531	[m]	$v_{Rd,c}$	0,741	[MPa]	$V_{Rd,c}$	194,06	[kN]		
$u_0^*$	0,700	[m]	$v_{Rd,máx}$	4,816	[MPa]					
$u_1^*$	1,699	[m]	$v_{Rd,cs}$	1,111	[MPa]					
$u_{out}^*$	2,181	[m]								
$W_{0,x}$	0,153	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{1,x}$	0,753	[m <sup>2</sup> ]								
$W_{out,x}$	1,196	[m <sup>2</sup> ]								

Figura 5.7 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo EUROCODE 2:2004

ACI 318:2014. Pilar quadrado de borda. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente			
			
<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>	
$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]
$c$	0,35 [m]	Armadura	Studs [ ]
$H_x$	0 [m]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]
$n$	6 [ ]	$f_{yk}$	500 [MPa]
$q$	6 [ ]	$\alpha$	90 [graus]
$s_0$	0,07 [m]	$\tau_{Rk,máx}$	3,905 [MPa]
$s_r$	0,07 [m]	$\tau_{Rk,c}$	1,952 [MPa]
$b_0$	1,368 [m]	$\tau_{Rk,cs}$	2,802 [MPa]
$b_{out}$	2,447 [m]	$\tau_{Rk,out}$	1,006 [MPa]
$J_{0,y}$	0,005 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,máx}$	2,928 [MPa]
$J_{0,x}$	0,011 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,c}$	1,464 [MPa]
$J_{out,y}$	0,026 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,cs}$	2,101 [MPa]
$J_{out,x}$	0,098 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,out}$	0,754 [MPa]
		<b>Verificações de projeto</b>	
		$F_{Sd}$	238,1 [kN]
		$M_{Sd,y}$	101,2 [kNm]
		$M_{Sd,x}$	-7,3 [kNm]
		<b>Resultados</b>	
		$V_{Rd,máx}$	356,77 [kN]
		$V_{Rd,cs}$	256,01 [kN]
		$V_{Rd,out}$	258,74 [kN]
		Se não houvesse armaduras de punção:	
		$V_{Rd,máx}$	270,28 [kN]
		$V_{Rd,c}$	178,39 [kN]

Figura 5.8 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo ACI 318:2014

fib MODEL CODE:2010. Pilar quadrado de borda. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente			
			
<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>	
$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]
$d_v$	0,159 [m]	$d_g$	0,019 [m]
$d_{v,out}$	0,134 [m]	$\rho_{flexão}$	0,0084 [ ]
$c$	0,35 [m]	Armadura	Studs [ ]
$H_x$	0 [m]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]
$n$	5 [ ]	$f_{yk,punção}$	500 [MPa]
$q$	3 [ ]	$\alpha$	90 [graus]
$s_0$	0,07 [m]	$f_{yk,flexão}$	500 [MPa]
$s_r$	0,07 [m]	$E_s$	210000 [MPa]
$b_1$	1,077 [m]	$r_{s,x}$	0,9 [m]
$b_{out}$	1,739 [m]	$r_{s,y}$	1,2 [m]
		<b>Verificações de projeto</b>	
		$F_{Sd}$	238,1 [kN]
		$M_{Sd,y}$	101,2 [kNm]
		$M_{Sd,x}$	-7,3 [kNm]
		<b>Resultados</b>	
		$V_{Rd,máx,I}$	285,56 [kN]
		$V_{Rd,cs,I}$	239,16 [kN]
		$V_{Rd,out,I}$	170,78 [kN]
		$V_{Rd,máx,II}$	384,16 [kN]
		$V_{Rd,cs,II}$	274,37 [kN]
		$V_{Rd,out,II}$	229,75 [kN]
		$V_{Rd,máx,III}$	423,82 [kN]
		$V_{Rd,cs,III}$	273,77 [kN]
		$V_{Rd,out,III}$	256,10 [kN]

Figura 5.9 – Cálculo da ligação laje-pilar de borda A2 pelo fib MODEL CODE:2010

NBR 6118:2014. Pilar quadrado de canto. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente			
			
<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>	
$d$	0,159 [m]	$h$	0,2 [m]
$c$	0,35 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]
$H_x$	0 [m]	$\rho_{flexão}$	0,0072 [ ]
$H_y$	0 [m]	Armadura	Studs [ ]
$n$	3 [ ]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]
$q$	3 [ ]	$f_{ywk}$	500 [MPa]
$s_0$	0,07 [m]	$\alpha$	90 [graus]
$s_r$	0,07 [m]		
$u_0$	0,700 [m]	$\tau_{Rk1}$	1,132 [MPa]
$u_1$	1,200 [m]	$\tau_{Rk2}$	8,127 [MPa]
$u_{out}$	1,454 [m]	$\tau_{Rk3}$	1,800 [MPa]
$u_0^*$	0,350 [m]	$\tau_{Rd1}$	0,809 [MPa]
$u_1^*$	0,850 [m]	$\tau_{Rd2}$	5,805 [MPa]
$u_{out}^*$	1,104 [m]	$\tau_{Rd3}$	1,430 [MPa]
$W_{0,y}$	0,069 [m <sup>2</sup> ]		
$W_{0,x}$	0,069 [m <sup>2</sup> ]		
$W_{1,y}$	0,227 [m <sup>2</sup> ]		
$W_{1,x}$	0,227 [m <sup>2</sup> ]		
$W_{out,y}$	0,352 [m <sup>2</sup> ]		
$W_{out,x}$	0,352 [m <sup>2</sup> ]		
		<b>Verificações de projeto</b>	
		$F_{Sd}$	111,3 [kN]
		$M_{Sd,y}$	56,3 [kNm]
		$M_{Sd,x}$	56,3 [kNm]
		<b>Resultados</b>	
		$V_{Rd,máx}$	119,10 [kN]
		$V_{Rd,cs}$	124,32 [kN]
		$V_{Rd,out}$	121,92 [kN]
		Se não houvesse armaduras de punção:	
		$V_{Rd,máx}$	119,10 [kN]
		$V_{Rd,c}$	70,29 [kN]

Figura 5.10 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pela NBR 6118:2014

EUROCODE 2:2004. Pilar quadrado de canto. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente			
			
<b>Dados de entrada</b>		<b>Dados de entrada</b>	
$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]
$c$	0,35 [m]	$\rho_{flexão}$	0,0072 [ ]
$H_x$	0 [m]	Armadura	Studs [ ]
$H_y$	0 [m]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]
$n$	3 [ ]	$f_{ywk}$	500 [MPa]
$q$	4 [ ]	$\alpha$	90 [graus]
$s_0$	0,07 [m]		
$s_r$	0,07 [m]	$v_{Rk,c}$	1,055 [MPa]
$u_0$	0,700 [m]	$v_{Rk,máx}$	7,224 [MPa]
$u_1$	1,200 [m]	$v_{Rk,cs}$	1,583 [MPa]
$u_{out}$	1,381 [m]	$v_{Rd,c}$	0,704 [MPa]
$u_0^*$	0,350 [m]	$v_{Rd,máx}$	4,816 [MPa]
$u_1^*$	0,850 [m]	$v_{Rd,cs}$	1,055 [MPa]
$u_{out}^*$	1,031 [m]		
		<b>Verificações de projeto</b>	
		$F_{Sd}$	111,3 [kN]
		$M_{Sd,y}$	56,3 [kNm]
		$M_{Sd,x}$	56,3 [kNm]
		<b>Resultados</b>	
		$V_{Rd,máx}$	268,01 [kN]
		$V_{Rd,cs}$	142,56 [kN]
		$V_{Rd,out}$	115,36 [kN]
		Se não houvesse armaduras de punção:	
		$V_{Rd,máx}$	268,01 [kN]
		$V_{Rd,c}$	95,04 [kN]

Figura 5.11 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo EUROCODE 2:2004

ACI 318:2014. Pilar quadrado de canto. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente					
	<b>Dados de entrada</b>	<b>Dados de entrada</b>	<b>Verificações de projeto</b>		
$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]	$F_{Sd}$	111,3 [kN]
$c$	0,35 [m]	Armadura	Studs [ ]	$M_{Sd,y}$	56,3 [kNm]
$H_x$	0 [m]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]	$M_{Sd,x}$	56,3 [kNm]
$H_y$	0 [m]	$f_{yk}$	500 [MPa]	<b>Resultados</b>	
$n$	4 [ ]	$\alpha$	90 [graus]	$V_{Rd,máx}$	158,70 [kN]
$q$	4 [ ]	$\tau_{Rk,máx}$	3,905 [MPa]	$V_{Rd,cs}$	117,20 [kN]
$s_0$	0,07 [m]	$\tau_{Rk,c}$	1,952 [MPa]	$V_{Rd,out}$	117,19 [kN]
$s_r$	0,07 [m]	$\tau_{Rk,cs}$	2,883 [MPa]	Se não houvesse armaduras de punção:	
$b_0$	0,859 [m]	$\tau_{Rk,out}$	1,006 [MPa]	$V_{Rd,máx}$	120,23 [kN]
$b_{out}$	1,184 [m]	$\tau_{Rd,máx}$	2,928 [MPa]	$V_{Rd,c}$	79,35 [kN]
$J_{0,y}$	0,003 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,c}$	1,464 [MPa]		
$J_{0,x}$	0,003 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,cs}$	2,163 [MPa]		
$J_{out,y}$	0,010 [m <sup>4</sup> ]	$\tau_{Rd,out}$	0,754 [MPa]		
$J_{out,x}$	0,010 [m <sup>4</sup> ]				

Figura 5.12 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo ACI 318:2014

fib MODEL CODE:2010. Pilar quadrado de canto. Laje com armaduras de punção distribuídas radialmente					
	<b>Dados de entrada</b>	<b>Dados de entrada</b>	<b>Verificações de projeto</b>		
$d$	0,159 [m]	$f_{ck}$	35 [MPa]	$F_{Sd}$	111,3 [kN]
$d_v$	0,159 [m]	$d_g$	0,019 [m]	$M_{Sd,y}$	56,3 [kNm]
$d_{v,out}$	0,134 [m]	$\rho_{flexão}$	0,0072 [ ]	$M_{Sd,x}$	56,3 [kNm]
$c$	0,35 [m]	Armadura	Studs [ ]	<b>Resultados</b>	
$H_x$	0 [m]	$\varnothing_{sv}$	0,008 [m]	$V_{Rd,máx,I}$	115,30 [kN]
$H_y$	0 [m]	$f_{yk,punção}$	500 [MPa]	$V_{Rd,cs,I}$	116,10 [kN]
$n$	4 [ ]	$\alpha$	90 [graus]	$V_{Rd,out,I}$	91,50 [kN]
$q$	3 [ ]	$f_{yk,flexão}$	500 [MPa]	$V_{Rd,máx,II}$	145,18 [kN]
$s_0$	0,07 [m]	$E_s$	210000 [MPa]	$V_{Rd,cs,II}$	126,77 [kN]
$s_r$	0,07 [m]	$r_{s,x}$	0,95 [m]	$V_{Rd,out,II}$	115,21 [kN]
$b_1$	0,602 [m]	$r_{s,y}$	0,95 [m]	$V_{Rd,máx,III}$	161,74 [kN]
$b_{out}$	1,053 [m]			$V_{Rd,cs,III}$	125,11 [kN]
				$V_{Rd,out,III}$	128,56 [kN]

Figura 5.13 – Cálculo da ligação laje-pilar de canto A1 pelo fib MODEL CODE:2010

Constata-se que, por meio do programa, as cargas resistentes de projeto resultaram iguais às aquelas calculadas no Capítulo 4 e resumidas na Tabela 5.1, para todas as ligações laje pilar e todas as normas estudadas.

## 5.2. ANÁLISE PARAMÉTRICA

Ao investigar as equações da carga resistente por cada norma, é interessante notar que não há como prever o comportamento gráfico destas cargas como função, por exemplo, da altura útil,  $d$ , pois apesar de esta aparecer explicitamente nas fórmulas, também consta implicitamente dentro de vários outros parâmetros, como  $W_{i,x}$ ,  $W_{i,y}$ ,  $J_{i,x}$ ,  $J_{i,y}$ ,  $\beta_{sd,i}$ ,  $u_i$ ,  $b_i$ , tensões resistentes, etc. Ou seja, quando  $d$  varia, todos estes parâmetros também se alteram, e com uma lei de variação não determinada. Esta mesma observação pode ser feita ao analisar outros parâmetros além da altura útil, como as dimensões do pilar, as quantidades de linhas e de camadas de armaduras de punção, as distâncias destas armaduras ao pilar e as distâncias entre si, além da excentricidade do carregamento.

A fim de analisar mais profundamente as influências destes parâmetros no comportamento de cada modelo de cálculo, serão realizados nas Seções 5.2.1 à 5.2.7 estudos de cada dado de entrada com auxílio do programa em EXCEL: as cargas resistentes serão plotadas em função de variações realizadas em cada dado de entrada permitindo análises visuais dos gráficos. Para todas as normas, optou-se por partir do dimensionamento mais conservador da ligação laje-pilar B2, dado pelo ACI 318:2014, com 7 linhas e 8 camadas de armaduras de punção,  $s_0 = s_r = 70$  mm, além dos parâmetros resumidos na Tabela 4.4. Pelo *fib* MODEL CODE:2010 utilizou-se  $d_g = 19$  mm e  $r_s = 1300$  mm, e nível III de aproximação da rotação da laje, assim como nos cálculos manuais do Capítulo 4.

### 5.2.1. INFLUÊNCIA DA ALTURA ÚTIL

Na Figura 5.14 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a altura útil da ligação laje pilar B2. Alguns outros dados de entrada além de “ $d$ ” precisaram ser variados por serem função de “ $d$ ”, como:

Pela NBR 6118:2014 e EUROCODE 2:2004, buscou-se respeitar a viabilidade do cálculo mantendo sempre  $d < h$  e mantendo fixo o cobrimento de 25 mm. Lembrando que o dimensionamento à flexão havia resultado em “Ø16 a cada 125 mm”, o cálculo foi sempre feito com  $h = d + 16 + 25 = d + 41$ . Além disso,  $\rho$  precisou variar pois depende de  $d$ . A partir da definição de  $\rho$  e com o intuito de não variar a armadura de flexão, ou seja, manter os “Ø16 a cada 125 mm” com cobrimento de 25 mm, a cada ponto do gráfico o cálculo foi sempre feito com:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{\left(\frac{\pi \cdot 16^2 / 4}{125 \cdot d_x}\right) \left(\frac{\pi \cdot 16^2 / 4}{125 \cdot d_y}\right)} = \left(\frac{\pi \cdot 64}{125}\right) \sqrt{\frac{1}{d_x \cdot d_y}} = \left(\frac{\pi \cdot 64}{125}\right) \sqrt{\frac{1}{(h-25-8) \cdot (h-25-16-8)}}$$

Portanto, como  $h = d + 41$ :

$$\rho = \left(\frac{\pi \cdot 64}{125}\right) \sqrt{(d^2 - 64)^{-1}}$$

Pelo *fib* MODEL CODE:2010, além de variar  $\rho$  como descrito acima, variou-se  $d_v = d$  e  $d_{v,out} = d - 25$ . Desta forma a influência da variável  $d$  ficou, de fato, isolada.

Na Figura 5.14(a), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $d$  é igual a 319 mm se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo quando  $s_c$  passa a ser menor que  $2d$ .

Na Figura 5.14(b), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  e  $V_{Rd,out}$  quando  $d$  é igual a 200 mm se deve a alteração do *size effect*, que passa a valer menos que 2,0. A mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $d$  é igual a 319 mm se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo quando  $s_c$  passa a ser menor que  $2d$ .

Na Figura 5.14(c) não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.14(d), há ligeira mudança de comportamento de  $V_{Rd,max}$  quando  $d$  é igual a 117 mm, que se deve a alteração do traçado do perímetro crítico básico quando  $c$  passa a ser

menor que  $3d_v$ . A segunda mudança, quando  $d = 180$  mm se deve a alteração da expressão a ser utilizada na Equação 3.154, pois  $k_{sys} \cdot k_{\psi,d,1}$  passa a ser maior que 1. As mudanças de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $d$  é igual a 70, 140, 201, 210, 280 e 350 mm se devem a acréscimos e decréscimos da quantidade de camadas de armaduras de punção que se tornam efetivas, ou seja, aquelas contidas entre as distâncias de  $0,35d_v$  e  $d_v$  da face do pilar. A ligeira mudança quando  $d$  é igual a 166 se deve a alteração da expressão a ser utilizada na Equação 3.157, quando  $\sigma_{swd}$  passa a ser menor que  $f_{yk}/\gamma_s$ . Na curva de  $V_{Rd,out}$ , a mudança de comportamento quando  $d$  é igual a 238 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico básico externo quando  $s_c$  passa a ser menor que  $3d_{v,out}$ .

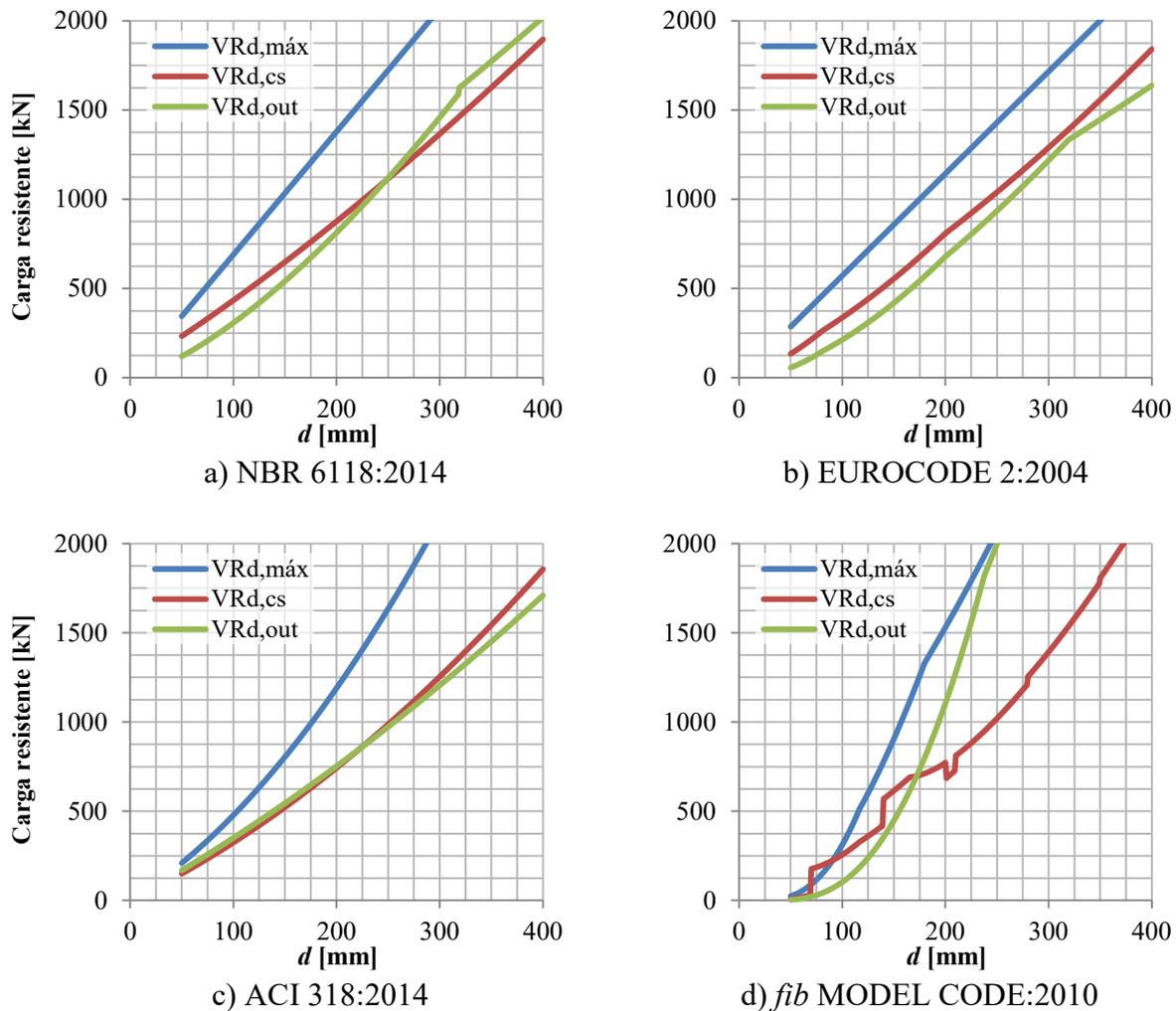


Figura 5.14 – Influência da altura útil,  $d$

Ainda como função da altura útil, é interessante plotar também o comportamento das tensões resistentes, como na Figura 5.15, permitindo observar que estas diminuem apesar de a carga resistente aumentar, comportamento relacionado ao *size effect*.

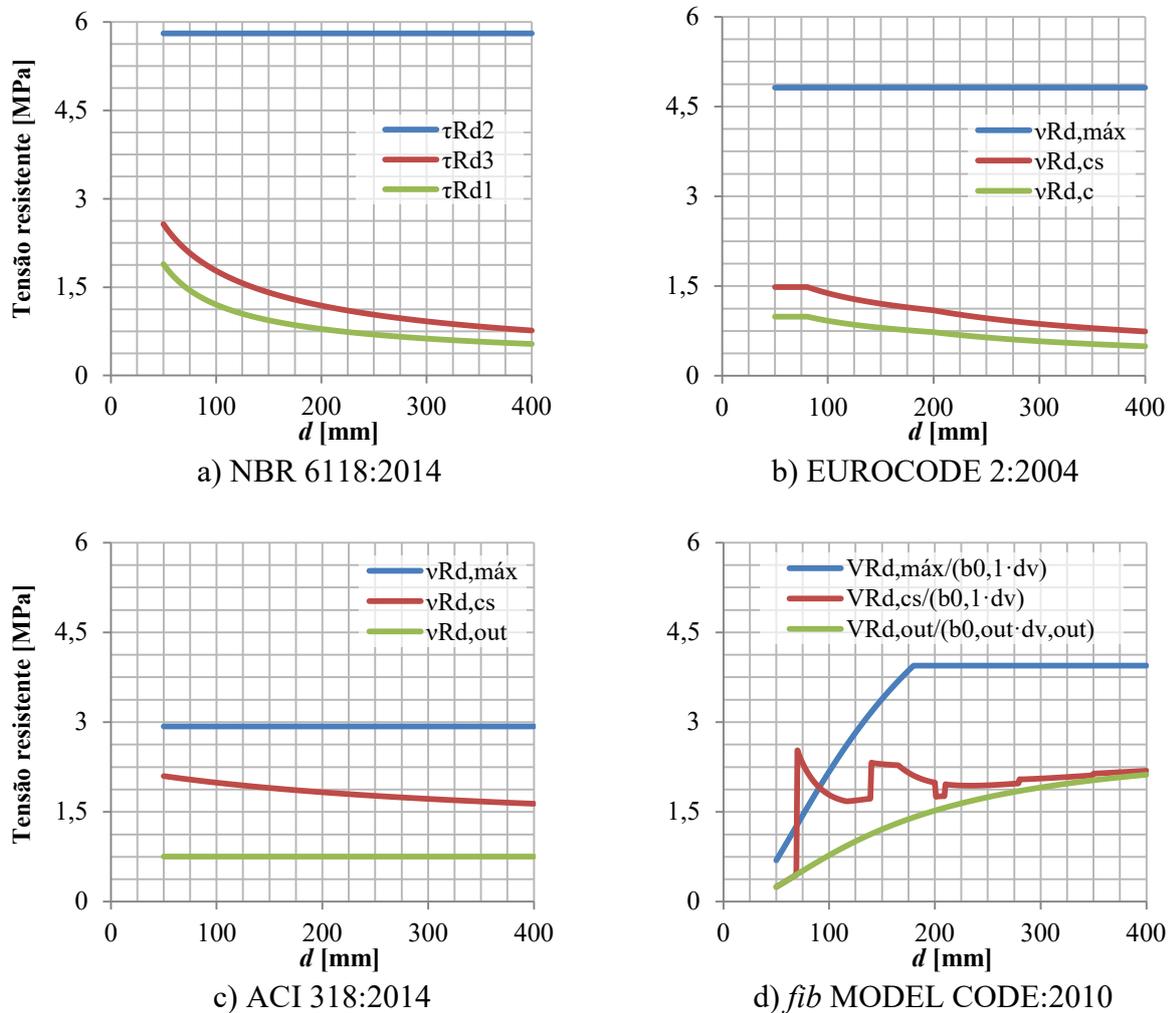


Figura 5.15 – Influência da altura útil,  $d$ , nas tensões resistentes

Como o *fib* MODEL CODE:2010, não apresenta diretamente as expressões para cálculo das tensões, mas apenas das cargas finais de resistência, foram plotadas os quocientes das cargas resistentes pelas seções críticas resistentes ao cortante, ou seja:  $V_{Rd,máx}/(b_{0,1} \cdot d_v)$ ,  $V_{Rd,cs}/(b_{0,1} \cdot d_v)$  e  $V_{Rd,out}/(b_{0,out} \cdot d_{v,out})$ . Na Figura 5.15(a) a tensão  $\tau_{Rd,2}$  relativa à resistência da biela não se altera. Ao aumentar  $d$ , a tensão  $\tau_{Rd,3}$ , expressa na Equação 3.5, diminui devido ao *size effect* e devido à taxa de armadura de flexão que diminuirá por consequência da consideração admitida para plotar os gráficos: armadura de flexão não se altera. Além disso, a

parcela de contribuição do aço é inversamente proporcional a  $u_1$ , cujo crescimento é linear com o aumento de  $d$ .

Para a Figura 5.15(b) valem as mesmas análises feitas para a Figura 5.15(a).

Na Figura 5.15(c), apenas a tensão  $v_{Rd,cs}$ , expressa na Equação 3.86, diminui com o aumento de  $d$ , o que ocorre por que a contribuição do aço é dividida por  $b_0$ , cujo crescimento é linear com o aumento de  $d$ . Este comportamento no entanto não é propriamente atribuído ao efeito de escala, pois só ocorre devido à parcela de contribuição do aço das armaduras de punção, não estando relacionado às propriedades do material concreto.

Na Figura 5.15(d), diferente das demais, não ocorre diminuição das tensões resistentes.

### 5.2.2. INFLUÊNCIA DA DIMENSÃO DO PILAR

Na Figura 5.16 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a dimensão do pilar da ligação laje pilar B2.

Na Figura 5.16(a) não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.16(b), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $c$  é igual a 426 mm se deve a alteração da expressão a ser utilizada na Equação 3.67, pois a parcela de contribuição do aço passa a ser menor que  $0,75 \cdot v_{Rd,c}$ .

Na Figura 5.16(c) não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.16(d), as mudanças de comportamento de  $V_{Rd,máx}$  e  $V_{Rd,cs}$  quando  $c$  é igual a 478 mm se devem a alteração do traçado do perímetro crítico básico quando  $c$  passa a ser maior que  $3d_v$ .

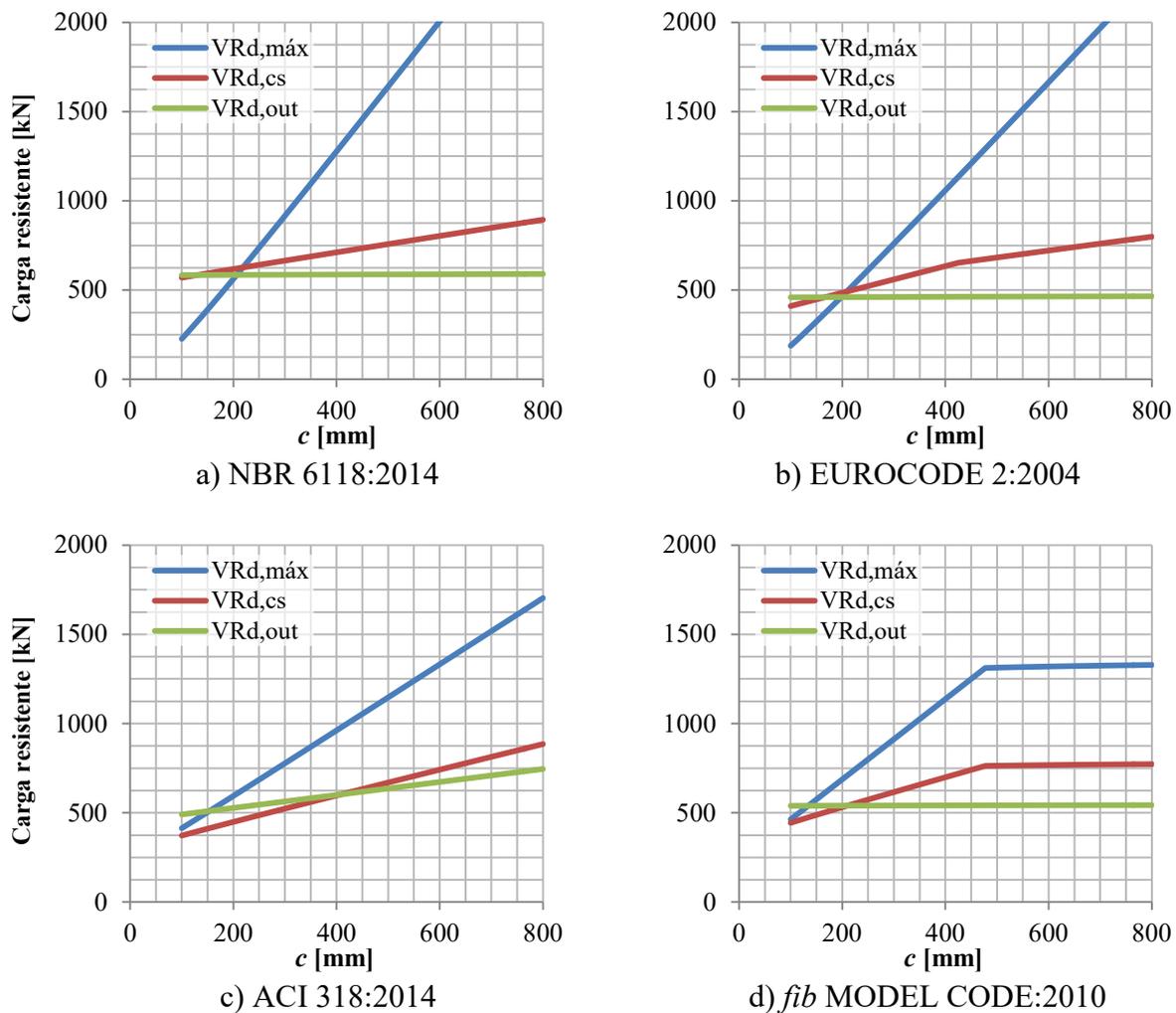


Figura 5.16 – Influência da dimensão do pilar,  $c$

### 5.2.3. INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE LINHAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Na Figura 5.17 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a quantidade de linhas de armadura de punção da ligação laje pilar B2.

Na Figura 5.17(a) a mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $n$  é igual a 15 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo quando  $s_c$  passa a ser menor que  $2d$ .

Na Figura 5.17(b), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $n$  é igual a 7 se deve a alteração da expressão a ser utilizada na Equação 3.67, pois a parcela de contribuição do aço passa a ser maior que  $0,75 \cdot v_{Rd,c}$ . A mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $n$  é igual a

15 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo quando  $s_c$  passa a ser menor que  $2d$ .

Na Figura 5.17(c), nota-se apenas que para valores baixos, próximos de  $n$  igual a 4 a 10, o comportamento de  $V_{Rd,out}$  é um pouco mais sensível à variação deste parâmetro, uma vez que  $b_0$ ,  $J_{out,y}$  e  $J_{out,x}$  variam com mais intensidade. Isso ocorre porque o traçado do perímetro crítico é poligonal, e quanto mais linhas, mais o traçado se aproxima de uma circunferência.

Na Figura 5.17(d), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $n$  é igual a 12 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo básico quando  $s_c$  passa a ser menor que  $3d_{v,out}$ .

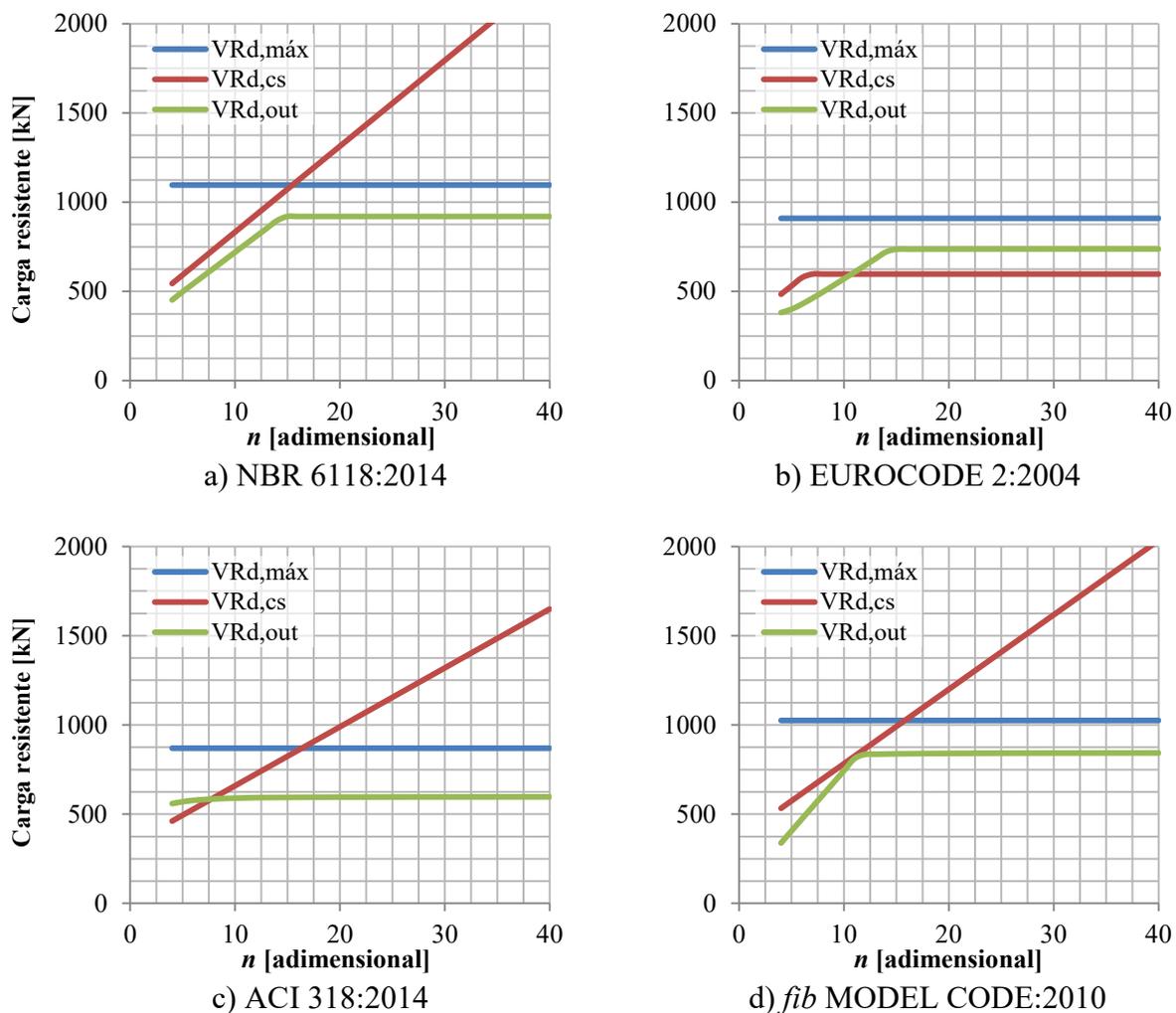


Figura 5.17 – Influência da quantidade de linhas de armaduras de punção,  $n$

## 5.2.4. INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DE CAMADAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Na Figura 5.18 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a quantidade de camadas de armadura de punção da ligação laje pilar B2.

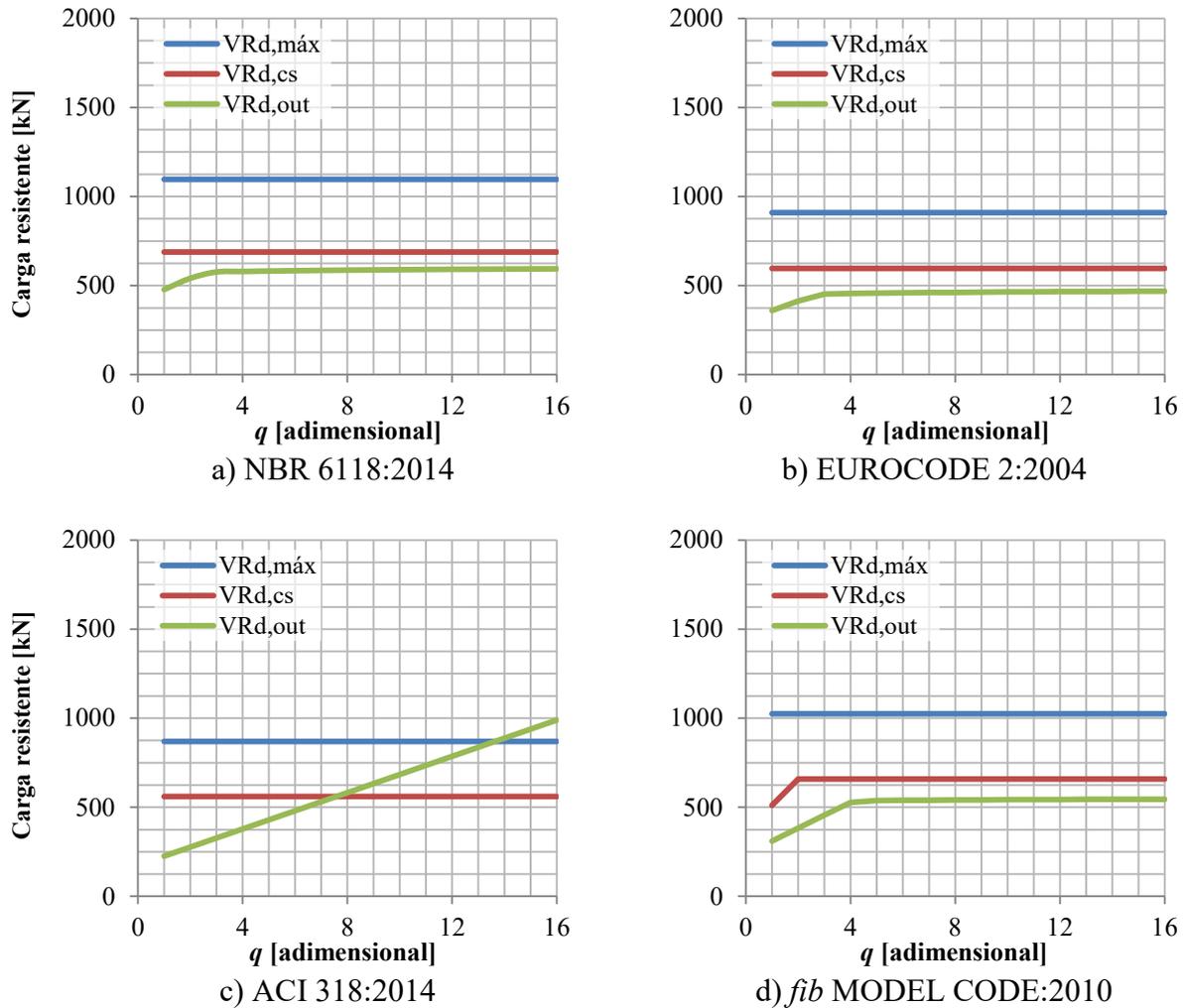


Figura 5.18 – Influência da quantidade de camadas de armaduras de punção,  $q$

Na Figura 5.18(a) e (b), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $q$  é igual a 3 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo quando  $s_c$  passa a ser maior que  $2d$ .

Na Figura 5.18(c) não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.18(d), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $q$  é igual a 2 ocorre por não haver mais acréscimos na quantidade de camadas de armaduras de punção que se tornam

efetivas, ou seja, aquelas contidas entre as distâncias de  $0,35d_v$  e  $d_v$  da face do pilar. A mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $q$  é igual a 5 se deve a alteração do traçado do perímetro crítico externo básico quando  $s_c$  passa a ser maior que  $3d_{v,out}$ .

### 5.2.5. INFLUÊNCIA DA DISTÂNCIA DO PILAR À PRIMEIRA CAMADA DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Na Figura 5.19 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a distância do pilar à primeira camada de armadura de punção da ligação laje pilar B2.

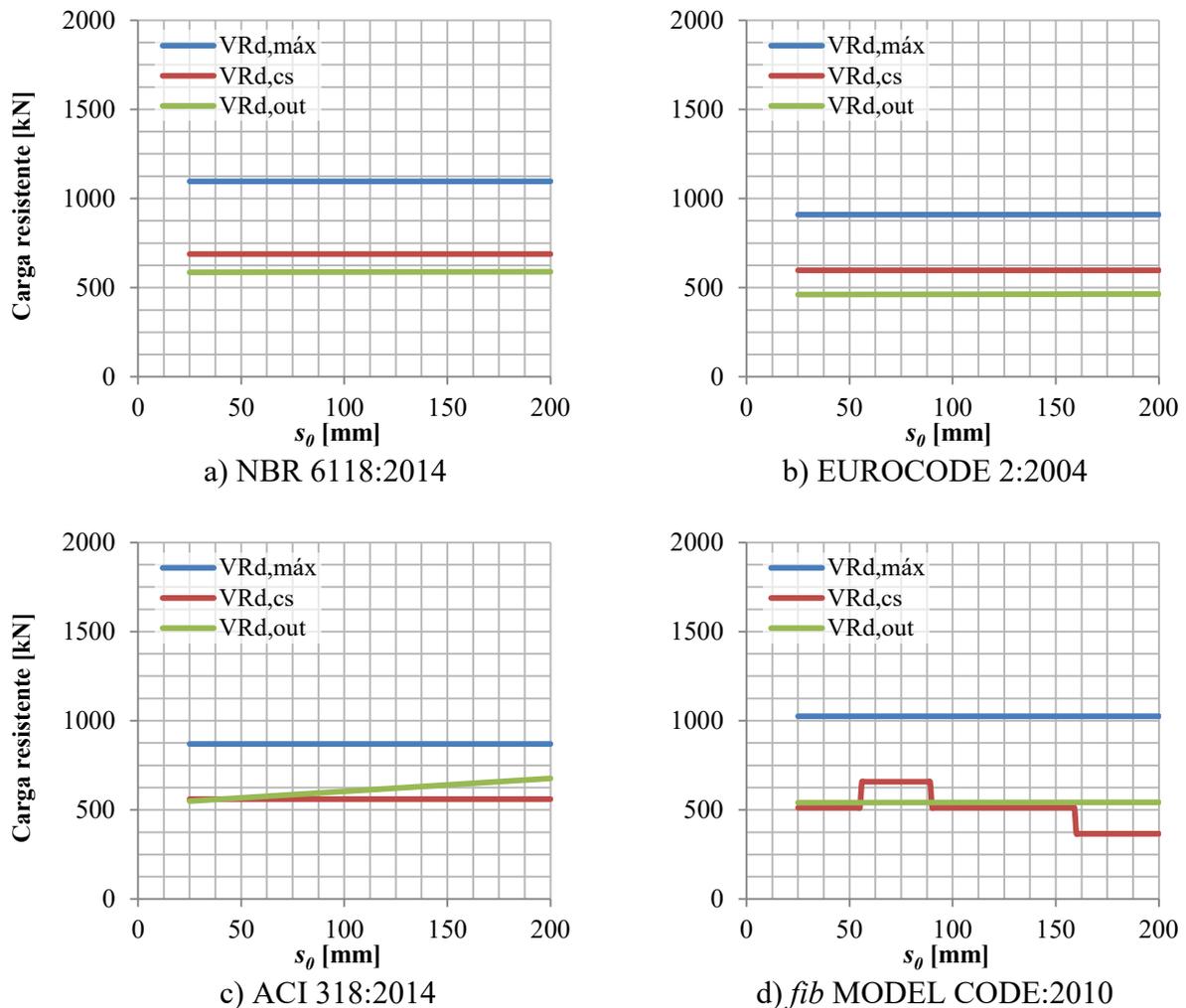


Figura 5.19 – Influência da distância do pilar à primeira camada de armaduras de punção,  $s_0$

Na Figura 5.19(a), (b) e (c), não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.19(d), as mudanças de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $s_0$  é igual a 56, 90 e 160 mm se devem a acréscimos e decréscimos da quantidade de camadas de armaduras de punção efetivas, ou seja, aquelas contidas entre as distâncias de  $0,35d_v$  e  $d_v$  da face do pilar.

### 5.2.6. INFLUÊNCIA DA DISTÂNCIA ENTRE AS CAMADAS DE ARMADURAS DE PUNÇÃO

Na Figura 5.20 são apresentados os gráficos obtidos ao variar a distância entre as camadas de armaduras de punção da ligação laje-pilar B2.

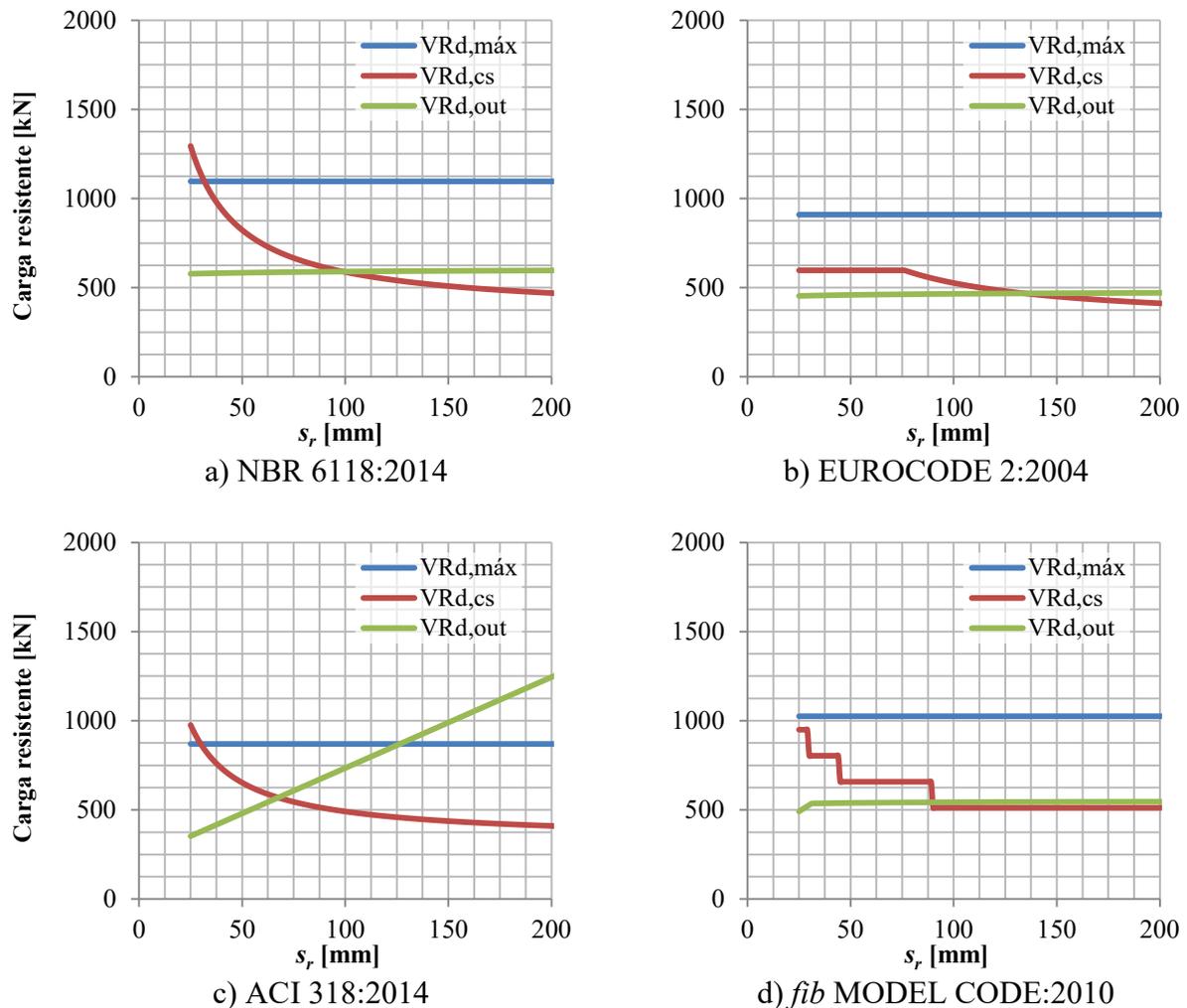


Figura 5.20 – Influência da distância entre camadas de armaduras de punção,  $s_r$

Na Figura 5.20(a), não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.20(b), a mudança de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $s_r$  é igual a 77 mm se deve a alteração da expressão a ser utilizada na Equação 3.67, pois a parcela de contribuição do aço passa a ser menor que  $0,75 \cdot v_{Rd,c}$ .

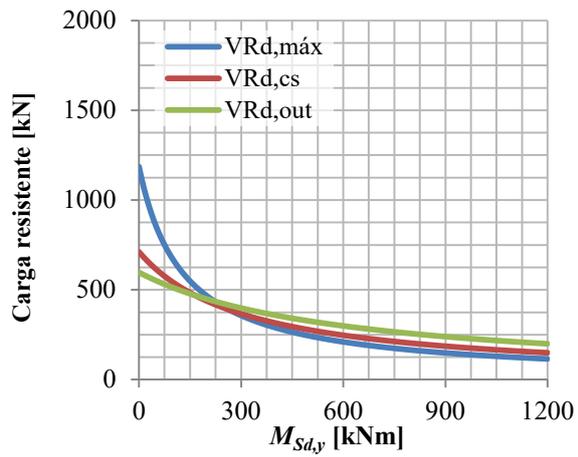
Na Figura 5.20(c) não há mudança de comportamento das cargas resistentes.

Na Figura 5.20(d), as mudanças de comportamento de  $V_{Rd,cs}$  quando  $s_r$  é igual a 30 mm, 45 mm e 90 mm se devem a decréscimos da quantidade de camadas de armaduras de punção efetivas, ou seja, aquelas contidas entre as distâncias de  $0,35d_v$  e  $d_v$  da face do pilar. A mudança de comportamento de  $V_{Rd,out}$  quando  $s_r$  é igual a 32 mm se deve a alteração do perímetro crítico externo básico quando  $s_c$  passa a ser maior que  $3d_{v,out}$ .

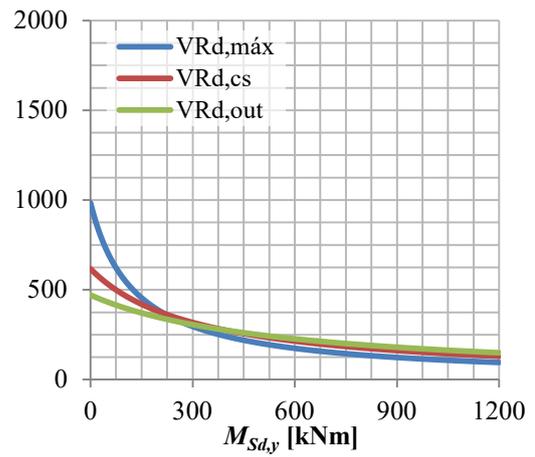
### 5.2.7. INFLUÊNCIA DO MOMENTO FLETOR SOLICITANTE

Ao variar uma das componentes do momento fletor solicitante, por exemplo  $M_{Sd,y}$ , mantendo a força solicitante vertical,  $F_{Sd}$ , constante, varia-se a excentricidade do carregamento, pois  $e_x = M_{Sd,y} / F_{Sd}$ . Como  $\beta_{Sd}$  é função linear da excentricidade, e é inversamente proporcional à carga resistente, espera-se que os gráficos decresçam com comportamento hiperbólico.

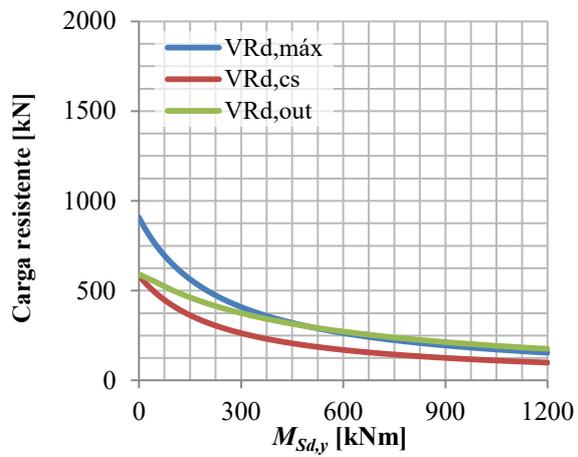
Na Figura 5.21 estão apresentados os gráficos obtidos ao variar o momento solicitante  $M_{Sd,y}$  da ligação laje pilar B2. É interessante notar da Figura 5.21 que a resistência relativa à integridade da diagonal comprimida,  $V_{Rd,max}$ , é a que apresenta maior taxa de decrescimento quando se aumenta a excentricidade do carregamento na ligação laje-pilar. Em geral, o comportamento é semelhante entre as normas estudadas.



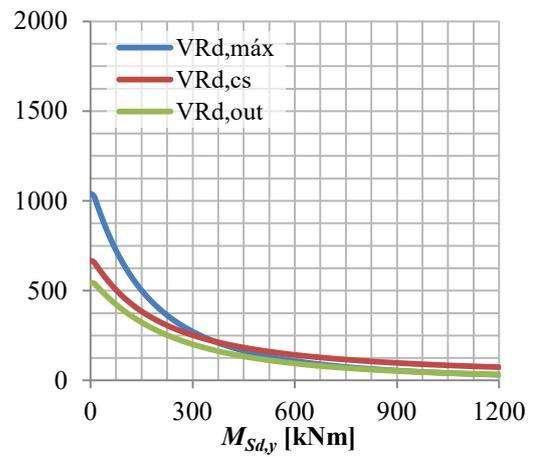
a) NBR 6118:2014



b) EUROCODE 2:2004



c) ACI 318:2014



d) *fib* MODEL CODE:2010

Figura 5.21 – Influência do momento fletor solicitante,  $M_{Sd,y}$

## 6. CONCLUSÕES

Esta dissertação abordou as principais características do fenômeno da punção em lajes lisas, um tema complexo e muito estudado, porém, ainda sem um desfecho definitivo quando se trata de abordá-lo matematicamente.

Ao longo do estudo, foi possível notar que para pilares internos os modelos de cálculos são bem definidos pelos textos normativos, enquanto para pilares de borda e de canto surgem dificuldades, principalmente quanto ao traçado correto dos perímetros críticos, e quanto ao cálculo dos parâmetros  $W_{i,y}$ ,  $W_{i,x}$ ,  $J_{i,y}$  e  $J_{i,x}$ , uma vez que os textos normativos são bastante omissos nestes casos.

O modelo da NBR 6118:2014, apesar de elaborado com base no EUROCODE 2:2004, traz uma importante melhoria em termos mecânicos ao considerar, nos casos de ligações laje-pilar de borda e de canto, as excentricidades de carregamento nas duas direções. O EUROCODE 2:2004 por sua vez considera apenas a excentricidade paralela à borda livre da laje nas ligações de borda; e despreza qualquer excentricidade nas ligações de canto. Para cumprir o efeito da excentricidade, a norma européia considera os perímetros reduzidos  $u_i^*$ , cujos centros geométricos, onde a carga solicitante se aplica, são excêntricos em relação ao centro geométrico do pilar. Esta simplificação reduz bastante os cálculos necessários à verificação da punção, porém, mostrou-se não segura quando utilizada na análise do modelo experimental L14 de BARBÁN (2008). Ressalta-se que o ideal seria analisar um banco de dados de lajes semelhantes à de BARBÁN (2008) para verificar se esta conclusão pode ser generalizada como característica da norma ou se é observada apenas em casos muito particulares. Tratando novamente sobre a NBR 6118:2014, é curioso notar que, mesmo realizando esta implementação de considerar as excentricidades em todas as ligações laje-pilar, a norma brasileira manteve a utilização dos perímetros reduzidos.

O modelo do ACI 318:2014 difere dos demais principalmente por considerar linear a distribuição das tensões solicitantes provenientes dos momentos fletores, enquanto a NBR

6118:2014 e o EUROCODE 2:2004 reproduzem uma situação de plastificação da seção crítica ao considerar distribuições uniformes.

A abordagem do *fib* MODEL CODE:2010 introduz novos parâmetros que influenciam a resistência à punção, como o diâmetro máximo dos agregados do concreto e a tensão de aderência das armaduras de punção. No entanto a maior particularidade do modelo de cálculo é o fato de correlacionar a resistência última da laje com a rotação que esta sofre como resposta ao carregamento.

Ao trabalhar o dimensionamento à punção das ligações laje-pilar de uma edificação em concreto armado com vãos regulares, pôde-se notar que os cálculos são bastante dispendiosos, qualquer que seja a norma adotada pelo projetista. Este fato ressaltou a necessidade de criar uma ferramenta computacional para verificação à punção, o que pôde ser feito com sucesso graças às deduções apresentadas ao longo desta dissertação. Outra importante constatação ao analisar os resultados dos dimensionamentos é que o projeto pelo ACI 318:2014 tende a ser mais conservador, requerendo mais armaduras de punção em comparação com as demais normas estudadas. O projeto pela NBR 6118:2014, por outro lado, tende a ser o menos conservador, exigindo menos armação, enquanto o *fib* MODEL CODE:2010 e o EUROCODE 2:2004 se mostram intermediários neste quesito.

Com as análises gráficas da influência de diferentes parâmetros na resistência à punção foi possível constatar visualmente o impacto de certas limitações impostas pelas normas, como por exemplo as descontinuidades nos perímetros críticos quando a região carregada é muito grande, além das várias limitações nas expressões das tensões resistentes. Os parâmetros eleitos para serem estudados são de difícil análise a partir das formulações matemáticas, uma vez que constam implicitamente dentro de outros parâmetros, com lei de variação não conhecida. Tais análises gráficas seriam bastante úteis ao projetista, por exemplo, para decidir qual parâmetro modificar a fim de incrementar com maior eficiência possível a resistência da ligação laje-pilar. Para o pesquisador, os gráficos permitem ainda definir qual parâmetro seria mais adequado modificar para obter o modo de ruptura desejado no modelo experimental – na biela, na região das armaduras ou na região externa às armaduras.

## **6.1. SUJESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Os dimensionamentos pelas diferentes normas de projeto abordadas neste trabalho não convergem, o que fica evidente ao comparar as quantidades de armaduras de punção requeridas. Este fato induz ao questionamento sobre qual dimensionamento seria o mais adequado, ou seja, analisar experimentalmente qual modelo de cálculo estatisticamente mais acerta a previsão da carga de ruptura de ligações laje-pilar. Mais importante ainda seria estudar qual modelo menos cometeria falhas que comprometem a segurança estrutural, ou seja, aquele que apresenta menos resultados superiores à carga de ruptura experimental. Para tal, seria necessário compilar um grande banco de dados de lajes ensaiadas à punção e calcular suas previsões de carga de ruptura pelos diferentes modelos de cálculo sintetizados nesta dissertação, realizando, por fim, uma análise estatística da confiabilidade dos resultados. Com tal análise, poder-se-ia verificar também se os modelos são capazes de prever corretamente o modo de ruptura das lajes, parâmetro que ajuda a validar o modelo de cálculo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318 – *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-14) and Commentary (ACI 318RM-14)*. Farmington Hills, EUA, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

BARBÁN, V. V. *Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Protendido com Cabos não-aderentes na Ligação Laje-pilar de Borda*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD – 001/08, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2008. 337p.

BAZANT, Z. P.; CAO, Z. *Size effect in punching shear failure of slabs*. ACI Structural Journal, V. 84-S6, Janeiro-Fevereiro, 1987, pp 44-53.

BROMS, C. E. *Elimination of Flat Plate Punching Failure Mode*. ACI Structural Journal, V. 97, No. 1, Janeiro-Fevereiro, 2000, pp. 94-101.

CORDOVIL, F. A. B. *Lajes de Concreto Armado – Punção*. Editora da UFSC. Florianópolis, Brasil, 1997.

EUROPEAN STANDARD. *EUROCODE 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. European Committee for Standardization. Ref. No. EN 1992-1-1:2004+A1:2014 (E). Bruxelas, Bélgica, 2014.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (*fib*): *fib MODEL CODE 2010, Final Draft*. 2011.

FERREIRA, M. P. *Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de punção e Momentos Desbalanceados*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD – 007 A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2010. 275p.

GASPARINI, D. A. *Contributions of C. A. P. Turner to Development of Reinforced Concrete Flat Slabs 1905 - 1909*. Journal of Structural Engineering, v. 128, n. 10, 2002.

GOMES, R. B. *Punching Resistance of Reinforced Concrete Flat Slabs with Shear Reinforcement*. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, England, 1991, 185 p.

GRAF, O. *Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Eisenbetonplatten unter konzentrierter Last nahe einem Auflager*. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 73, Berlin, Alemanha, 1933. 16p.

GRAF, O. *Versuche über die Widerstandsfähigkeit von allseitig aufliegenden dicken Eisenbetonplatten unter Einzellasten*. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 88, Berlin, Alemanha, 1938. 22p.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. *Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement*. Transactions of the Royal Institute of Technology, No 158, Stockholm, Suécia, 1960, 112 pp.

MARZOUK, H.; HUSSEIN, A. *Experimental Investigation on the Behavior of High-Strength Concrete Slabs*. ACI Structural Journal, v. 88, n. 6. 1991.

MELO, G. S. S. A. *Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs after Local Failure*. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, Londres, Inglaterra, 1990, 214p.

MOE, J. *Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads*. Development Department Bulletin D47, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, EUA, 1961. 129p.

MUTTONI, A. *Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs Without Transverse Reinforcement*. ACI Structural Journal, V. 105, No 4, Julho-Agosto, 2008, pp 440-450.

OLIVEIRA, D. R.; MELO, G. S.; REGAN, P. E. *Punching Strengths of Flat Plates with Vertical or Inclined Stirrups*. ACI Structural Journal, V. 97, No. 3, Maio-Junho, 2000, pp. 485-491.

REGAN, P. E. *Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs*. Report 89. Construction Industry Research and Information Association (CIRIA). Londres, Inglaterra, 1981. 89p.

REGAN, P. E.; BRÆSTRUP, M. W. *Punching Shear in Reinforced Concrete*. Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information. n. 168. 1985. 232p.

RICHART, F. E. *Reinforced Concrete Wall and Column Footings*. ACI Journal, Proceedings. v. 45. n. 10. 1948.

SHERIF, A. G.; DILGER, W. H. *Punching Failure of a Full Scale High Strength Concrete Flat Slab*. International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs – Proceedings, TRITA-BKN Bulletin 57, Estocolmo, Suécia, 2000.

TASSINARI, L. *Poinçonnement asymétrique des dalles en béton armé avec armature de poinçonnement*. Thèse EPFL. n. 5030. Laussane, Suíça, 2011. 197p.

VANDERBILT, M. D. *Shear Strength of Continuous Plates*. Journal of Structural Division, Proceedings, ASCE. v. 98. n. ST5. 1972.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. *Reinforced Concrete: Mechanics & Design*. Pearson Education, 6. ed., New Jersey, Estados Unidos, 2012.

WOOD, J. G. M. *Pipers Row Car Park, Wolverhampton: Quantitative Study of the Causes of the Partial Collapse on 20th March 1997*. Report presented to Structural Studies & Design Ltd. Inglaterra, 1997. 209p.

**Endereços eletrônicos:**

<https://reidmiddleton.wordpress.com>

<http://www.tvanouvelles.ca>

<http://www.yugopolis.ru>

**Softwares mencionados:**

Microsoft EXCEL 2010.

Computers & Structures.Inc SAP2000 v19.