Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

EQUAÇÕES DO TIPO KIRCHHOFF ENVOLVENDO CRESCIMENTO NÃO-POLINOMIAL

por

Henrique Rennó Zanata

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado

Brasília

2018

À minha esposa Jéssica,

a quem tanto amo.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a minha esposa Jéssica, por todo o apoio e carinho. Aos meus pais, Sonia e Roberto, que sempre fizeram tudo que estava ao seu alcance para que eu pudesse conquistar o que conquistei.

Dedico um agradecimento especial ao meu orientador, Marcelo, por toda a paciência e disposição para me ajudar no que fosse preciso. Agradeço aos professores Francisco Odair, João Pablo, João Marcos e Giovany, por terem aceito o convite para compor a banca de defesa desta tese e pelos valiosos comentários. Agradeço também a todos os meus professores de graduação, mestrado e doutorado na UnB, que foram essenciais para a minha formação.

Agradeço a todos os colegas do doutorado na UnB, por todos os momentos de estudo e de diversão que compartilhamos e que possibilitaram que a minha caminhada até a conclusão do doutorado tenha sido muito prazerosa.

Agradeço à Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA), onde sou professor, por ter me concedido afastamento integral das minhas atividades para que eu pudesse me dedicar exclusivamente ao doutorado. Finalmente, agradeço à Capes, por ter me concedido bolsa de pesquisa, via programa Prodoutoral, durante uma parte do período de realização do meu doutorado.

Resumo

Neste trabalho, aplicamos métodos variacionais para estudar uma classe de equações de Kirchhoff estacionárias em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger estacionárias em $\mathbb{R}^2$. A primeira envolve uma espécie de competição entre termos côncavo e convexo perto da origem e crescimento arbitrário no infinito. A segunda envolve crescimento exponencial crítico no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser.

Palavras-chave: métodos variacionais; equação de Kirchhoff; equação de Schrödinger; crescimento arbitrário; crescimento exponencial crítico; desigualdade de Trudinger-Moser.

Abstract

In this work, we apply variational methods to study a class of stationary Kirchhoff equations in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ and a class of stationary Kirchhoff-Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$. The first one involves a sort of competition between concave and convex terms near the origin and arbitrary growth at infinity. The second one involves critical exponential growth at infinity in the sense of Trudinger-Moser inequality.

Keywords: variational methods; Kirchhoff equation; Schrödinger equation; arbitrary growth; critical exponential growth; Trudinger-Moser inequality.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, aplicamos métodos variacionais para estudar uma classe de equações de Kirchhoff estacionárias em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger estacionárias em $\mathbb{R}^2$. A primeira envolve uma espécie de competição entre termos côncavo e convexo perto da origem e crescimento arbitrário no infinito. A segunda envolve crescimento exponencial crítico no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser (veja Teorema I.1 mais adiante).

Em [31], G. Kirchhoff apresentou seu estudo sobre vibrações tranversais de cordas elásticas e propôs uma equação hiperbólica do tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(k_1 + k_2 \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \mathrm{d}x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

onde k_1, k_2 e L são constantes positivas, de maneira a estender a clássica equação da onda de d'Alembert por considerar os efeitos das mudanças de comprimento nas cordas durante as vibrações. Versões mais gerais de (1) e as equações estacionárias correspondentes têm sido então denominadas equações do tipo Kirchhoff e se tornaram objeto de intensa pesquisa principalmente após os trabalhos de S.I. Pohozaev [40] e J.-L. Lions [36], em que eles consideraram uma estrutura abstrata para estudar o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla_x u(x,t)|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta_x u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases}$$

onde $m : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ é uma função contínua tal que $m(t) \geq m_0 > 0$ para todo $t \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave.

Um problema envolvendo uma equação do tipo Kirchhoff é dito *não-local* por causa do termo que depende de uma integral, chamado de *termo não-local*, o qual implica que a equação não é uma identidade pontual.

Métodos variacionais têm sido utilizados por muitos autores para obter resultados de existência e multiplicidade de soluções para equações de Kirchhoff estacionárias desde o trabalho pioneiro de C.O. Alves et al. [4].

No Capítulo 1 provamos resultados de multiplicidade de soluções para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\left(\alpha + \beta \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = a(x)|u|^{q-1}u + \mu h(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado suave, $0 < q < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$. As principais hipóteses sobre h são

(h_1) $h \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existe $\delta > 0$ tal que $h(x,s)$ é ímpar em s para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq \delta$;

(h_2) $h(x,s) = o(|s|^q)$, quando $s \to 0$, uniformemente em Ω.

Para introduzir a hipótese de regularidade sobre o potencial a, definimos $2^* := 2N/(N-2)$ e consideramos a sequência $(p_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $p_1 = 2^*$ e

$$p_{n+1} := \begin{cases} \dfrac{Np_n}{N - 2p_n}, & \text{se } 2p_n < N, \\ p_n + 1, & \text{se } \ 2p_n \geq N, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que esta sequência é crescente. Mais do que isso, usando este fato e indução matemática, se $2p_n < N$ para algum $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$p_{n+1} \geq \left(\frac{N}{N-2p_1}\right)^n p_1.$$

Ou seja, a sequência (p_n) é também ilimitada. Portanto, está bem definido o valor

$$\eta := \min\{n \in \mathbb{N} : 2p_n > N\}.$$

A principal hipótese sobre o potencial a é

(a_1) $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, com $\sigma_q := p_\eta/(1-q)$.

Do ponto de vista formal, a equação em (P_1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$I(u) = \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega H(x,u)\mathrm{d}x, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

onde $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$ é a norma no espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $H(x,s) := \int_0^s h(x,t)\mathrm{d}t$. Como não temos nenhum controle sobre o comportamento de h no infinito, esse funcional não está bem definido em todo o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$. Contudo, em decorrência de $(h_1)-(h_2)$, o valor $I(u)$ é finito para toda função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ é suficientemente pequena.

No primeiro resultado do Capítulo 1, consideramos o caso em que o potencial a tem sinal definido:

Teorema 1.1. *Suponha que $0 < q < 1$, a função h satisfaz $(h_1)-(h_2)$ e o potencial a satisfaz (a_1) e*

(a_2) existe $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Então, para quaisquer $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$, o problema (P_1) tem uma sequência de soluções $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$. Além disso, $I(u_k) < 0$ e $I(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$.

No segundo resultado do Capítulo 1 consideramos um potencial que pode ter sinal indefinido. Mais especificamente:

Teorema 1.2. *Suponha que* $0 < q < 1$, *a função* h *satisfaz* $(h_1) - (h_2)$ *e o potencial* a *satisfaz* (a_1) *e*

$(\widetilde{a}_2)$ *existe* $a_0 > 0$ *e um aberto* $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ *tal que* $a(x) \geq a_0$, *para q.t.p.* $x \in \widetilde{\Omega}$.

Então o problema (P_1) *tem uma sequência de soluções* $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que* $I(u_k) < 0$ *e* $I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to \infty$, *em cada um dos seguintes casos:*

(i) $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ *e* $\mu \in (0, \mu^*)$, *para algum* $\mu_* > 0$;

(ii) $\beta \geq 0$, $\mu > 0$ *e* $\alpha \in (\alpha^*, +\infty)$, *para algum* $\alpha^* > 0$.

Ainda no caso indefinido, podemos trocar a condição (h_2) por outra mais forte para prescindir de qualquer restrição no tamanho dos parâmetros, conforme enunciamos a seguir.

Teorema 1.3. *Suponha que* $0 < q < 1$, *a função* h *satisfaz* (h_1) *e*

$(\widetilde{h}_2)$ $h(x, s) = o(|s|)$, *quando* $s \to 0$, *uniformemente em* Ω,

e o potencial a *satisfaz* (a_1) *e* $(\widetilde{a}_2)$. *Então vale a mesma conclusão do Teorema 1.1.*

Os Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 valem independentemente do crescimento de h longe da origem. Para prová-los usando métodos variacionais, aproveitamos um argumento utilizado em [45], que consiste em considerar um funcional modificado I_θ, de classe C^1 em $W_0^{1,2}(\Omega)$, cujos pontos críticos com norma pequena em $L^\infty(\Omega)$ são soluções fracas do problema (P_1). Nas demonstrações dos teoremas, obtemos uma sequência de pontos críticos de I_θ cumprindo essa condição. Para isto, aplicamos um resultado abstrato da Teoria do Gênero de Krasnoselskii e um processo iterativo de regularização.

É importante mencionar que esses resultados também valem para dimensão $N = 1$ ou $N = 2$. Neste caso, as demonstrações podem ser feitas de modo análogo trocando-se 2^* por qualquer valor p escolhido no intervalo $(1, +\infty)$.

Agora recordemos que, no celebrado artigo [6], A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami estudaram o problema

$$-\Delta u = \lambda |u|^{q-1} u + |u|^{p-1} u \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

com $0 < q < 1 < p \leq 2^* - 1$. Entre outros resultados, a existência de duas soluções positivas foi provada para $\lambda > 0$ pequeno. Após esse trabalho, muitos autores consideraram o efeito de termos côncavo-convexos em problemas de Dirichlet. Mas é impossível dar aqui uma lista completa das referências. Então vamos citar apenas os trabalhos que estão mais intimamente relacionados com os nossos resultados.

Em [45] e posteriormente em [29], os autores consideraram uma versão local do problema (P_1), com $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\mu = 1$. Sob as hipóteses $(h_1) - (h_2)$ e com potencial constante $a(x) \equiv \lambda > 0$, em [45] foi provada a existência de infinitas soluções como no Teorema 1.1. O mesmo foi feito em [29], substituindo a hipótese (h_2) por $(\widetilde{h_2})$ e assumindo que $a \in C(\overline{\Omega})$ tem parte positiva não nula. Para o caso não-local, em dimensão $N \leq 3$, podemos citar o artigo [24], em que os autores consideraram um termo não-local mais geral, $a(x) \equiv \lambda > 0$, $\mu = 1$ e $h(x, s) = |s|^{p-1}s$, com $p > 1$ e $p \leq 2^* - 1$ se $N = 3$. Foram obtidas infinitas soluções de energia negativa com algumas condições técnicas sobre os tamanhos de λ e de um parâmetro equivalente ao parâmetro β do problema (P_1). Veja também [12, 48] para outros resultados relacionados.

Os Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 estendem e complementam os trabalhos supracitados em vários sentidos: diferentemente de [29, 45], nós consideramos o caso $\beta > 0$; nosso potencial a pode ser descontínuo e com sinal indefinido; não fizemos restrições na dimensão nem no tamanho do parâmetro β. Observamos ainda que, mesmo no caso local $\beta = 0$, nossos resultados parecem ser novos. Eles estão publicados em [26].

No Capítulo 2 provamos, via Teorema do Passo da Montanha, resultados de existência de solução *ground state* não-negativa para o problema

$$(P_2) \qquad m\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x\right)(-\Delta u + b(x)u) = A(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2,$$

onde $m : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ são funções contínuas e $b, A \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. O potencial b pode ser negativo ou se anular em conjuntos de medida positiva e a não-linearidade f tem crescimento exponencial crítico no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser. Consideramos hipóteses adequadas sobre b, A e f que permitem tratar este problema variacionalmente no subespaço de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$H := \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} b(x)u^2\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Observamos que uma solução fraca $u_0 \in H \setminus \{0\}$ do problema (P_2) é dita *ground state* se em u_0 é atingido o ínfimo do funcional energia associado a (P_2) dentro do subconjunto de H constituído pelos pontos críticos não-nulos deste funcional, isto é, as soluções fracas não-triviais de (P_2) (veja Observação 2.20, Capítulo 2).

Para introduzir as hipóteses sobre a função $m : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, defina $M(t) := \int_0^t m(\tau)\mathrm{d}\tau$, $t \geq 0$. As hipóteses sobre m são:

(m_1) $m_0 := \inf_{t \geq 0} m(t) > 0$;

(m_2) para todos $t_1, t_2 \geq 0$, vale

$$M(t_1 + t_2) \geq M(t_1) + M(t_2);$$

(m_3) $\dfrac{m(t)}{t}$ é uma função decrescente em $(0, +\infty)$.

Uma condição suficiente para valer (m_2) é que m seja não-decrescente. Um exemplo típico de uma função satisfazendo as condições $(m_1)-(m_3)$ é dado por $m(t) = \alpha + \beta t$, com $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$. Como já observamos, este modelo com $\beta > 0$ foi o considerado por Kirchhoff em [31]. Outros exemplos são $m(t) = \alpha + \beta t^\delta$, com $\delta \in (0, 1)$, $m(t) = \alpha(1 + \log(1 + t))$ e $m(t) = \alpha + \beta e^{-t}$. Os detalhes a respeito destas afirmações se encontram no Lema 2.1, Capítulo 2.

De modo a introduzir as hipóteses sobre o potencial $b \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, vamos definir

$$\lambda_1^b := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x : u \in H \text{ e } \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1 \right\}$$

e, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto não-vazio,

$$\nu_b(\Omega) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Assumimos $\nu_b(\emptyset) = +\infty$. As hipóteses sobre b são:

(b_1) $\lambda_1^b > 0$;

(b_2) $\lim_{r \to +\infty} \nu_b(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(0)}) = +\infty$, onde $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$;

(b_3) existe $B_0 > 0$ tal que

$$b(x) \geq -B_0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Sobre a função $A \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, faremos as seguintes hipóteses:

(A_1) $A(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(A_2) existem $\beta_0 > 1$, $C_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que

$$A(x) \leq C_0\{1 + (b^+(x))^{1/\beta_0}\}, \quad |x| \geq R_0,$$

onde $b^+(x) := \max\{0, b(x)\}$.

É importante observar que todas as demonstrações que faremos no Capítulo 2 podem ser feitas de modo análogo, com algumas adaptações, se no lugar da hipótese (A_1) considerarmos a condição $A(x) \geq A_0$, $x \in \mathbb{R}^2$, para qualquer constante $A_0 > 0$. Estamos adotando $A_0 = 1$ por simplicidade.

Um potencial b e uma função peso A satisfazendo hipóteses similares a $(b_1) - (b_3)$ e $(A_1) - (A_2)$, respectivamente, foram considerados originalmente por B. Sirakov [43] no estudo de uma classe de equações de Schrödinger em dimensão $N \geq 3$ envolvendo crescimento subcrítico no sentido das imersões de Sobolev.

A hipótese (b_1) garante que H é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\mathrm{d}x$$

e norma $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H}$, imerso continuamente em $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e, consequentemente, em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p \geq 2$ (veja [43, Lema 2.1]). Neste caso, (A_1) e (A_2) garantem que, para todo $p \geq 2$, H está imerso continuamente no espaço de Lebesgue com peso

$$L^p_A(\mathbb{R}^2) := \left\{ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^p \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

que é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p_A(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Adicionalmente, (b_2) garante que esta imersão é compacta (veja [43, Lema 2.2, Proposições 2.1 e 3.1] ou [49]). Como, por (A_1), $L^p_A(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, então (b_2) também nos dá a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$.

A hipótese (b_2) é satisfeita quando vale a seguinte condição geométrica (veja [43, Teorema 1.4] ou [49, Teorema 2.1]): para todo $K > 0$, todo $r > 0$ e toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ com $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} |\Omega_{b,K} \cap B_r(x_n)| = 0, \tag{2}$$

onde $\Omega_{b,K} := \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x) < K\}$ e $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Esta, por sua vez, é satisfeita quando vale qualquer uma das condições a seguir:

$$b(x) \to +\infty \quad \text{quando} \quad |x| \to +\infty; \tag{3}$$

$$b(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \quad 1/b \in L^1(\mathbb{R}^2); \tag{4}$$

$$|\Omega_{b,K}| < \infty, \quad \forall\, K > 0. \tag{5}$$

Estas condições são normalmente usadas, adicionalmente à hipótese $b(x) \geq b_0 > 0$, para garantir a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, $p \geq 2$. Um exemplo de um potencial que satisfaz (2) e, consequentemente, satisfaz (b_2), é $b(x) = b(x_1, x_2) = |x_1 x_2|$, onde x_1, x_2 representam as coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Além disso, sendo (b_2) e (b_3) condições suficientes para que o ínfimo que define λ_1^b seja atingido (veja [43, Proposição 2.2] ou [49, Proposição 2.2]), então é fácil ver que este exemplo também satisfaz (b_1). Como, para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_{b-C,K} = \Omega_{b,K+C} \quad \text{e} \quad \lambda_1^{b-C} = \lambda_1^b - C,$$

então $b(x) = |x_1 x_2| - C$ é outro exemplo satisfazendo $(b_1)-(b_3)$, para determinados valores de C. E claramente esses dois exemplos não satisfazem (3), (4) e (5).

A imersão $H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ implica que, para alguma constante $\zeta > 0$,

$$\|u\|_H \geq \zeta \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall\, u \in H. \tag{2.1}$$

Esta desigualdade será importante na demonstração do Lema 2.9. Observe que, se $b(x) \leq 0$ em algum conjunto de medida positiva, então não podemos ter $\zeta > 1$. Mas podemos evidentemente considerar $\zeta = 1$ no caso em que b satisfaz

$(\widehat{b_3})$ $b(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Com respeito ao termo não-linear $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, como estamos buscando uma solução não-negativa para o problema (P_2), vamos supor que $f(s) = 0$, para todo $s \leq 0$. Defina $F(s) := \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, $s \in \mathbb{R}$. As principais hipóteses sobre f são:

(f_1) existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty & , \text{ se } \alpha < \alpha_0 \end{cases};$$

(f_2) existem $s_0, K_0 > 0$ tais que

$$F(s) \leq K_0 f(s), \quad \forall\, s \geq s_0;$$

(f_3) existe $\theta_0 > 4$ tal que

$$\theta_0 F(s) \leq s f(s), \quad \forall\, s > 0;$$

(f_4) $\dfrac{f(s)}{s^3}$ é uma função não-decrescente e positiva em $(0, +\infty)$.

Se $\theta > 4$, um exemplo de uma função f satisfazendo $(f_1) - (f_4)$ é

$$f(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^\theta}{\theta}(e^{s^2} - 1)\right) = s^{\theta-1}(e^{s^2} - 1) + \frac{2s^{\theta+1}}{\theta} e^{s^2}.$$

A hipótese (f_1) é a condição de *crescimento exponencial crítico no infinito*. Se o limite em (f_1) fosse igual a zero para todo $\alpha > 0$, diríamos que f tem *crescimento exponencial subcrítico no infinito*. Para tratar o problema (P_2) variacionalmente, não é possível considerar o crescimento crítico no sentido das imersões de Sobolev, já que em dimensão 2 o expoente crítico de Sobolev 2^* se torna infinito e não temos imersão contínua de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Neste caso, o crescimento maximal que nos permite considerar uma estrutura variacional é dado pelo crescimento exponencial crítico. Essa noção de criticalidade foi motivada originalmente pela desigualdade de Trudinger-Moser, segundo a qual, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio limitado, $W_0^{1,2}(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço de Orlicz $L_{\phi_\alpha}(\Omega)$ associado à função $\phi_\alpha(t) := e^{\alpha t^2} - 1$, $t \in \mathbb{R}$, para $0 < \alpha \leq 4\pi$. Mais precisamente:

Teorema I.1 (J. Moser [38], 1971)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado. Então* $\phi_\alpha(u) \in L^1(\Omega)$*, para todo* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *e todo* $\alpha > 0$*, e existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sup_{u \in W_0^{1,2}(\Omega): \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx \leq C|\Omega|, \quad \forall\ \alpha \leq 4\pi. \tag{6}$$

Além disso, 4π *é o expoente ótimo, isto é, o supremo acima é* $+\infty$ *para* $\alpha > 4\pi$*.*

Em verdade, o resultado provado por J. Moser em [38] é mais geral, pois trata de funções em $W_0^{1,N}(\Omega)$, com $N \geq 2$. Anteriormente a este trabalho de Moser, N.S. Trudinger [44] havia provado a existência de $\alpha > 0$ satisfazendo a desigualdade (6) e sua versão análoga para $W_0^{1,N}(\Omega)$, $N \geq 2$, mas sem obter o expoente ótimo.

O Teorema I.1 foi generalizado de diversas maneiras. Veja, por exemplo, o Lema 2.7 do Capítulo 2, que foi provado por J.M. do Ó [19] (veja também [10]) e garante a continuidade da imersão de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ no espaço de Orlicz $L_{\phi_\alpha}(\mathbb{R}^2)$, para $\alpha \in (0, 4\pi)$. No Capítulo 2, nós provamos uma versão desse resultado para funções do espaço H (veja Lema 2.9). Em [42], B. Ruf provou que a imersão contínua $W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_{\phi_\alpha}(\mathbb{R}^2)$ também vale para $\alpha = 4\pi$ e que este é o expoente ótimo, isto é, a imersão não é contínua para $\alpha > 4\pi$. Outras generalizações do Teorema I.1 podem ser encontradas em [2, 16, 17, 34] e suas referências. Para uma caracterização dos espaços de Orlicz, veja [32, 44].

A principal dificuldade na abordagem variacional de problemas com crescimento exponencial crítico é a falta de compacidade das imersões dos espaços de Sobolev em espaços de Orlicz associados à função ϕ_α. Em [37, subseção I.7], P.-L. Lions provou um resultado de concentração de compacidade que nos permite contornar esse problema em $W_0^{1,2}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado. Este resultado teve muitas generalizações e aplicações nos últimos anos (veja [11, 16, 21, 33, 46, 47] e suas referências). O Corolário 2.10 do Capítulo 2, que nos permitirá contornar a falta de compacidade da imersão $H \hookrightarrow L_{\phi_\alpha}(\mathbb{R}^2)$, é uma versão do resultado de P.-L. Lions no espaço H.

Nos enunciados dos resultados do Capítulo 2, consideramos hipóteses adicionais sobre a função f que estão relacionadas com algumas das hipóteses introduzidas anteriormente. Vamos então fixar as seguintes notações:

$$S_p := \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_H}{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}, \quad p \geq 2;$$

$$C_p := \inf\left\{C > 0 : pM(t^2S_p^2) - 2Ct^p \leq pM\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right),\quad \forall\ t > 0\right\},\quad p > 4;$$
$$M_R := \|b\|_{L^\infty(B_R(0))},\quad R > 0.$$

Os valores S_p e C_p são finitos, para $p \geq 2$ e para $p > 4$ respectivamente, em decorrência da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ (consequência de (b_1)) e da hipótese (m_3), que implica que $m(t) < m(1)t$ para todo $t > 1$.

Podemos agora enunciar os principais resultados do segundo capítulo.

Teorema 2.2. *Suponha que valem $(m_1) - (m_3)$, $(b_1) - (b_3)$, $(A_1) - (A_2)$ e $(f_1) - (f_4)$. Suponha ainda que f satisfaz*

(f_5) *existe $p_0 > 4$ tal que*

$$f(s) > C_{p_0}s^{p_0-1},\quad \forall\ s > 0.$$

Então o problema (P_2) possui uma solução ground state não-negativa.

Se trocarmos a hipótese (b_3) por $(\widehat{b_3})$ e, consequentemente, tivermos $\zeta = 1$ na desigualdade (2.1), podemos obter o mesmo resultado do teorema acima considerando uma condição mais natural no lugar de (f_5), conforme enunciamos a seguir.

Teorema 2.3. *Suponha que valem $(m_1) - (m_3)$, $(b_1) - (b_2)$, $(\widehat{b_3})$, $(A_1) - (A_2)$ e $(f_1) - (f_4)$. Suponha ainda que f satisfaz*

(f_6) *existe $\gamma_0 > 0$ tal que*

$$\liminf_{s\to+\infty} \frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \gamma_0 > 4\alpha_0^{-1}m\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)\inf_{R>0}\{R^{-2}e^{R^2M_R/2}\}.$$

Então o problema (P_2) possui uma solução ground state não-negativa.

Observação. *As hipóteses (m_3) e (f_4) garantem que a solução dada pelos Teoremas 2.2 e 2.3 é solução ground state. No entanto, como veremos nas demonstrações destes teoremas, ainda obtemos solução não-trivial não-negativa para o problema (P_2), não necessariamente ground state, se trocarmos (m_3) e (f_4) por condições mais fracas, a saber:*

(m_3^*) *existem constantes $a_1 > 0$ e $T > 0$ tais que*

$$m(t) \leq a_1 t,\quad \forall\ t \geq T;$$

(f_4^*) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\frac{f(s)}{s}=0;$

e as condições de monotonicidade do Lema 2.21, Capítulo 2. Especificamente no caso do Teorema 2.3, esta substituição nos permite considerar funções f que se anulam em uma vizinhança da origem.

No caso em que $m\equiv 1$, a equação em (P_2) se reduz à equação de Schrödinger

$$(\widehat{P_2}) \qquad -\Delta u + b(x)u = A(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Neste caso, alternativamente a (f_3) e (f_4), consideramos as hipóteses

$(\widehat{f}_3)$ existe $\widehat{\theta}_0>2$ tal que

$$\widehat{\theta}_0 F(s)\le sf(s), \quad \forall\ s>0;$$

$(\widehat{f}_4)$ $\dfrac{f(s)}{s}$ é uma função não-decrescente e positiva em $(0,+\infty)$.

Diferentemente de (f_4), a hipótese $(\widehat{f}_4)$ não implica em (f_4^*). Então, definindo, para $q>2$,

$$\begin{aligned}\widehat{C}_q &:= \inf\left\{C>0 : qS_q^2t^2-2Ct^q\le\frac{4\pi q\zeta^2}{\alpha_0},\ \ \forall\ t>0\right\}\\ &= S_q^q\left(\frac{\alpha_0(q-2)}{4\pi q\zeta^2}\right)^{(q-2)/2},\end{aligned}$$

temos o seguinte resultado, semelhante ao Teorema 2.2, para o problema $(\widehat{P_2})$.

Teorema 2.5. *Suponha que valem $(b_1)-(b_3)$, $(A_1)-(A_2)$, $(f_1)-(f_2)$, $(\widehat{f}_3)$ e (f_4^*). Suponha ainda que f satisfaz*

$(\widehat{f}_5)$ *existe $q_0>2$ tal que*

$$f(s)>\widehat{C}_{q_0}s^{q_0-1}, \quad \forall\ s>0.$$

Então o problema $(\widehat{P_2})$ possui uma solução fraca não-trivial não-negativa. Se, adicionalmente, f satisfaz $(\widehat{f}_4)$, então a solução é ground state.

Do mesmo modo, temos um resultado semelhante ao Teorema 2.3:

Teorema 2.6. *Suponha que valem $(b_1)-(b_2)$, $(\widehat{b_3})$, $(A_1)-(A_2)$, $(f_1)-(f_2)$, $(\widehat{f}_3)$ e (f_4^*). Suponha ainda que f satisfaz*

$(\widehat{f}_6)$ *existe* $\widehat{\gamma}_0 > 0$ *tal que*

$$\liminf_{s\to+\infty} \frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \widehat{\gamma}_0 > 4\alpha_0^{-1} \inf_{R>0}\{R^{-2}e^{R^2 M_R/2}\}.$$

Então o problema $(\widehat{P_2})$ *possui uma solução fraca não-trivial não-negativa. Se, adicionalmente,* f *satisfaz* $(\widehat{f}_4)$*, então a solução é ground state.*

Existem poucos artigos sobre equações de Kirchhoff ou de Schrödinger estacionárias envolvendo crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser, mesmo considerando trabalhos que lidam com operadores mais gerais, como o N-Laplaciano com $N \geq 2$. Vamos citar aqui apenas os que estão mais intimamente relacionados com os nossos resultados.

Em domínio limitado, podemos citar [25, 28, 39]. Em [25] foi obtida, via Teorema do Passo da Montanha, uma solução *ground state* positiva para um problema de Kirchhoff em dimensão 2 com não-linearidade tendo crescimento exponencial crítico. Em [28] e [39] os autores consideraram também o caso exponencial subcrítico e provaram, usando minimização local e Teorema do Passo da Montanha, resultados de existência e multiplicidade de soluções não-negativas. Em [28] foi estudada uma classe de problemas de Kirchhoff quasilineares em dimensão $N \geq 2$, com não-linearidade exponencial de crescimento crítico ou do tipo "côncavo-convexo"com termo convexo sendo exponencial de crescimento subcrítico ou crítico. Já em [39] foi estudado um problema em dimensão 2 similar ao considerado em [25], mas com termo não-local menos geral, dado pela função $m(t) = 1 + \alpha t$, $\alpha > 0$. A multiplicidade de soluções obtida em [39] estava diretamente relacionada com o tamanho deste parâmetro α.

Em todo o espaço $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, pelo nosso conhecimento não há nenhum artigo sobre equações de Kirchhoff envolvendo um potencial com as hipóteses $(b_1) - (b_3)$, mesmo com não-linearidade tendo crescimento polinomial. Mas sobre equações de Schrödinger envolvendo crescimento exponencial, podemos citar [15, 18]. Em [15], o autor estudou um problema singular não-homogêneo da forma

$$-\Delta u + b(x)u = \frac{g(x)f(u)}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

com b satisfazendo $(b_1) - (b_3)$, f tendo crescimento exponencial **subcrítico** e $a \in [0, 2)$. Já em [18], os autores estudaram um problema quasilinear não-homogêneo da forma

$$-\Delta_N u + b(x)|u|^{N-2}u = c(x)|u|^{N-2}u + g(x)f(u) + \varepsilon h(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

onde $\Delta_N u = \text{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$, $N \geq 2$, com b e f satisfazendo hipóteses similares, em dimensão N, a $(b_1), (b_2), (\widehat{b_3})$ e $(f_1), (f_2), (\widehat{f_3}), (f_4^*), (\widehat{f_5})$, respectivamente. O potencial c foi tomado não-negativo e pertencente a um espaço de Lebesgue apropriado, com norma neste espaço limitada por uma constante adequada. Observe que, para determinados potenciais b que mudam de sinal, como o exemplo $b(x) = |x_1 x_2| - C$ dado anteriormente, esta hipótese não inclui o caso em que $b(x)$ é trocado por $b^+(x) = \max\{0, b(x)\}$ e $c(x) = b^-(x) := \max\{0, -b(x)\}$ na equação (8). Para $h \not\equiv 0$ e com norma pequena em um espaço dual apropriado, foram obtidas duas soluções em citeSou e [18] para os problemas (7) e (8), respectivamente: uma do tipo Passo da Montanha e outra do tipo mínimo local. Para $h \equiv 0$, foi obtida apenas a solução do tipo Passo da Montanha.

Ainda em domínio ilimitado, mas com potencial b satisfazendo hipóteses similares a (3) ou (4), referimos também os trabalhos [35], sobre uma equação de Kirchhoff, e [20, 46], sobre equações de Schrödinger. Para mais resultados relacionados, envolvendo um potencial constante ou satisfazendo outros tipos de hipóteses, veja também [5, 7, 21, 22, 23].

Além dos aspectos já mencionados, os resultados do segundo capítulo complementam os trabalhos supracitados em outros sentidos também: à exceção de [25], em nenhum dos outros artigos provou-se a existência de soluções *ground state*; diferentemente de [5, 7, 20, 21, 22, 23, 35, 46], nós consideramos um potencial que pode mudar de sinal ou se anular; nestes mesmos artigos e em [15], a regularidade do potencial é mais forte do que a considerada aqui; em [15, 18], é assumido que a função peso g das equações (7) e (8) satisfaz hipóteses similares a (A_1) e (A_2), mas a regularidade é mais forte do que a que estamos supondo para a função A; finalmente, embora em [18] tenha sido considerado um potencial b do mesmo tipo que o nosso, a versão da desigualdade de Trudinger-Moser no espaço H que provamos aqui (veja Lema 2.9, Capítulo 2) é mais geral que a versão provada em [18], para dimensão $N = 2$, o que nos permitiu considerar as hipóteses (f_6) e $(\widehat{f_6})$, alternativamente a (f_5) e $(\widehat{f_5})$, para provar que o nível do Passo da Montanha está dentro da região de compacidade de sequências de Palais-Smale dos funcionais energia associados a (P_2) e $(\widehat{P_2})$, respectivamente.

CAPÍTULO 1

Infinitas soluções para uma equação de Kirchhoff com não-linearidade tendo crescimento arbitrário

1.1 Introdução

Estamos interessados aqui em estudar uma equação de Kirchhoff envolvendo uma espécie de competição entre termos côncavo e convexo perto da origem e crescimento arbitrário no infinito. Especificamente, vamos considerar o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\left(\alpha + \beta \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right) \Delta u = a(x)|u|^{q-1}u + \mu h(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado suave, $0 < q < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$. As principais hipóteses sobre h são

(h_1) $h \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existe $\delta > 0$ tal que $h(x,s)$ é ímpar em s para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq \delta$;

(h_2) $h(x,s) = o(|s|^q)$, quando $s \to 0$, uniformemente em Ω.

Para introduzir a hipótese de regularidade sobre o potencial a, definimos $2^* := 2N/(N-2)$ e consideramos a sequência $(p_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $p_1 = 2^*$ e

$$p_{n+1} := \begin{cases} \dfrac{Np_n}{N-2p_n}, & \text{se } 2p_n < N, \\ \\ p_n + 1, & \text{se } \ 2p_n \geq N, \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que esta sequência é crescente. Mais do que isso, usando este fato e indução matemática, se $2p_n < N$ para algum $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$p_{n+1} \geq \left(\frac{N}{N-2p_1} \right)^n p_1.$$

Ou seja, a sequência (p_n) é também ilimitada. Portanto, está bem definido o valor

$$\eta := \min\{n \in \mathbb{N} : 2p_n > N\}.$$

A principal hipótese sobre o potencial a é

(a_1) $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, com $\sigma_q := p_\eta/(1-q)$.

Do ponto de vista formal, a equação em (P_1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$I(u) = \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega H(x,u)\mathrm{d}x, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.2}$$

onde $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{1/2}$ é a norma no espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $H(x,s) := \int_0^s h(x,t)\mathrm{d}t$. Como não temos nenhum controle sobre o comportamento de h no infinito, esse funcional não está bem definido em todo o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$. Contudo, em decorrência de $(h_1)-(h_2)$, o valor $I(u)$ é finito para toda função $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ é suficientemente pequena.

Em nosso primeiro resultado, consideramos o caso em que o potencial a tem sinal definido:

Teorema 1.1. *Suponha que $0 < q < 1$, a função h satisfaz $(h_1) - (h_2)$ e o potencial a satisfaz (a_1) e*

(a_2) *existe $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$, para q.t.p. $x \in \Omega$.*

Então, para quaisquer $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ *e* $\mu > 0$, *o problema* (P_1) *tem uma sequência de soluções* $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que* $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ *quando* $k \to \infty$. *Além disso,* $I(u_k) < 0$ *e* $I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to \infty$.

Em nosso segundo resultado consideramos um potencial que pode ter sinal indefinido. Mais especificamente:

Teorema 1.2. *Suponha que* $0 < q < 1$, *a função* h *satisfaz* $(h_1) - (h_2)$ *e o potencial* a *satisfaz* (a_1) *e*

$(\widetilde{a_2})$ *existe* $a_0 > 0$ *e um aberto* $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ *tal que* $a(x) \geq a_0$, *para q.t.p.* $x \in \widetilde{\Omega}$.

Então o problema (P_1) *tem uma sequência de soluções* $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que* $I(u_k) < 0$ *e* $I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to \infty$, *em cada um dos seguintes casos:*

(i) $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ *e* $\mu \in (0, \mu^*)$, *para algum* $\mu_* > 0$;

(ii) $\beta \geq 0$, $\mu > 0$ *e* $\alpha \in (\alpha^*, +\infty)$, *para algum* $\alpha^* > 0$.

Ainda no caso indefinido, podemos trocar a condição (h_2) por outra mais forte para prescindir de qualquer restrição no tamanho dos parâmetros, conforme enunciamos a seguir.

Teorema 1.3. *Suponha que* $0 < q < 1$, *a função* h *satisfaz* (h_1) *e*

$(\widetilde{h_2})$ $h(x,s) = o(|s|)$, *quando* $s \to 0$, *uniformemente em* Ω,

e o potencial a *satisfaz* (a_1) *e* $(\widetilde{a_2})$. *Então vale a mesma conclusão do Teorema 1.1.*

Provaremos os Teoremas 1.1 e 1.2 na próxima seção, após apresentar alguns resultados auxiliares. O Teorema 1.3 será provado na Seção 1.3. No que segue, para qualquer $u \in L^1(\Omega)$, escreveremos somente $\int u$ para denotar $\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$. Se $1 \leq p \leq \infty$, $\|u\|_p$ irá denotar a norma em $L^p(\Omega)$ de uma função $u \in L^p(\Omega)$. E de agora em diante sempre vamos assumir que valem as condições (a_1) e (h_1).

1.2 O caso $h(x,s) = o(|s|^q)$

Como dissemos anteriormente, o funcional I dado em (1.2) não é bem definido em todo o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$. Para contornar esta dificuldade, faremos um truncamento na função h de modo a considerar um novo funcional com a função truncada no lugar de h. Esta função truncada é dada pelo lema a seguir, que é uma versão de [45, Lema 2.3].

Lema 1.4. *Suponha que h satisfaz (h_2). Então, dado qualquer $\theta > 0$, existem um número $0 < \xi < \delta/2$ e uma função $g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ímpar na segunda variável, tais que*

(g_1) $g(x,s) = h(x,s),\ \forall\ (x,s) \in \Omega \times [-\xi, \xi]$.

Além disso, se $G(x,s) := \int_0^s g(x,t)\mathrm{d}t$, então para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ valem

(g_2) $g(x,s)s - 2G(x,s) \leq \theta |s|^{q+1}$;

(g_3) $g(x,s)s - (q+1)G(x,s) \leq \theta |s|^{q+1}$;

(g_4) $|G(x,s)| \leq \dfrac{\theta}{2}|s|^{q+1}$;

(g_5) $|g(x,s)| \leq \theta |s|^q$.

Demonstração. Denote $\varepsilon := \theta/14$. Por (h_2) existe um número $0 < \xi < \delta/2$ tal que

$$\max\{|H(x,s)|, |h(x,s)s|\} \leq \varepsilon |s|^{q+1}, \quad \forall\ (x,s) \in \Omega \times [-2\xi, 2\xi].$$

Seja $\rho \in C^1(\mathbb{R}, [0,1])$ uma função par satisfazendo, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\rho \equiv 1 \text{ em } [-\xi, \xi], \quad \rho \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (-2\xi, 2\xi), \quad |\rho'(s)| \leq 2/\xi, \quad \rho'(s)s \leq 0.$$

Denote $\gamma := \theta/16$ e considere a função $H_\infty(s) := \gamma |s|^{q+1}$, $s \in \mathbb{R}$. Obviamente H_∞ é derivável em todo ponto $s \neq 0$. Mas também o é em $s = 0$ e $H'_\infty(0) = 0$, pois $\lim_{s \to 0} H'_\infty(s) = 0$. Definimos então a função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,s) := \rho'(s)H(x,s) + \rho(s)h(x,s) + (1 - \rho(s))H'_\infty(s) - \rho'(s)H_\infty(s).$$

Um cálculo direto mostra que, para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

$$G(x,s) = \rho(s)H(x,s) + (1 - \rho(s))H_\infty(s).$$

Usando as propriedades de ρ, é fácil ver que g é contínua, ímpar na segunda variável e verifica (g_1). Para provar que valem $(g_2)-(g_5)$, note primeiramente que

$$sH'_\infty(s) = \gamma(q+1)|s|^{q+1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Então, para $|s| \le 2\xi$ temos que

$$\begin{aligned} |g(x,s)s| &\le 2\xi\frac{2}{\xi}|H(x,s)| + |sh(x,s)| + \gamma(q+1)|s|^{q+1} + 2\xi\frac{2}{\xi}\gamma|s|^{q+1} \\ &\le (5\varepsilon + 6\gamma)|s|^{q+1}. \end{aligned}$$

Segue que, para $|s| \le 2\xi$,

$$\begin{aligned} |g(x,s)s| + 2|G(x,s)| &\le |g(x,s)s| + 2|H(x,s)| + 2H_\infty(s) \\ &\le (7\varepsilon + 8\gamma)|s|^{q+1} \\ &= \theta|s|^{q+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $|s| > 2\xi$, temos que

$$|g(x,s)s| + 2|G(x,s)| = |sH'_\infty(s)| + 2|H_\infty(s)| < 4\gamma|s|^{q+1} < \theta|s|^{q+1}.$$

Das desigualdades acima, concluímos que valem $(g_2)-(g_5)$. $\square$

Para qualquer $\theta > 0$, segue de $(g_4)-(g_5)$ e um argumento padrão que o funcional dado por

$$I_\theta(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\int a(x)|u|^{q+1} - \mu\int G(x,u), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

pertence a $C^1(W_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$ e, neste caso, para quaisquer $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$I'_\theta(u)v = (\alpha + \beta\|u\|^2)\int(\nabla u \cdot \nabla v) - \int a(x)|u|^{q-1}uv - \mu\int g(x,u)v.$$

Então, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é um ponto crítico de I_θ tal que $\|u\|_\infty < \xi$, segue de (g_1) que $g(x,u(x)) = h(x,u(x))$ para q.t.p. $x \in \Omega$ e, consequentemente, u é solução fraca do problema (P_1). Na demonstração do Teorema 1.1 que faremos mais adiante, vamos obter uma sequência de pontos críticos de I_θ cumprindo essa condição.

O próximo lema estabelece uma condição técnica sobre o parâmetro θ que irá garantir que essa sequência converge para zero em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 1.5. *Suponha que as funções a e h satisfazem (a_2) e (h_2), respectivamente. Se*

$$0 < \theta < \frac{(1-q)a_0}{(1+q)\mu}, \tag{1.3}$$

então $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Demonstração. É óbvio que $I_\theta(0) = I'_\theta(0)0 = 0$, independentemente do valor de $\theta > 0$. Por outro lado, se $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$, usando (a_2), a igualdade $I'_\theta(u)u - 2I_\theta(u) = 0$ e (g_2), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(1-q)a_0}{q+1}\int |u|^{q+1} &\leq \frac{\beta}{2}\|u\|^4 + \frac{1-q}{q+1}\int a(x)|u|^{q+1} \\ &= \mu\int (g(x,u)u - 2G(x,u)) \\ &\leq \mu\theta\int |u|^{q+1}. \end{aligned}$$

A desigualdade acima e (1.3) implicam que $u = 0$. $\square$

Observe que a positividade do potencial a foi essencial na demonstração acima. Então, sob as hipóteses do Teorema 1.2, como a poderia ser nulo ou negativo em conjuntos de medida positiva, não é possível agora garantir que $u = 0$ é o único elemento de $W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$. No entanto, os elementos que cumprem esta condição satisfazem uma estimativa a priori. Mais precisamente, denotando

$$S_{q+1} := \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int |\nabla u|^2}{\left(\displaystyle\int |u|^{q+1}\right)^{2/(q+1)}} > 0,$$

temos o seguinte resultado.

Lema 1.6. *Suponha que as funções a e h satisfazem $(\widetilde{a_2})$ e (h_2), respectivamente. Se*

$$0 < \theta < \frac{(1-q)}{2} S_{q+1}^{(q+1)/2}, \tag{1.4}$$

então $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$ implica que $\|u\| \leq (\mu/\alpha)^{1/(1-q)}$.

Demonstração. Se $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$, a igualdade $I'_\theta(u)u - (q+1)I_\theta(u) = 0$ implica que

$$\frac{\alpha(1-q)}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta(3-q)}{4}\|u\|^4 = \mu\int (g(x,u)u - (q+1)G(x,u)). \tag{1.5}$$

Por (g_3), a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e (1.4), segue que

$$\frac{\alpha(1-q)}{2}\|u\|^2 \leq \mu\theta S_{q+1}^{-(q+1)/2}\|u\|^{q+1} \leq \frac{\mu(1-q)}{2}\|u\|^{q+1},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Lema 1.7. *Para qualquer $\theta > 0$ o funcional I_θ é coercivo e satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Como a sequência (p_n) definida em (1.1) é crescente e $2^* > 2$, temos que

$$\sigma_q = \frac{p_\eta}{1-q} \geq \frac{2^*}{1-q} = \frac{2^*}{2-(q+1)} > \frac{2^*}{2^*-(q+1)} = \left(\frac{2^*}{q+1}\right)', \tag{1.6}$$

em que a notação p' representa o *conjugado* de um valor $p \in (1, +\infty)$, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Portanto, $1 < \sigma_q'(q+1) < 2^*$. Daí, pela desigualdade de Hölder, (g_4) e as imersões de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} I_\theta(u) &\geq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\|a\|_{\sigma_q}\|u\|_{\sigma_q'(q+1)}^{q+1} - \frac{\mu\theta}{2}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - C\|u\|^{q+1}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Recordando que $(q+1) < 2$, concluímos que $I_\theta(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$, isto é, o funcional I_θ é coercivo.

Agora, seja $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ uma sequência tal que $I_\theta(u_n) \to c$ e $I_\theta'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Pela coercividade de I_θ, (u_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto, para algum $A \geq 0$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, a menos de subsequência temos que

$$\|u_n\| \to A, \quad u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W_0^{1,2}(\Omega), \quad u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega),$$

para todo $p \in [1, 2^*)$. Por (1.6), existe $p_0 \in (q+1, 2^*)$ tal que $\sigma_q = (\frac{p_0}{q+1})'$. Então, usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\left|\int a(x)|u_n|^{q-1}u_n(u_n - u)\right| \leq \|a\|_{\sigma_q}\|u_n\|_{p_0}^q\|u_n - u\|_{p_0} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Além disso, por (g_5) e novamente a desigualdade de Hölder,

$$\left|\int g(x, u_n)(u_n - u)\right| \leq \theta\|u_n\|_{q+1}^q\|u_n - u\|_{q+1} \to 0.$$

Daí,

$$o_n(1) = I'_\theta(u_n)(u_n - u) = (\alpha + \beta \|u_n\|^2) \left(\|u_n\|^2 - \int \nabla u_n \cdot \nabla u \right) + o_n(1),$$

em que $o_n(1)$ denota uma quantidade que tende a zero quando $n \to \infty$. Então, tomando o limite com $n \to \infty$ na igualdade acima, obtemos $(\alpha + \beta A^2)(A^2 - \|u\|^2) = 0$, o que implica que $\|u\| = A$, isto é, $\|u_n\| \to \|u\|$. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, segue da convergência fraca que $u_n \to u$ fortemente em $W_0^{1,2}(\Omega)$. $\square$

Para obter uma sequência de pontos críticos para I_θ, aplicaremos a seguinte proposição, que é uma variação de um resultado devido a D.C. Clark [13] (veja [30, Teorema 2.1, Proposição 2.2]).

Proposição 1.8. *Sejam X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par e limitado inferiormente que satisfaz a condição de Palais-Smale e $J(0) = 0$. Se, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem um subespaço k-dimensional $X^k \subset X$ e $\rho_k > 0$ tais que*

$$\sup_{u \in X^k \cap S_{\rho_k}} J(u) < 0, \tag{1.7}$$

onde $S_\rho := \{u \in X : \|u\|_X = \rho\}$, então J tem uma sequência de valores críticos $(c_k) \subset (-\infty, 0)$ tal que $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Observação 1.9. *Cada valor crítico c_k na proposição acima é um nível minimax definido a partir de conjuntos com gênero maior ou igual a k. Para cada subconjunto $A \subset X \setminus \{0\}$ fechado e simétrico em relação à origem, isto é, tal que $x \in A$ implica em $-x \in A$, o gênero (ou gênero de Krasnoselskii) de A é definido por*

$$\gamma(A) := \min\{n \in \mathbb{N} : \textit{existe uma aplicação ímpar } \phi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})\}.$$

Define-se também $\gamma(\emptyset) = 0$. Os valores c_k são dados por

$$c_k := \inf_{\gamma(A) \geq k} \sup_{x \in A} J(x)$$

e são denominados níveis de Ljusternik-Schnirelmann. Por esta caracterização, fica claro que $c_k \leq c_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. E como $\gamma(X^k \cap S_{\rho_k}) = k$ (veja [41, Capítulo 7] para a prova desta e de outras propriedades do gênero), de (1.7) também vemos facilmente que

$c_k < 0$. Da limitação inferior de J segue que $c_k > -\infty$. O que não é imediato é que cada c_k é um valor crítico de J (o que foi provado em [13]) e que $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$ (o que foi provado em [30]).

Podemos agora provar o Teorema 1.1.

Demonstração do Teorema 1.1. Seja $\xi > 0$ dado pelo Lema 1.4 com $\theta > 0$ satisfazendo (1.3). Como foi dito anteriormente, todo ponto crítico u do funcional I_θ tal que $\|u\|_\infty < \xi$ é uma solução fraca de (P_1). Então, após obter uma sequência de pontos críticos para I_θ usando a Proposição anterior, vamos mostrar que esta sequência converge para zero em $L^\infty(\Omega)$. Daí o resultado estará provado.

Pelo Lema 1.4, a função g é ímpar na segunda variável e, consequentemente, sua primitiva G é par na segunda variável, o que implica que o funcional I_θ é par. Pelas imersões de Sobolev, I_θ é limitado em conjuntos limitados de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Como já sabemos, do Lema 1.7, que também é coercivo, segue que I_θ é limitado inferiormente. A condição de Palais-Smale também segue do Lema 1.7 e, obviamente, $I_\theta(0) = 0$.

Vamos agora provar que I_θ satisfaz (1.7). Dado qualquer $k \in \mathbb{N}$, defina $X^k := \text{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, onde $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então $X^k \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ é um subespaço de dimensão k. Usando (a_2), (g_4), a escolha de $\theta > 0$, que implica que $\theta < a_0\mu^{-1}/(q+1)$, e o fato de que quaisquer normas em X^k são equivalentes, obtemos, para todo $u \in X^k$,

$$\begin{aligned} I_\theta(u) &\leq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{a_0}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} + \frac{\mu}{2}\theta\|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{a_0}{2(q+1)}C\|u\|^{q+1}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Como $(q+1) < 2$, pela desigualdade acima podemos escolher $\rho_k > 0$ pequeno tal que I_θ verifica (1.7).

Pelas considerações acima, podemos aplicar a Proposição 1.8 para obter uma sequência $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ de pontos críticos de I_θ tais que $c_k = I_\theta(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Isto significa que (u_k) é uma sequência de Palais-Smale para I_θ no nível $c = 0$ e, pelo Lema 1.7, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_k \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto, $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$ e do Lema 1.5 concluímos que $u = 0$, isto é, $u_k \to 0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Agora observe que cada função u_k é uma solução fraca de

$$-\Delta u = \frac{a(x)|u_k(x)|^{q-1}u_k(x) + \mu g(x, u_k(x))}{\alpha + \beta \|u_k\|^2} \quad \text{em } \Omega,$$
$$u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Denotando por h_k o lado direito da equação acima, por (g_5) temos que

$$|h_k(x)| \leq \alpha^{-1}(|a(x)||u_k(x)|^q + \mu\theta|u_k(x)|^q)$$

para q.t.p. em Ω. Consequentemente,

$$\int |h_k(x)|^{2^*} \leq C_1 \alpha^{-2^*} \left(\int |a(x)|^{2^*} |u_k|^{q2^*} + (\mu\theta)^{2^*} \int |u_k|^{q2^*} \right), \tag{1.9}$$

com $C_1 := 2^{2^*-1}$. Por outro lado, a desigualdade $\sigma_q \geq 2^*/(1-q)$ implica que $\sigma_q/2^* > 1$ e

$$\tau_q := q \left(\frac{\sigma_q}{2^*} \right)' = \frac{q\sigma_q}{\sigma_q - 2^*} \leq 1.$$

Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\int |a(x)|^{2^*} |u_k|^{q2^*} \leq \|a\|_{\sigma_q}^{2^*} \left(\int |u_k|^{\tau_q 2^*} \right)^{q/\tau_q} \leq C_2 \|a\|_{\sigma_q}^{2^*} \|u_k\|_{2^*}^{q2^*}$$

e

$$\int |u_k(x)|^{q2^*} \leq C_3 \|u_k\|_{2^*}^{q2^*},$$

com $C_2 := |\Omega|^{q(1-\tau_q)/\tau_q}$ e $C_3 := |\Omega|^{1-q}$. Concluímos que $h_k \in L^{2^*}(\Omega)$ e, pelo Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg [3] (veja também [27, Lema 9.17]), $u_k \in W^{2,2^*}(\Omega)$ e existe $C_4 = C_4(\Omega)$ tal que

$$\|u_k\|_{W^{2,2^*}} \leq C_4 \|h_k\|_{2^*},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta desigualdade e de (1.9), segue que

$$\|u_k\|_{W^{2,2^*}} \leq C_5 \|u_k\|_{2^*}^q \leq \widehat{C}_1 \|u_k\|^q, \tag{1.10}$$

com

$$C_5 = C_4 \alpha^{-1} \{C_1(C_2 \|a\|_{\sigma_q}^{2^*} + C_3(\mu\theta)^{2^*})\}^{1/2^*}, \quad \widehat{C}_1 = C_5 S^{-q/2},$$

onde

$$S := \inf\{\|u\|^2 : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{2^*} = 1\} > 0.$$

Como $u_k \to 0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos então que $\|u_k\|_{W^{2,2^*}} \to 0$. Se $\eta = 1$, isto é, $2p_1 = 2 \cdot 2^* > N$ (veja a definição de η e da sequência (p_n) em (1.1)), a imersão $W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ implica que $\|u_k\|_\infty \to 0$.

Por outro lado, se $2 \cdot 2^* \leq N$ (equivalentemente, $\eta > 1$), a imersão $W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2}(\Omega)$ e a desigualdade (1.10) implicam que, para alguma constante $C_6 = C_6(\Omega) > 0$,

$$\|u_k\|_{p_2} \leq C_6 \|u_k\|_{W^{2,2^*}} \leq C_6 \widehat{C}_1 \|u_k\|^q ,$$

onde p_2 é o segundo termo da sequência definida em (1.1). Além disso, como neste caso $\sigma_q \geq p_2/(1-q)$, um argumento análogo ao que usamos anteriormente nos permite concluir que $h_k \in L^{p_2}(\Omega)$. Daí, aplicando novamente o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, temos que $u_k \in W^{2,p_2}(\Omega)$ e

$$\|u_k\|_{W^{2,p_2}} \leq C_7 \|u_k\|_{p_2}^q \leq \widehat{C}_2 \|u_k\|^{q^2} ,$$

onde $C_7 > 0$ é independente de k e $\widehat{C}_2 = C_7(C_6\widehat{C}_1)^q$.

Como $\sigma_q \geq p_n/(1-q) > p_n$ para $n = 1, \ldots, \eta$, podemos repetir esse argumento até concluir que $u_k \in W^{2,p_\eta}(\Omega)$ e

$$\|u_k\|_{W^{2,p_\eta}} \leq \widehat{C}_\eta \|u_k\|^{q^\eta} , \tag{1.11}$$

com $\widehat{C}_\eta > 0$ independente de k. Então, $\|u_k\|_{W^{2,p_\eta}} \to 0$ quando $k \to \infty$. Mas, pela definição de η, temos que $2p_\eta > N$ e, portanto, $W^{2,p_\eta}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Daí, concluímos que $\|u_k\|_\infty \to 0$. Ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_k\|_\infty \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall\, k \geq k_0. \tag{1.12}$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 1.2. Novamente o objetivo aqui é obter uma sequência de pontos críticos para I_θ satisfazendo (1.12), com $\xi > 0$ dado pelo Lema 1.4 para $\theta > 0$ escolhido adequadamente. No caso do item (i), isto é, com $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ fixados, supomos que $\mu \leq 1$ e escolhemos

$$0 < \theta < \min\left\{ \frac{1-q}{2} S_{q+1}^{(q+1)/2}, \frac{a_0}{1+q} \right\}.$$

No caso do item (ii), isto é, com $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$ fixado, escolhemos

$$0 < \theta < \min\left\{\frac{1-q}{2}S_{q+1}^{(q+1)/2}, \frac{a_0}{\mu(1+q)}\right\}.$$

Para obter uma sequência de pontos críticos para I_θ, nós argumentamos como na prova do Teorema 1.1. A primeira diferença aparece quando tentamos provar que I_θ verifica a propriedade (1.7). De fato, como o potencial a agora não tem sinal definido, precisamos fazer uma construção alternativa do subespaço de $W_0^{1,2}(\Omega)$ com dimensão finita. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escolha k funções linearmente independentes $\phi_1, \ldots, \phi_k \in C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$ e, como na prova do Teorema 1.1, defina $X^k := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, onde o aberto $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ é dado pela hipótese $(\widetilde{a_2})$. Como $a(x) \geq a_0$ para q.t.p. em $\widetilde{\Omega}$, neste caso também vale a desigualdade (1.8) para todo $u \in X^k$. Portanto, existe uma sequência de pontos críticos $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $c_k = I_\theta(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. E, novamente do Lema 1.7, obtemos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Embora não possamos garantir que $u = 0$, segue do Lema 1.6 que

$$\|u\| \leq \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^{1/(1-q)}. \tag{1.13}$$

Como na prova do Teorema 1.1, temos que $u_k \in W^{2,p_\eta}(\Omega)$ e vale a desigualdade (1.11). Portanto, da imersão $W^{2,p_\eta}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, obtemos

$$\|u_k\|_\infty \leq C_0 \|u_k\|_{W^{2,p_\eta}} \leq C_0 \widehat{C}_\eta \|u_k\|^{q^\eta},$$

para alguma constante $C_0 = C_0(\Omega) > 0$. Como $\|u_k\| \to \|u\|$, segue da desigualdade acima e de (1.13) que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_k\|_\infty \leq C_0 \widehat{C}_\eta 2^{q^\eta} \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^{q^\eta/(1-q)}, \quad \forall\ k \geq k_0.$$

Com uma simples inspeção da prova do Teorema 1.1 podemos ver que a constante $\widehat{C}_\eta = \widehat{C}_\eta(\mu, \alpha)$ é diretamente proporcional a μ e α^{-1}. Então, se $\alpha > 0$ está fixado (item (i)), podemos tomar $\mu > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\|u_k\|_\infty \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall\ k \geq k_0.$$

Por outro lado, se $\mu > 0$ está fixado (item (ii)), o mesmo ocorre se tomarmos $\alpha > 0$ suficientemente grande. Em todo caso, segue o resultado. $\square$

1.3 O caso $h(x, s) = o(|s|)$

Nesta seção provaremos o Teorema 1.3. Não há diferenças significativas com relação às ideias da seção anterior. Essencialmente precisamos adaptar os resultados auxiliares.

Lema 1.10. *Suponha que h satisfaz $(\widetilde{h_2})$. Então, dado qualquer $\theta > 0$, existem um número $0 < \xi < \delta/2$ e uma função $g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ímpar na segunda variável, tais que vale a propriedade (g_1) (veja Lema 1.4). Além disso, se $G(x, s) := \int_0^s g(x, t)\mathrm{d}t$, então para todo $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ também valem*

$(\widetilde{g_3})$ $g(x, s)s - (q + 1)G(x, s) \leq \theta|s|^2$;

$(\widetilde{g_4})$ $|G(x, s)| \leq \dfrac{\theta}{2}|s|^2$;

$(\widetilde{g_5})$ $|g(x, s)| \leq \theta|s|$.

Demonstração. Denote $\varepsilon := \theta/14$. Segue de $(\widetilde{h_2})$ que existe $0 < \xi < \delta/2$ tal que

$$\max\{|H(x, s)|, |h(x, s)s|\} \leq \varepsilon|s|^2, \quad \forall\ (x, s) \in \Omega \times [-2\xi, 2\xi].$$

O restante da prova segue de modo análogo à prova do Lema 1.4. Portanto, omitiremos os detalhes. □

Como na seção anterior, para qualquer $\theta > 0$, consideramos a função g dada pelo lema acima e definimos um funcional $I_\theta : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I_\theta(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\int a(x)|u|^{q+1} - \mu\int G(x, u), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Neste caso, as propriedades $(\widetilde{g_4})$ e $(\widetilde{g_5})$ garantem que I_θ está bem definido e é de classe C^1 em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

No próximo resultado, semelhante ao Lema 1.5, denotamos por $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$.

Lema 1.11. *Suponha que as funções a e h satisfazem $(\widetilde{a_2})$ e $(\widetilde{h_2})$, respectivamente. Se*

$$0 < \theta < \frac{(1-q)\alpha\lambda_1}{2\mu}, \tag{1.14}$$

então $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Demonstração. Se $I_\theta(u) = I'_\theta(u)u = 0$, segue de (1.5), $(\widetilde{g}_3)$ e a desigualdade de Poincaré que

$$\frac{\alpha(1-q)}{2}\|u\|^2 \le \mu \int_\Omega (g(x,u)u - (q+1)G(x,u)) \le \mu\theta \int |u|^2 \le \frac{\mu\theta}{\lambda_1}\|u\|^2.$$

O resultado agora segue da desigualdade (1.14). □

Lema 1.12. *Para todo $\theta > 0$ satisfazendo* (1.14)*, o funcional I_θ é coercivo e satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Como vimos na prova do Lema 1.7, $1 < \sigma'_q(q+1) < 2^*$. Portanto, usando a desigualdade de Hölder, $(\widetilde{g}_4)$, (1.14), a desigualdade de Poincaré e a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma'_q(q+1)}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_\theta(u) &\ge \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\|a\|_{\sigma_q}\|u\|^{q+1}_{\sigma'_q(q+1)} - \frac{\mu\theta}{2}\|u\|_2^2 \\ &\ge \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\|a\|_{\sigma_q}\|u\|^{q+1}_{\sigma'_q(q+1)} - \frac{(1-q)\alpha\lambda_1}{4}\|u\|_2^2 \\ &\ge \frac{(1+q)\alpha}{4}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - C\|u\|^{q+1}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Agora basta argumentar como na prova do Lema 1.7. □

Apresentamos agora a prova do Teorema 1.3.

Demonstração do Teorema 1.3. O resultado segue dos lemas acima e, com algumas pequenas adaptações, do mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 1.1, porém com o subespaço $X^k \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ sendo definido como na prova do Teorema 1.2. □

CAPÍTULO 2

Solução ground state para uma equação de Kirchhoff-Schrödinger em $\mathbb{R}^2$ envolvendo crescimento exponencial crítico

2.1 Introdução

Pretendemos provar, via Teorema do Passo da Montanha, a existência de uma solução *ground state* não-negativa para o problema

$$(P_2) \qquad m\left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x\right)(-\Delta u + b(x)u) = A(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2,$$

onde $m : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ são funções contínuas e $b, A \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. O potencial b pode ser negativo ou se anular em conjuntos de medida positiva e a não-linearidade f tem crescimento exponencial crítico no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser. Vamos considerar hipóteses adequadas sobre b, A e f que permitirão tratar este problema variacionalmente no subespaço de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$H := \left\{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} b(x)u^2\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

2.1.1 Hipóteses

Defina $M(t) := \int_0^t m(\tau)\mathrm{d}\tau$, $t \geq 0$. As hipóteses sobre $m : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ são:

(m_1) $m_0 := \inf_{t\geq 0} m(t) > 0$;

(m_2) para todos $t_1, t_2 \geq 0$, vale

$$M(t_1 + t_2) \geq M(t_1) + M(t_2);$$

(m_3) $\dfrac{m(t)}{t}$ é uma função decrescente em $(0, +\infty)$.

No lema a seguir, apresentamos alguns exemplos de funções que satisfazem $(m_1)-(m_3)$.

Lema 2.1. *Se a função m for não-decrescente, então sua primitiva M satisfaz a condição (m_2). Além disso, dados $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, valem as condições $(m_1) - (m_3)$ se, para todo $t \geq 0$,*

(i) $m(t) = \alpha + \beta t^{\delta}$, *com* $\delta \in (0, 1]$*; ou*

(ii) $m(t) = \alpha(1 + \log(1 + t))$*; ou*

(iii) $m(t) = \alpha + \beta e^{-t}$.

Demonstração. Sejam $t_1, t_2 \geq 0$. Se m é não-decrescente, usando a mudança de variáveis $\theta = \tau - t_1$, obtemos

$$\begin{aligned} M(t_1 + t_2) &= \int_0^{t_1+t_2} m(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{t_1} m(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} m(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{t_1} m(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_2} m(\theta + t_1)\mathrm{d}\theta \\ &\geq \int_0^{t_1} m(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_2} m(\theta)\mathrm{d}\theta = M(t_1) + M(t_2), \end{aligned}$$

o que prova a primeira afirmação.

Para provar a segunda afirmação, observamos primeiramente que a condição (m_1) é obviamente satisfeita em cada um dos casos $(i) - (iii)$, pois $m_0 = \alpha > 0$ nos três casos. Além disso, para (i) e (ii), somente precisamos verificar (m_3), pois a condição (m_2) segue da primeira afirmação.

No caso (i), temos $m(t)/t = \alpha/t + \beta/t^{1-\delta}$. Como $\delta \leq 1$, esta função é claramente decrescente em $(0, +\infty)$. Já no caso (ii), temos $m(t)/t = \alpha(1/t + \log(1+t)/t)$. Derivando esta expressão com respeito a t, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m(t)}{t}\right) &= \alpha\left(\frac{-1}{t^2} + \frac{t-(1+t)\log(1+t)}{t^2(1+t)}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{-1-(1+t)\log(1+t)}{t^2(1+t)}\right) < 0, \quad \forall\, t > 0, \end{aligned}$$

isto é, novamente a função $m(t)/t$ é decrescente em $(0, +\infty)$. Portanto, nos casos (i) e (ii) vale a condição (m_3).

Agora vamos analisar (iii). Observe que, neste caso, $M(t) = \alpha t - \beta e^{-t}$. Então, usando a desigualdade $\beta e^{-t_k} \geq (\beta/2)e^{-(t_1+t_2)}$, $k = 1, 2$, obtemos

$$\begin{aligned} M(t_1) + M(t_2) &= \alpha t_1 - \beta e^{-t_1} + \alpha t_2 - \beta e^{-t_2} \\ &\leq \alpha t_1 - \frac{\beta}{2}e^{-(t_1+t_2)} + \alpha t_2 - \frac{\beta}{2}e^{-(t_1+t_2)} \\ &= \alpha(t_1+t_2) - \beta e^{-(t_1+t_2)} = M(t_1+t_2), \end{aligned}$$

o que prova que vale (m_2). Para verificar (m_3), basta notar que $m(t) = \alpha + \beta e^{-t}$ já é uma função decrescente e, portanto, neste caso $m(t)/t$ é decrescente em $(0, +\infty)$ por ser o produto de duas funções decrescentes em $(0, +\infty)$. $\square$

De modo a introduzir as hipóteses sobre o potencial $b \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, vamos definir

$$\lambda_1^b := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x : u \in H \text{ e } \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1\right\}$$

e, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto não-vazio,

$$\nu_b(\Omega) := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\mathrm{d}x : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}.$$

Assumimos $\nu_b(\emptyset) = +\infty$. As hipóteses sobre b são:

(b_1) $\lambda_1^b > 0$;

(b_2) $\lim\limits_{r\to+\infty} \nu_b(\mathbb{R}^2 \backslash \overline{B_r(0)}) = +\infty$, onde $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$;

(b_3) existe $B_0 > 0$ tal que

$$b(x) \geq -B_0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Sobre a função $A \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, faremos as seguintes hipóteses:

(A_1) $A(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(A_2) existem $\beta_0 > 1$, $C_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que

$$A(x) \leq C_0\{1 + (b^+(x))^{1/\beta_0}\}, \quad |x| \geq R_0,$$

onde $b^+(x) := \max\{0, b(x)\}$.

A hipótese (b_1) garante que H é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_H = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv)\mathrm{d}x$$

e norma $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u\rangle_H}$, imerso continuamente em $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e, consequentemente, em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p \geq 2$ (veja [43, Lema 2.1]). Neste caso, (A_1) e (A_2) garantem que, para todo $p \geq 2$, H está imerso continuamente no espaço de Lebesgue com peso

$$L^p_A(\mathbb{R}^2) := \left\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^p \mathrm{d}x < \infty\right\},$$

que é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p_A(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Adicionalmente, (b_2) garante que esta imersão é compacta (veja [43, Lema 2.2, Proposições 2.1 e 3.1] ou [49]). Como, por (A_1), $L^p_A(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, então (b_2) também nos dá a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$.

A imersão $H \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ implica que, para alguma constante $\zeta > 0$,

$$\|u\|_H \geq \zeta \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall\, u \in H. \tag{2.1}$$

Esta desigualdade será importante na demonstração do Lema 2.9 na próxima seção. Observe que, se $b(x) \leq 0$ em algum conjunto de medida positiva, então não podemos ter $\zeta > 1$. Mas podemos evidentemente considerar $\zeta = 1$ no caso em que b satisfaz

$(\widehat{b_3})$ $b(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Com respeito ao termo não-linear $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, como estamos buscando uma solução não-negativa para o problema (P_2), vamos supor que $f(s) = 0$, para todo $s \leq 0$. Defina $F(s) := \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, $s \in \mathbb{R}$. As principais hipóteses sobre f são:

(f_1) existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty & , \text{ se } \alpha < \alpha_0 \end{cases};$$

(f_2) existem $s_0, K_0 > 0$ tais que

$$F(s) \leq K_0 f(s), \quad \forall\ s \geq s_0;$$

(f_3) existe $\theta_0 > 4$ tal que

$$\theta_0 F(s) \leq s f(s), \quad \forall\ s > 0;$$

(f_4) $\dfrac{f(s)}{s^3}$ é uma função não-decrescente e positiva em $(0, +\infty)$.

2.1.2 Principais resultados e notações

Nos resultados que enunciaremos a seguir, vamos considerar hipóteses adicionais sobre a função f que estão relacionadas com algumas das hipóteses introduzidas anteriormente. Para isto, precisamos fixar algumas notações:

$$S_p := \inf_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_H}{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}, \quad p \geq 2;$$

$$C_p := \inf\left\{C > 0 : pM(t^2 S_p^2) - 2Ct^p \leq pM\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right), \quad \forall\ t > 0\right\}, \quad p > 4;$$

$$M_R := \|b\|_{L^\infty(B_R(0))}, \quad R > 0.$$

Os valores S_p e C_p são finitos, para $p \geq 2$ e para $p > 4$ respectivamente, em decorrência da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ (consequência de (b_1)) e da hipótese (m_3), que implica que $m(t) < m(1)t$ para todo $t > 1$.

Podemos agora enunciar nossos principais resultados.

Teorema 2.2. *Suponha que valem $(m_1) - (m_3)$, $(b_1) - (b_3)$, $(A_1) - (A_2)$ e $(f_1) - (f_4)$. Suponha ainda que f satisfaz*

(f_5) *existe* $p_0 > 4$ *tal que*

$$f(s) > C_{p_0} s^{p_0 - 1}, \quad \forall\ s > 0.$$

Então o problema (P_2) *possui uma solução ground state não-negativa.*

Se trocarmos a hipótese (b_3) por $(\widehat{b_3})$ e, consequentemente, tivermos $\zeta = 1$ na desigualdade (2.1), podemos obter o mesmo resultado do Teorema 2.2 considerando uma condição mais natural no lugar de (f_5), conforme enunciamos a seguir.

Teorema 2.3. *Suponha que valem* $(m_1) - (m_3)$, $(b_1) - (b_2)$, $(\widehat{b_3})$, $(A_1) - (A_2)$ *e* $(f_1) - (f_4)$. *Suponha ainda que* f *satisfaz*

(f_6) *existe* $\gamma_0 > 0$ *tal que*

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{s f(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \gamma_0 > 4\alpha_0^{-1} m \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} \right) \inf_{R > 0} \{R^{-2} e^{R^2 M_R / 2}\}.$$

Então o problema (P_2) *possui uma solução ground state não-negativa.*

Observação 2.4. *As hipóteses* (m_3) *e* (f_4) *garantem que a solução dada pelos Teoremas 2.2 e 2.3 é solução ground state. No entanto, como veremos nas demonstrações destes teoremas, ainda obtemos solução não-trivial não-negativa para o problema* (P_2), *não necessariamente ground state, se trocarmos* (m_3) *e* (f_4) *por condições mais fracas, a saber:*

(m_3^*) *existem constantes* $a_1 > 0$ *e* $T > 0$ *tais que*

$$m(t) \leq a_1 t, \quad \forall\ t \geq T;$$

(f_4^*) $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0;$

e as condições de monotonicidade do Lema 2.21 (veja seção 2.5). Especificamente no caso do Teorema 2.3, esta substituição nos permite considerar funções f *que se anulam em uma vizinhança da origem.*

No caso em que $m \equiv 1$, a equação em (P_2) se reduz à equação de Schrödinger

$$(\widehat{P_2}) \qquad -\Delta u + b(x)u = A(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Neste caso, alternativamente a (f_3) e (f_4), consideramos as hipóteses

$(\widehat{f}_3)$ existe $\widehat{\theta}_0 > 2$ tal que

$$\widehat{\theta}_0 F(s) \leq sf(s), \quad \forall\ s > 0;$$

$(\widehat{f}_4)$ $\dfrac{f(s)}{s}$ é uma função não-decrescente e positiva em $(0, +\infty)$.

Diferentemente de (f_4), a hipótese $(\widehat{f}_4)$ não implica em (f_4^*). Então, definindo, para $q > 2$,

$$\begin{aligned} \widehat{C}_q &:= \inf\left\{C > 0 : qS_q^2 t^2 - 2Ct^q \leq \frac{4\pi q\zeta^2}{\alpha_0}, \quad \forall\ t > 0\right\} \\ &= S_q^q \left(\frac{\alpha_0(q-2)}{4\pi q\zeta^2}\right)^{(q-2)/2}, \end{aligned}$$

temos o seguinte resultado, semelhante ao Teorema 2.2, para o problema $(\widehat{P_2})$.

Teorema 2.5. *Suponha que valem* $(b_1)-(b_3)$, $(A_1)-(A_2)$, $(f_1)-(f_2)$, $(\widehat{f}_3)$ *e* (f_4^*). *Suponha ainda que* f *satisfaz*

$(\widehat{f}_5)$ *existe* $q_0 > 2$ *tal que*

$$f(s) > \widehat{C}_{q_0} s^{q_0 - 1}, \quad \forall\ s > 0.$$

Então o problema $(\widehat{P_2})$ *possui uma solução fraca não-trivial não-negativa. Se, adicionalmente,* f *satisfaz* $(\widehat{f}_4)$, *então a solução é ground state.*

Do mesmo modo, temos um resultado semelhante ao Teorema 2.3:

Teorema 2.6. *Suponha que valem* $(b_1) - (b_2)$, $(\widehat{b}_3)$, $(A_1) - (A_2)$, $(f_1) - (f_2)$, $(\widehat{f}_3)$ *e* (f_4^*). *Suponha ainda que* f *satisfaz*

$(\widehat{f}_6)$ *existe* $\widehat{\gamma}_0 > 0$ *tal que*

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \widehat{\gamma}_0 > 4\alpha_0^{-1} \inf_{R>0}\{R^{-2} e^{R^2 M_R/2}\}.$$

Então o problema $(\widehat{P_2})$ *possui uma solução fraca não-trivial não-negativa. Se, adicionalmente,* f *satisfaz* $(\widehat{f}_4)$, *então a solução é ground state.*

No que segue, escreveremos $\int_\Omega u$ em vez de $\int_\Omega u dx$, para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $u \in L^1(\Omega)$. As normas em H, em $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e em $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, serão denotadas por $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{1,2}$ e $\|\cdot\|_p$, respectivamente. As notações $C_1, C_2, \ldots$ serão usadas para representar constantes positivas cujos valores exatos são irrelevantes. As hipóteses $(b_1) - (b_3)$, $(A_1) - (A_2)$ serão sempre assumidas a partir de agora.

2.2 Resultados preliminares

O resultado a seguir, provado em [19] (veja também [10]), será útil para provar os demais resultados desta seção.

Lema 2.7. *Se* $\alpha > 0$ *e* $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha v^2} - 1) < \infty.$$

Além disso, se $\alpha < 4\pi$, $\|\nabla v\|_2 \leq 1$ *e* $\|v\|_2 \leq M$, *então existe uma constante* $C = C(\alpha, M) > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha v^2} - 1) \leq C.$$

Lema 2.8. *Se* $\alpha > 0$, *então*

(i) *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e todo* $r \geq 1$, *vale*

$$(e^{\alpha s^2} - 1)^r \leq e^{r\alpha s^2} - 1;$$

(ii) *para todo* $v \in H$ *e todo* $r \in [1, \beta_0)$, *onde* β_0 *é dado pela hipótese* (A_2), *a função* $A(\cdot)^r(e^{\alpha v^2} - 1)^r$ *pertence a* $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Para $r = 1$ a desigualdade do item (i) é óbvia. Para $r > 1$, considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = e^{r\alpha s^2} - 1 - (e^{\alpha s^2} - 1)^r.$$

Temos que

$$h'(s) = 2r\alpha s e^{r\alpha s^2} - 2r\alpha s e^{\alpha s^2}(e^{\alpha s^2} - 1)^{r-1} = 2r\alpha s e^{\alpha s^2}[e^{(r-1)\alpha s^2} - (e^{\alpha s^2} - 1)^{r-1}]. \quad (2.2)$$

Como $\alpha > 0$, $r > 1$ e, consequentemente,

$$e^{(r-1)\alpha s^2} = (e^{\alpha s^2})^{r-1} > (e^{\alpha s^2} - 1)^{r-1}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

segue de (2.2) que $h'(s) > 0$ para $s > 0$ e $h'(s) < 0$ para $s < 0$. Portanto $s = 0$ é ponto de mínimo global de h, isto é, $h(s) \geq h(0) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, o que prova o item (i) para $r > 1$.

Vamos agora provar (ii). Usando (i) e o fato de que $A \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)^r (e^{\alpha v^2} - 1)^r \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} A(x)^r (e^{r\alpha v^2} - 1) \\ &\quad + C_1 \int_{B_{R_0}(0)} (e^{r\alpha v^2} - 1),\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $R_0 > 0$ é dado na hipótese (A_2). Do Lema 2.7, segue que a segunda integral do lado direito acima é finita. Para estimar a primeira integral, note que, usando a expansão em série de Taylor da função exponencial,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} A(x)^r (e^{r\alpha v^2} - 1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r\alpha)^m}{m!} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} A(x)^r v^{2m}. \tag{2.4}$$

Agora, por (A_2) e pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} A(x)^r v^{2m} \leq \\ &\leq C_2 \|v\|_{2m}^{2m} + C_3 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} (b^+(x))^{r/\beta_0} v^{2m} \\ &\leq C_2 \|v\|_{2m}^{2m} + C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} b^+(x) v^2 \right)^{r/\beta_0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} v^{2(m\beta_0 - r)/(\beta_0 - r)} \right)^{(\beta_0 - r)/\beta_0}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Mas, por (b_3) e (b_1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} b^+(x) v^2 \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^2} b(x) v^2 - \int_{\{b(x) \leq 0\}} b(x) v^2 \\ &\leq \quad \|v\|^2 + B_0 \|v\|_2^2 \\ &\leq \quad \|v\|^2 + B_0 \frac{\|v\|^2}{\lambda_1^b} \\ &= \quad \|v\|^2 \left(1 + \frac{B_0}{\lambda_1^b} \right).\end{aligned}$$

Então, da desigualdade acima e de (2.5) segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}(0)} A(x)^r v^{2m} \quad &\leq \quad C_4 \|v\|^{2m} + C_5 \|v\|^{2r/\beta_0} \|v\|^{2(m\beta_0 - r)/\beta_0} \\ &= \quad C_6 \|v\|^{2m},\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde usamos o fato de que $2m$ e $2(m\beta_0 - r)/(\beta_0 - r)$ são maiores ou iguais a 2 e H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p \geq 2$. Portanto, de (2.3), (2.4) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)^r(e^{\alpha v^2}-1)^r &\leq C_6\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(r\alpha\|v\|^2)^m + C_1\int_{B_{R_0}(0)}(e^{r\alpha v^2}-1)\\ &= C_6(e^{r\alpha\|v\|^2}-1)+C_1\int_{B_{R_0}(0)}(e^{r\alpha v^2}-1) \qquad (2.7)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

O lema a seguir é uma versão do Lema 2.7 para funções de H.

Lema 2.9. *Sejam $\alpha > 0$, $q > 0$ e $\omega, v \in H$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega|^q(e^{\alpha v^2}-1) < \infty.$$

Além disso, se $\alpha < 4\pi\zeta^2$ e $\|v\| \leq 1$, então existe uma constante $C = C(\alpha, q) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega|^q(e^{\alpha v^2}-1) \leq C\|\omega\|^q.$$

Demonstração. Seja $r \in (1, \beta_0)$ suficientemente próximo de 1 tal que, denotando $r' = r/(r-1)$, tenhamos $qr' \geq 2$. Pela desigualdade de Hölder e pela imersão $H \hookrightarrow L^{qr'}(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega|^q(e^{\alpha v^2}-1) &\leq \|\omega\|^q_{qr'}\left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)^r(e^{\alpha v^2}-1)^r\right)^{1/r}\\ &\leq C_1\|\omega\|^q\left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)^r(e^{\alpha v^2}-1)^r\right)^{1/r}.\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Segue do Lema 2.8 que esta última expressão é finita, o que prova a primeira afirmação.

Se $\alpha < 4\pi\zeta^2$ e $\|v\| \leq 1$, considere $r \in (1, \beta_0)$ tal que $r\alpha < 4\pi\zeta^2$. Das desigualdades (2.8) e (2.7), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega|^q(e^{\alpha v^2}-1) &\leq C_2\|\omega\|^q\left(e^{r\alpha\|v\|^2}-1+\int_{B_{R_0}(0)}(e^{r\alpha v^2}-1)\right)^{1/r}\\ &= C_2\|\omega\|^q\left(e^{r\alpha\|v\|^2}-1+\int_{B_{R_0}(0)}(e^{r\alpha\zeta^{-2}(\zeta v)^2}-1)\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Como $\|v\| \leq 1$, por (2.1) temos que $\|\nabla(\zeta v)\|_2 \leq 1$. Além disso, da imersão $H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ segue que $\|\zeta v\|_2 \leq C_3\zeta\|v\| \leq M$, para algum $M > 0$ independente de v. Então, como

$r\alpha\zeta^{-2} < 4\pi$, o resultado segue do Lema 2.7 e da desigualdade acima. $\square$

Corolário 2.10. *Sejam $q > 0$ e $(\omega_n), (v_n) \subset H$ tais que (ω_n) é limitada em H, $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em H e $\|v_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, se $\|v\| < 1$, para todo $0 < p < 4\pi\zeta^2/(1 - \|v\|^2)$ vale*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q (e^{pv_n^2} - 1) < \infty.$$

O mesmo vale se $\|v\| = 1$ e $0 < p < +\infty$.

Demonstração. Primeiramente note que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} a^2 &= (a-b)^2 + b^2 + 2\varepsilon(a-b)b\varepsilon^{-1} \\ &\leq (a-b)^2 + b^2 + 2\left(\frac{\varepsilon^2(a-b)^2}{2} + \frac{b^2\varepsilon^{-2}}{2}\right) \\ &= (1+\varepsilon^2)(a-b)^2 + (1+\varepsilon^{-2})b^2. \end{aligned}$$

Então, se $r_1, r_2 > 1$ são tais que $1/r_1 + 1/r_2 = 1$, novamente pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned} A(x)|\omega_n|^q e^{pv_n^2} &\leq (A(x)|\omega_n|^q)^{1/r_1} e^{p(1+\varepsilon^2)(v_n - v)^2} (A(x)|\omega_n|^q)^{1/r_2} e^{p(1+\varepsilon^{-2})v^2} \\ &\leq \frac{1}{r_1} A(x)|\omega_n|^q e^{r_1 p(1+\varepsilon^2)(v_n-v)^2} + \frac{1}{r_2} A(x)|\omega_n|^q e^{r_2 p(1+\varepsilon^{-2})v^2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q (e^{pv_n^2} - 1) &= \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q e^{pv_n^2} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \\ &\leq \frac{1}{r_1} \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \left(e^{r_1 p(1+\varepsilon^2)(v_n-v)^2} - 1\right) \\ &\quad + \frac{1}{r_2} \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \left(e^{r_2 p(1+\varepsilon^{-2})v^2} - 1\right). \end{aligned}$$

Como (ω_n) é limitada em H, a desigualdade (2.8) com $\alpha = r_2 p(1 + \varepsilon^{-2})$ e o Lema 2.8 garantem que a segunda integral do lado direito da desigualdade acima é limitada por uma constante que não depende de n. Vamos agora estimar a outra integral. Observe que, usando a hipótese $\|v_n\| = 1$ e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em H, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p\,\|v_n - v\|^2 &= \lim_{n\to\infty} p(\|v_n\|^2 - 2\,\langle v_n, v\rangle_H + \|v\|^2)\\
&= p(1 - \|v\|^2)\\
&< 4\pi\zeta^2.
\end{aligned}$$

Então, tomando $r_1 > 1$ suficientemente próximo de 1 e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$r_1 p(1+\varepsilon^2)\,\|v_n - v\|^2 < 4\pi\zeta^2,$$

para todo $n > n_0$. Como

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \left(e^{r_1 p(1+\varepsilon^2)(v_n - v)^2} - 1\right) = \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \left(e^{r_1 p(1+\varepsilon^2)\|v_n - v\|^2((v_n - v)/\|v_n - v\|)^2} - 1\right),$$

segue do Lema 2.9 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|\omega_n|^q \left(e^{r_1 p(1+\varepsilon^2)(v_n - v)^2} - 1\right) \le C_1\,\|\omega_n\|^q \le C_2,$$

o que conclui a demonstração. □

2.3 Estrutura variacional

Considere o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u), \quad u \in H. \tag{2.9}$$

Veremos que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e os pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas do problema (P_2), isto é,

$$I'(u)v = m(\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + b(x)uv) - \int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u)v, \quad u, v \in H. \tag{2.10}$$

Observe primeiramente que, dados $\varepsilon > 0$, $\alpha > \alpha_0$ e $q \ge 1$, por (f_1) e (f_4^*) existe uma constante $C = C(\varepsilon, \alpha, q) > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$f(s) \le \varepsilon|s| + C|s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), \tag{2.11}$$

$$F(s) \le \varepsilon s^2 + C|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1). \tag{2.12}$$

Esta última desigualdade, a imersão $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$ e o Lema 2.9 mostram que I está bem definido. Para provar que $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ e que vale (2.10), vamos denotar

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2), \quad \Psi(u) := \int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u),$$

para $u \in H$. Um argumento padrão mostra que $\Phi \in C^1(H,\mathbb{R})$ e que sua derivada é dada pela primeira parcela no lado direito de (2.10). Vamos então provar que $\Psi \in C^1(H,\mathbb{R})$. Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.11. *Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em H. Então, para alguma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$, existe $g \in H$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Como $(u_n) \subset H$ é uma sequência de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m - u_n\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{se } m,n \geq n_k.$$

Então, denotando u_{n_k} simplesmente por u_k, $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Como $u_k \to u$ fortemente em H quando $k \to \infty$ e H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p \geq 2$, temos que $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$, a menos de subsequência. Agora, definindo

$$w_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

por (2.13) segue que

$$\|w_n\| \leq 1, \quad \|\nabla w_n\|_2 \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^2} b(x)w_n^2 \leq 1, \quad \|w_n\|_2 \leq C_1. \tag{2.14}$$

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ a sequência $(w_n(x)) \subset \mathbb{R}$ é não-decrescente. Logo, existe na reta estendida o limite

$$w(x) := \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

e, portanto, w é uma função mensurável (veja [8, Corolário 2.10]). Uma vez que $(w_n(x))^2 \to (w(x))^2$ quando $n \to \infty$, pelo Teorema da Convergência Monótona concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} w^2, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (b(x)+B_0)w_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (b(x)+B_0)w^2.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} b(x)w_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} b(x)w^2.$$

Assim, por (2.14), temos que $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\int_{\mathbb{R}^2} b(x)w^2 < \infty$. E como

$$\begin{aligned}
|w_n(x) - w(x)|^2 &\leq (|w_n(x)| + |w(x)|)^2 \\
&\leq 2(|w_n(x)|^2 + |w(x)|^2) \\
&\leq 4|w(x)|^2,
\end{aligned}$$

o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue assegura que $w_n \to w$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Esta convergência e a limitação de $(|\nabla w_n|)$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ implicam que $w \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ (veja [9, Capítulo 9, Observação 4]). Concluímos que $w \in H$.

Agora observe que, para $j > k \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
|u_j(x) - u_k(x)| &\leq |u_j(x) - u_{j-1}(x)| + \cdots + |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \\
&\leq w_{j-1}(x) - w_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$|u(x) - u_k(x)| \leq w(x) - w_{k-1}(x) \leq w(x),$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Portanto, definindo $g := |u| + w$, temos que $g \in H$ e $|u_k(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Vamos agora determinar a derivada de Gateaux do funcional Ψ. Dados $u, v \in H$, como F é de classe C^1, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e todo $t \in \mathbb{R}$ o Teorema do Valor Médio assegura que existe $\xi = \xi(x,t) \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x) + \xi tv(x))v(x).$$

Então

$$\frac{\Psi(u + tv) - \Psi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^2}\left(A(x)\frac{F(u + tv) - F(u)}{t}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u + \xi tv)v.$$

Para determinar o limite desta expressão quando $t \to 0$, note que, por (2.11) com $q = 2$ e pela desigualdade de Young, para $|t| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|A(x)f(u+\xi tv)v| &\leq A(x)|u+\xi tv||v|\left(\varepsilon + C\left(e^{\alpha(u+\xi tv)^2}-1\right)\right)\\
&\leq A(x)(|u||v|+|v|^2)\left(\varepsilon + C\left(e^{\alpha(|u|+|v|)^2}-1\right)\right)\\
&\leq A(x)\left(\frac{|u|^2}{2}+\frac{3|v|^2}{2}\right)\left(\varepsilon + C\left(e^{\alpha(|u|+|v|)^2}-1\right)\right).
\end{aligned}$$

Pela imersão $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$ e o Lema 2.9, esta última expressão pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, a continuidade de f implica que

$$A(x)f(u(x)+\xi tv(x))v(x) \longrightarrow A(x)f(u(x))v(x) \quad \text{quando } t \to 0,$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$T_u(v) := \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u)v. \tag{2.15}$$

Este funcional T_u é claramente linear em v. Para verificar que ele é a derivada de Gateaux de Ψ em u, basta mostrar que é contínuo. Novamente por (2.11) com $q = 2$, pela desigualdade de Hölder, a imersão contínua de $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$ e o Lema 2.8(i), obtemos

$$\begin{aligned}
|T_u(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|f(u)||v|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\left\{\varepsilon A(x)|u||v| + CA(x)|u||v|(e^{\alpha u^2}-1)\right\}\\
&= \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\sqrt{A(x)}|u|\sqrt{A(x)}|v| + C\int_{\mathbb{R}^2}\sqrt{A(x)}|u|(e^{\alpha u^2}-1)\sqrt{A(x)}|v|\\
&\leq C_1\|u\|\|v\| + C_2\left(\int_{\mathbb{R}^2}A(x)|u|^2(e^{2\alpha u^2}-1)\right)^{1/2}\|v\|.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.9, a integral que aparece nesta última expressão é finita. Concluímos que T_u é contínuo e, portanto, é a derivada de Gateaux de Ψ em u, isto é, $T_u = D\Psi(u)$.

Resta mostrar que a aplicação $D\Psi : H \to H'$ é contínua, onde H' é o dual de H. Neste caso, $D\Psi$ será a derivada de Frechét de Ψ e, consequentemente, $\Psi \in C^1(H,\mathbb{R})$. Seja $(u_n) \subset H$ tal que $u_n \to u$ em H. Então, para todo $v \in H$, pela desigualdade de

Hölder segue que

$$
\begin{aligned}
|(D\Psi(u_n) - D\Psi(u))v| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{A(x)}|f(u_n) - f(u)|\sqrt{A(x)}|v| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|f(u_n) - f(u)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)v^2\right)^{1/2} \qquad (2.16)\\
&\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|f(u_n) - f(u)|^2\right)^{1/2} \|v\|\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, a menos de subsequência temos que $u_n(x) \to u(x)$ e, pelo Lema 2.11, $|u_n(x)|, |u(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^2$, para alguma $g \in H$. Segue da continuidade de f e da desigualdade (2.11) que

$$
A(x)|f(u_n(x)) - f(u(x))|^2 \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2
$$

e

$$
\begin{aligned}
A(x)|f(u_n) - f(u)|^2 &\leq 2A(x)(|f(u_n)|^2 + |f(u)|^2) \\
&\leq C_4 A(x)\left(g^2 + g^2(e^{2\alpha g^2} - 1)\right).
\end{aligned}
$$

Como esta última expressão é integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $A(x)|f(u_n) - f(u)|^2 \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$ quando $n \to \infty$. Portanto, da desigualdade (2.16) concluímos que

$$
\|D\Psi(u_n) - D\Psi(u)\|_{H'} \longrightarrow 0 \;\; \text{quando } n \to \infty,
$$

ou seja, $D\Psi : H \to H'$ é contínua e, consequentemente, $\Psi \in C^1(H, \mathbb{R})$. Além disso, de (2.15) obtemos a igualdade em (2.10).

2.3.1 Geometria do Passo da Montanha

Lema 2.12. *Suponha que valem (m_1), (f_1) e (f_4^*). Então existem $\rho > 0$ e $\sigma > 0$ tais que*

$$
I(u) \geq \sigma \;, \;\; \forall\, u \in H \;\; com \;\; \|u\| = \rho.
$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$, $\alpha > \alpha_0$ e $q > 2$. Por (2.12), pela imersão $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$ e pelo Lema 2.9, se $0 < \rho_1 < (4\pi\zeta^2/\alpha)^{1/2}$, então para $u \in H$ com $\|u\| \leq \rho_1$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u) &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} A(x)u^2 + C\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^q(e^{\alpha u^2} - 1) \\ &\leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u|^q \left(e^{\alpha\rho_1^2(u/\|u\|)^2} - 1\right) \\ &\leq \varepsilon C_1 \|u\|^2 + C_2 \|u\|^q . \end{aligned}$$

Seja $m_0 > 0$ dado pela hipótese (m_1). Como $M(t) \geq m_0 t$, para todo $t \geq 0$, obtemos

$$I(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{m_0}{2} - \varepsilon C_1 - C_2 \|u\|^{q-2}\right),$$

sempre que $\|u\| \leq \rho_1$. Agora tome $\varepsilon > 0$ e $0 < \rho \leq \rho_1$ pequenos tais $(m_0/2) - \varepsilon C_1 - C_2\rho^{q-2} > 0$. Esta escolha é possível porque $q > 2$. Assim, para todo $u \in H$ com $\|u\| = \rho$, temos $I(u) \geq \sigma$, onde

$$\sigma := \rho^2 \left(\frac{m_0}{2} - \varepsilon C_1 - C_2\rho^{q-2}\right) > 0.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Lema 2.13. *Suponha que valem $(m_1), (m_3^*), (f_1), (f_3)$ e (f_4^*). Então existe $v_0 \in H$ tal que $I(v_0) < 0$ e $\|v_0\| > \rho$, onde $\rho > 0$ é dado pelo Lema 2.12.*

Demonstração. Pela continuidade de m e por (m_3^*), existe $a_0 > 0$ tal que

$$M(t) \leq a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.17}$$

Por outro lado, por (f_3), existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq C_1 s^{\theta_0} - C_2, \quad \forall\, s \geq 0.$$

Agora escolha $v \in C_0(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ com $v(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado contendo o suporte da função v. Então, pelas desigualdades acima e por (A_1), para todo $\tau \geq 0$ temos que

$$I(\tau v) \leq a_0\tau^2 \frac{\|v\|^2}{2} + a_1\tau^4 \frac{\|v\|^4}{4} - C_1\tau^{\theta_0} \int_\Omega v^{\theta_0} + C_2|\Omega|.$$

Como $\int_\Omega v^{\theta_0} > 0$ e $\theta_0 > 4$, concluímos que

$$I(\tau v) \longrightarrow -\infty \quad \text{quando } \tau \to +\infty.$$

Então o resultado vale para $v_0 = \tau_0 v$, com $\tau_0 > 0$ suficientemente grande. $\square$

Observação 2.14. *Se f satisfaz a condição $f(s) > 0$, para todo $s > 0$, então na demonstração do Lema 2.13 podemos trocar a função $v \in C_0(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ com $v \geq 0$ por qualquer função $w \in H$ com $w^+ = \max\{0, w\} \not\equiv 0$ e, consequentemente, $\int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(w) > 0$, em decorrência desta condição adicional sobre f. De fato, dado $s \in \mathbb{R}$, considere a função*

$$\phi_s(\tau) = \tau^{-\theta_0}F(\tau s) - F(s), \quad \tau > 0.$$

Por (f_3), $\phi_s'(\tau) \geq 0$, para todo $\tau > 0$. Portanto, $\phi_s(\tau) \geq \phi_s(1) = 0$, para todo $\tau \geq 1$. Ou seja,

$$F(\tau s) \geq \tau^{\theta_0}F(s), \quad \forall\ \tau \geq 1.$$

Daí, para $\tau \geq 1$, por (2.17) e pela desigualdade acima, temos que

$$I(\tau w) \leq a_0\tau^2\frac{\|w\|^2}{2} + a_1\tau^4\frac{\|w\|^4}{4} - \tau^{\theta_0}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(w).$$

A conclusão segue então como na demonstração do Lema 2.13.

Os Lemas 2.12 e 2.13 mostram que o funcional energia I tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha e portanto existe uma sequência $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c^* \ \text{ e } \ I'(u_n) \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$, onde

$$c^* := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

e $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$. É importante notar que, pela definição de c^* e a demonstração do Lema 2.12, vemos facilmente que $c^* \geq \sigma > 0$.

2.4 Estimativas minimax

Nesta seção, primeiramente vamos obter uma estimativa para c^* em termos dos parâmetros ζ e α_0, dados na desigualdade (2.1) e na hipótese (f_1), respectivamente. Para isto, vamos considerar separadamente os casos $\zeta < 1$ e $\zeta = 1$. Depois, vamos estabelecer a relação entre c^* e o nível de energia mínima na variedade de Nehari associada ao funcional I.

2.4.1 Estimativa para c^* no caso $\zeta < 1$

Vamos precisar do lema a seguir, que mostra que é atingido o ínfimo que define S_p, a melhor constante da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, com $p \geq 2$.

Lema 2.15. *Seja $p \geq 2$. Existe uma função não-negativa $v_p \in H\backslash\{0\}$ tal que $S_p = \|v_p\| > 0$.*

Demonstração. Seja $(v_n) \subset H$ uma sequência minimizante para S_p em H, isto é,

$$\|v_n\|_p = 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}; \quad \|v_n\| \longrightarrow S_p, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.18}$$

Podemos assumir que cada v_n é não-negativa (se necessário, troque v_n por $|v_n|$). Pela limitação de (v_n) em H e a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, existe $v_p \in H$ tal que, a menos de subsequência,

$$\|v_p\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\| = S_p; \quad v_n \longrightarrow v_p \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^2). \tag{2.19}$$

Da convergência acima e de (2.18) segue que $\|v_p\|_p = 1$ e que $v_n(x) \to v_p(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Então $v_p \not\equiv 0$ e $v_p \geq 0$. Além disso, da definição de S_p segue que $S_p \leq \|v_p\|$. Portanto, de (2.19) concluímos que vale a igualdade. □

Proposição 2.16. *Suponha que valem (m_3^*), (f_1), (f_3), (f_4^*) e (f_5). Então*

$$c^* < \frac{1}{2}M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right).$$

Demonstração. Seja $v_{p_0} \in H\backslash\{0\}$ a função do Lema 2.15 para $p_0 > 4$ dado na hipótese (f_5). Como v_{p_0} é não-negativa e (f_5) implica que $f(s) > 0$ para todo $s > 0$, pela Observação 2.14 temos que $I(tv_{p_0}) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Então, pela definição de c^*, segue que

$$c^* \leq \max_{t>0} I(tv_{p_0}).$$

Logo, é suficiente provar que

$$\max_{t>0} I(tv_{p_0}) < \frac{1}{2}M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right).$$

Mas, por (A_1) e (f_5),

$$I(tv_{p_0}) < \frac{1}{2}M(t^2\,\|v_{p_0}\|^2) - t^{p_0}\frac{C_{p_0}}{p_0}\int_{\mathbb{R}^2}|v_{p_0}|^{p_0}, \quad \forall\ t>0.$$

Portanto, lembrando que $\|v_{p_0}\| = S_{p_0}$, $\|v_{p_0}\|_{p_0} = 1$ e, por definição,

$$C_{p_0} = \inf\left\{C>0 : p_0M(t^2S_{p_0}^2) - 2Ct^{p_0} \leq p_0M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right), \quad \forall\ t>0\right\},$$

segue que

$$\begin{aligned}\max_{t>0} I(tv_{p_0}) &< \max_{t>0}\left\{\frac{1}{2}M(t^2S_{p_0}^2) - t^{p_0}\frac{C_{p_0}}{p_0}\right\}\\ &\leq \frac{1}{2}M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right),\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

2.4.2 Estimativa para c^* no caso $\zeta = 1$

Para $R>0$, considere a seguinte sequência de funções de Green escalonadas e truncadas, também considerada por Moser (veja [38]):

$$\widetilde{G}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases}(\log n)^{1/2} & , \ \text{se } |x| \leq R/n,\\[2ex] \dfrac{\log(R/|x|)}{(\log n)^{1/2}} & , \ \text{se } R/n \leq |x| \leq R,\\[2ex] 0 & , \ \text{se } |x| \geq R,\end{cases} \tag{2.20}$$

$n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Observe que $\widetilde{G}_n \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e $\operatorname{supp}(\widetilde{G}_n) = \overline{B_R(0)}$. Consequentemente, $\widetilde{G}_n \in H$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\widetilde{G}_n|^2 &= \frac{1}{2\pi\log n}\int_{\{R/n<|x|<R\}}|x|^{-2}\\ &= \frac{1}{\log n}\int_{\frac{R}{n}}^{R} s^{-1}\mathrm{d}s\\ &= 1\end{aligned} \tag{2.21}$$

e, recordando a notação $M_R = \|b\|_{L^\infty(B_R(0))}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} b(x)|\widetilde{G}_n|^2 &= \frac{\log n}{2\pi}\int_{\{|x|\leq R/n\}} b(x) + \frac{1}{2\pi\log n}\int_{\{R/n\leq|x|\leq R\}} b(x)\log^2(R/|x|) \\
&\leq \frac{R^2M_R\log n}{2n^2} + \frac{M_R}{\log n}\int_{\frac{R}{n}}^{R} s\log^2(R/s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{R^2M_R\log n}{2n^2} + \frac{R^2M_R}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{1} t\log^2(1/t)\mathrm{d}t \qquad (2.22)\\
&= \frac{R^2M_R\log n}{2n^2} + \frac{R^2M_R}{\log n}\left(\frac{n^2-1}{4n^2} - \frac{\log^2(n)+\log n}{2n^2}\right) \\
&\leq \frac{R^2M_R}{4\log n}.
\end{aligned}
$$

Agora denote $\xi_n := \|\widetilde{G}_n\|$ e considere a sequência de funções $G_n := \widetilde{G}_n/\xi_n$.

Lema 2.17. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(0)} e^{4\pi G_n^2} \geq \pi R^2 e^{-R^2M_R/2} + \pi R^2.$$

Demonstração. Por (2.21) e (2.22), $\xi_n^2 \leq 1 + R^2M_R/(4\log n)$, e portanto

$$2(\xi_n^{-2}-1)\log n = 2\xi_n^{-2}(1-\xi_n^2)\log n \geq -\xi_n^{-2}\frac{R^2M_R}{2}.$$

Usando as definições de G_n e $\widetilde{G}_n$ e a desigualdade acima, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R/n}(0)} e^{4\pi G_n^2} &= \int_{B_{R/n}(0)} e^{2\xi_n^{-2}\log n} \\
&= \pi R^2 e^{2(\xi_n^{-2}-1)\log n} \qquad (2.23)\\
&\geq \pi R^2 e^{-\xi_n^{-2}R^2M_R/2}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando a mudança de variáveis $t = \xi_n^{-1}\log(R/s)/\log n$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\{R/n\leq|x|\leq R\}} e^{4\pi G_n^2} &= \int_{\{R/n\leq|x|\leq R\}} e^{2\xi_n^{-2}\log^2(R/|x|)/\log n} \\
&= 2\pi\int_{\frac{R}{n}}^{R} se^{2(\xi_n^{-1}\log(R/s)/\log n)^2\log n}\mathrm{d}s \\
&= 2\pi R^2\xi_n\log n\int_0^{\xi_n^{-1}} e^{2(t^2-\xi_n t)\log n}\mathrm{d}t \\
&\geq 2\pi R^2\xi_n\log n\int_0^{\xi_n^{-1}} e^{-2\xi_n t\log n}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi R^2\xi_n\log n\left(-\frac{e^{-2\log n}}{2\xi_n\log n} + \frac{1}{2\xi_n\log n}\right) \\
&= -\pi R^2 e^{-2\log n} + \pi R^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, como $\xi_n \to 1$ quando $n \to \infty$, segue de (2.23) e da desigualdade acima que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} e^{4\pi G_n^2} \geq \pi R^2 e^{-R^2 M_R/2} + \pi R^2,$$

conforme afirmamos. □

Agora, no caso em que $\zeta = 1$, podemos utilizar o lema anterior para obter a mesma estimativa da Proposição 2.16 trocando a hipótese (f_5) por (f_6), isto é, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.18. *Suponha que valem* (m_3^*), (f_1), (f_3), (f_4^*) *e* (f_6). *Então*

$$c^* < \frac{1}{2} M\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right).$$

Demonstração. Analogamente ao que vimos na prova do Lema 2.13, temos que $I(tG_n) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Então, pela definição de c^*, segue que

$$c^* \leq \max_{t>0} I(tG_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Mas, como o funcional I tem a geometria do Passo da Montanha, para cada n existe $t_n > 0$ tal que

$$I(t_n G_n) = \max_{t>0} I(tG_n).$$

Logo, é suficiente provar que, para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I(t_n G_n) < \frac{1}{2} M\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right).$$

Suponha, por contradição, que isto não vale. Então, como $\|G_n\| = 1$, temos que

$$I(t_n G_n) = \frac{1}{2} M(t_n^2) - \int_{\mathbb{R}^2} A(x) F(t_n G_n) \geq \frac{1}{2} M\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Como A e F são funções não-negativas, isto implica que $M(t_n^2) \geq M(4\pi/\alpha_0)$. E como M é uma função crescente, pois sua derivada m é sempre positiva, concluímos que

$$t_n^2 \geq \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{2.24}$$

Por outro lado, pela definição de t_n, temos que $I'(t_nG_n)t_nG_n = 0$. Usando este fato, a hipótese (A_1) e lembrando que $\text{supp}(G_n) = \overline{B_R(0)}$ e que f é sempre não-negativa, obtemos

$$\begin{aligned} m(t_n^2)t_n^2 &= \int_{B_R(0)} A(x)f(t_nG_n)t_nG_n \qquad (2.25)\\ &\geq \int_{B_{R/n}(0)} f(t_nG_n)t_nG_n \\ &= \int_{B_{R/n}(0)} f\left(\frac{t_n\xi_n^{-1}}{\sqrt{2\pi}}(\log n)^{1/2}\right)\frac{t_n\xi_n^{-1}}{\sqrt{2\pi}}(\log n)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mas veja que, dado $0 < \delta < \gamma_0$, por (f_6) existe $s_\delta > 0$ tal que

$$f(s)s \geq (\gamma_0 - \delta)e^{\alpha_0 s^2} \quad , \quad \forall\ s \geq s_\delta. \qquad (2.26)$$

Então, como $t_n\xi_n^{-1}(\log n)^{1/2} \to +\infty$ quando $n \to \infty$, pois $\xi_n \to 1$ e $t_n \not\to 0$, segue que, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} m(t_n^2)t_n^2 &\geq \int_{B_{R/n}(0)} (\gamma_0 - \delta)e^{\alpha_0 t_n^2(\xi_n\sqrt{2\pi})^{-2}\log n} \\ &= \pi R^2 e^{-2\log n}(\gamma_0 - \delta)e^{\alpha_0 t_n^2(\xi_n\sqrt{2\pi})^{-2}\log n} \\ &= \pi R^2(\gamma_0 - \delta)e^{\left(\alpha_0 t_n^2(\xi_n\sqrt{2\pi})^{-2} - 2\right)\log n}. \end{aligned}$$

Esta desigualdade e a hipótese (m_3^*) implicam que a sequência $(t_n) \subset (0, +\infty)$ é limitada e, portanto, existe $t_0 > 0$ tal que, a menos de subsequência, $t_n \to t_0$ quando $n \to \infty$. Neste caso, a desigualdade acima também implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_0 t_n^2(\xi_n\sqrt{2\pi})^{-2} - 2\right) = 2\left(\frac{\alpha_0}{4\pi}t_0^2 - 1\right) \leq 0.$$

Por isto e por (2.24), concluímos que

$$t_n^2 \longrightarrow \frac{4\pi}{\alpha_0}. \qquad (2.27)$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, defina os conjuntos

$$D_{n,\delta} := \{x \in B_R(0) : t_nG_n(x) \geq s_\delta\}, \quad E_{n,\delta} := B_R(0)\backslash D_{n,\delta}.$$

Pela hipótese (A_1), por (2.25) e por (2.26), temos que

$$\begin{aligned} m(t_n^2)t_n^2 &\geq \int_{D_{n,\delta}} f(t_nG_n)t_nG_n + \int_{E_{n,\delta}} f(t_nG_n)t_nG_n \\ &\geq (\gamma_0 - \delta)\left(\int_{B_R(0)} e^{\alpha_0 t_n^2 G_n^2} - \int_{E_{n,\delta}} e^{\alpha_0 t_n^2 G_n^2}\right) \qquad (2.28)\\ &\quad + \int_{E_{n,\delta}} f(t_nG_n)t_nG_n. \end{aligned}$$

Mas $G_n(x) \to 0$ e, consequentemente, $\chi_{E_{n,\delta}}(x) \to 1$, q.t.p. em $B_R(0)$, quando $n \to \infty$, onde $\chi_{E_{n,\delta}}$ é a função característica do conjunto $E_{n,\delta}$. Além disso, $t_n G_n < s_\delta$ em $E_{n,\delta}$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{E_{n,\delta}} e^{\alpha_0 t_n^2 G_n^2} \longrightarrow \pi R^2 \quad , \quad \int_{E_{n,\delta}} f(t_n G_n) t_n G_n \longrightarrow 0.$$

Portanto, por (2.24), (2.27), (2.28) e pelo Lema 2.17, obtemos

$$\begin{aligned} m\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)\frac{4\pi}{\alpha_0} &\geq (\gamma_0 - \delta)\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{B_R(0)} e^{\alpha_0 t_n^2 G_n^2}\right) - (\gamma_0 - \delta)\pi R^2 \\ &\geq (\gamma_0 - \delta)\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{B_R(0)} e^{4\pi G_n^2}\right) - (\gamma_0 - \delta)\pi R^2 \\ &\geq (\gamma_0 - \delta)\pi R^2 e^{-R^2 M_R/2}. \end{aligned}$$

Como $0 < \delta < \gamma_0$ é arbitrário, podemos fazer $\delta \to 0^+$ na desigualdade acima para obter

$$\gamma_0 \leq \frac{4}{\alpha_0} m\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right) R^{-2} e^{R^2 M_R/2}.$$

Como $R > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\gamma_0 \leq \frac{4}{\alpha_0} m\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right) \inf_{R>0}\left\{R^{-2} e^{R^2 M_R/2}\right\},$$

o que contradiz (f_6). Isto conclui a demonstração. □

2.4.3 O nível de energia mínima na variedade de Nehari

Considere agora a variedade de Nehari associada ao funcional I,

$$\mathcal{N} := \{u \in H : I'(u)u = 0, u \neq 0\}.$$

Defina $d^* := \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u)$. O resultado a seguir estabelece a relação entre c^* e d^*.

Lema 2.19. *Suponha que valem (m_3), (f_1), (f_3) e (f_4). Então $c^* \leq d^*$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}$. Como $u \neq 0$ e $I'(u)u = 0$, então devemos ter $u^+ \not\equiv 0$. Caso contrário, lembrando que $f(s) = 0$ para $s \leq 0$, teríamos

$$m(\|u\|^2)\|u\|^2 = m(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} A(x) f(u) u = I'(u)u = 0.$$

Mas isto implicaria que $u = 0$.

Considere a função $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = I(tu)$. Para $t > 0$, h é diferenciável e

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= I'(tu)u \\
&= I'(tu)u - t^3 I'(u)u \\
&= m(t^2 \|u\|^2) t \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} A(x) f(tu) u \\
&\quad - t^3 m(\|u\|^2) \|u\|^2 + t^3 \int_{\mathbb{R}^2} A(x) f(u) u \\
&= t^3 \|u\|^4 \left(\frac{m(t^2 \|u\|^2)}{t^2 \|u\|^2} - \frac{m(\|u\|^2)}{\|u\|^2} \right) \\
&\quad + t^3 \int_{\{u>0\}} A(x) u^4 \left(\frac{f(u)}{u^3} - \frac{f(tu)}{(tu)^3} \right).
\end{aligned}
$$

Logo, por (m_3) e (f_4), temos que $h'(t) \geq 0$ para $0 < t < 1$ e $h'(t) \leq 0$ para $t > 1$. E, como $h'(1) = I'(u)u = 0$, então

$$
I(u) = h(1) = \max_{t \geq 0} h(t) = \max_{t \geq 0} I(tu).
$$

Por outro lado, como $u^+ \not\equiv 0$ e (f_4) implica que $f(s) > 0$ para todo $s > 0$, pela Observação 2.14 existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0 u) < 0$. Definindo $\gamma : [0, 1] \to H$ por $\gamma(t) = t t_0 u$, segue da definição de c^* que

$$
c^* \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t \geq 0} I(tu) = I(u).
$$

Como $u \in \mathcal{N}$ é arbitrário, concluímos que $c^* \leq d^*$. $\square$

Observação 2.20. *Definindo $\mathcal{S} := \{u \in H : I'(u) = 0, u \neq 0\}$, lembramos que uma solução fraca u_0 do problema (P_2) é uma solução ground state se $u_0 \in \mathcal{S}$ e*

$$
I(u_0) = \overline{d} := \inf_{u \in \mathcal{S}} I(u).
$$

Como $d^* \leq \overline{d}$, pois $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, então $c^* \leq \overline{d}$, sob as condições do lema anterior. Neste caso, para obter uma solução ground state do problema (P_2) é suficiente mostrar que existe $u_0 \in \mathcal{S}$ tal que $I(u_0) = c^*$.

2.5 Prova dos Teoremas 2.2 e 2.3

Como foi observado ao final da seção 2.3, os Lemas 2.12 e 2.13 mostram que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha, o que garante a existência de uma sequência de Palais-Smale para esse funcional no nível c^*. Vamos mostrar que essa sequência converge fracamente em H para uma solução *ground state* do problema (P_2). Para isto, precisamos antes provar algumas propriedades das sequências de Palais-Smale para o funcional I. Faremos isso com o auxílio dos dois lemas a seguir.

Lema 2.21. *Suponha que valem* (m_3) *e* (f_4)*. Então:*

(i) *a função*

$$L(t) := (1/2)M(t) - (1/4)m(t)t$$

é crescente em $[0, +\infty)$*; em particular,* $L(t) > L(0) = 0$*, para todo* $t > 0$*;*

(ii) *a função*

$$G(s) := sf(s) - 4F(s)$$

é não-decrescente em $[0, +\infty)$*; em particular,* $G(s) \geq G(0) = 0$*, para todo* $s > 0$.

Demonstração. Para provar o item (i), sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < t_1 < t_2$. Por (m_3), temos que

$$\begin{aligned} 2M(t_1) - m(t_1)t_1 &= 2M(t_2) - 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{m(\tau)}{\tau}\tau \mathrm{d}\tau - \frac{m(t_1)}{t_1}t_1^2 \\ &< 2M(t_2) - \frac{m(t_2)}{t_2}(t_2^2 - t_1^2) - \frac{m(t_2)}{t_2}t_1^2 \\ &= 2M(t_2) - m(t_2)t_2. \end{aligned}$$

Ou seja, a função $\widehat{L}(t) := 2M(t) - m(t)t$ é crescente, para $t > 0$. A continuidade em $t = 0$ implica que essa propriedade vale para $t \geq 0$. Consequentemente, o mesmo vale para $L(t)$, pois $L(t) = \widehat{L}(t)/4$.

Para provar o item (ii), sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < s_1 < s_2$. Por (f_4), temos que

$$\begin{aligned} s_1 f(s_1) - 4F(s_1) &= \frac{f(s_1)}{s_1^3}s_1^4 - 4F(s_2) + 4\int_{s_1}^{s_2} \frac{f(\tau)}{\tau^3}\tau^3 \mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{f(s_2)}{s_2^3}s_1^4 - 4F(s_2) + \frac{f(s_2)}{s_2^3}(s_2^4 - s_1^4) \\ &= s_2 f(s_2) - 4F(s_2). \end{aligned}$$

A conclusão então segue analogamente ao item (i). □

Lema 2.22. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ é uma sequência tal que*

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega), \quad f(\cdot, u_n), f(\cdot, u) \in L^1(\Omega), \quad \int_\Omega |f(x, u_n)u_n| \leq C,$$

onde $C > 0$ é uma constante, então $f(\cdot, u_n) \to f(\cdot, u)$ em $L^1(\Omega)$.

O resultado acima foi provado em [14]. A proposição a seguir nos dá as propriedades fundamentais das sequências de Palais-Smale para o funcional I.

Proposição 2.23. *Suponha que valem (m_1), (m_3), $(f_1) - (f_3)$ e (f_4^*). Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível $c \in \mathbb{R}$, isto é,*

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Então (u_n) é limitada em H. Além disso, se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H, então, a menos de subsequência,

(i) $\displaystyle\int_\Omega A(x)f(u_n) \longrightarrow \int_\Omega A(x)f(u)$, *para todo domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u)$.

Demonstração. Pelo item (i) do Lema 2.21 e por (f_3) segue que, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + \|u_n\| &\geq I(u_n) - \frac{1}{\theta_0} I'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{2} M(\|u_n\|^2) - \frac{1}{4} m(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \left(\frac{\theta_0 - 4}{4\theta_0}\right) m(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\theta_0} \int_{\mathbb{R}^2} A(x)(f(u_n)u_n - \theta_0 F(u_n)) \\ &\geq \left(\frac{\theta_0 - 4}{4\theta_0}\right) m_0 \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

onde m_0 é dado na hipótese (m_1). Como $\theta_0 > 4$ e $m_0 > 0$, a desigualdade acima implica que a sequência (u_n) é limitada em H.

Vamos agora provar os itens (i) e (ii). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H, pela imersão compacta de H em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e pela imersão contínua de $L^2(\mathbb{R}^2)$ em $L^1(\Omega)$ segue que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Além disso, como (u_n) é limitada em H, então $I'(u_n)u_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u_n)u_n| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|f(u_n)u_n| \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u_n)u_n \\
&= m(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 - I'(u_n)u_n \\
&\leq C_1.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

O fato de que $f(u_n), f(u) \in L^1(\Omega)$ segue da desigualdade (2.11). Concluímos do Lema 2.22 que $f(u_n) \to f(u)$ em $L^1(\Omega)$. Mas

$$\int_\Omega A(x)|f(u_n) - f(u)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(u_n) - f(u)| \longrightarrow 0,$$

o que prova o item (i). Para provar o item (ii), observe inicialmente que, dado qualquer $r > 0$, a convergência que acabamos de mostrar com $\Omega = B_r(0)$ implica na existência de uma função $h \in L^1(B_r(0))$ tal que $A(x)f(u_n(x)) \leq h(x)$ q.t.p. em $B_r(0)$. Daí, usando (f_2) obtemos

$$\begin{aligned}
A(x)F(u_n(x)) &\leq \|A\|_{L^\infty(B_r(0))} \max_{s \in [0,s_0]} F(s) + K_0 A(x) f(u_n(x)) \\
&\leq \|A\|_{L^\infty(B_r(0))} F(s_0) + K_0 h(x)
\end{aligned}$$

q.t.p. em $B_r(0)$. Como a menos de subsequência $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$ e F é contínua, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_r(0)} A(x)F(u_n) \longrightarrow \int_{B_r(0)} A(x)F(u).$$

Assim, para concluir a prova do item (ii), é suficiente mostrar que, dado $\delta > 0$, existe $r > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)} A(x)F(u_n) < \delta \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}; \tag{2.30}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)} A(x)F(u) < \delta. \tag{2.31}$$

A existência de $r > 0$ satisfazendo (2.31) decorre do fato de $A(x)F(u)$ ser integrável. Vejamos então como obter $r > 0$ satisfazendo (2.30). Observe que, por (f_2) e (f_4^*),

$$F(s) \leq C_2|s|^2 + C_3 f(s) \quad , \quad \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Então, dado qualquer $K > 0$, pela desigualdade acima, pela imersão contínua de H em $L^3_A(\mathbb{R}^2)$, pela limitação de (u_n) em H e por (2.29) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|>K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)F(u_n) &\leq C_2 \int_{\{|u_n|>K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)|u_n|^2 \\ &\quad + C_3 \int_{\{|u_n|>K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)f(u_n) \\ &\leq \frac{C_2}{K}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n|^3 + \frac{C_3}{K}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u_n)u_n \\ &\leq \frac{C_4}{K}.\end{aligned}$$

Logo, podemos escolher K suficientemente grande tal que

$$\int_{\{|u_n|>K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)F(u_n) < \frac{\delta}{2} \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, pela desigualdade (2.12) com $q = 2$, para $|s| \leq K$ temos que

$$\begin{aligned}F(s) &\leq C_5|s|^2 + C_6|s|^2(e^{\alpha s^2} - 1) \\ &\leq \Big(C_5 + C_6(e^{\alpha K^2} - 1)\Big)|s|^2 \\ &\leq C_7|s|^2,\end{aligned}$$

onde $\alpha > \alpha_0$ e $C_7 = C_7(\alpha, K) > 0$ são constantes. Então

$$\int_{\{|u_n|\leq K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)F(u_n) \leq C_7 \int_{\{|u_n|\leq K\}\cap(\mathbb{R}^2\backslash B_r(0))} A(x)|u_n|^2.$$

Mas, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^2_A(\mathbb{R}^2)$, pois $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H, que está imerso compactamente em $L^2_A(\mathbb{R}^2)$. Logo, existe $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $A(x)|u_n(x)|^2 \leq g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Daí, escolhendo $r > 0$ suficientemente grande tal que $C_7 \int_{\mathbb{R}^2\backslash B_r(0)} g(x) < \delta/2$, teremos

$$\int_{\{|u_n|\leq K\}\cap\mathbb{R}^2\backslash B_r(0)} A(x)F(u_n) < \frac{\delta}{2} \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Combinando as estimativas acima, obtemos (2.30), o que conclui a prova do item (ii) e, portanto, da Proposição 2.23. $\square$

Agora estamos prontos para provar os Teoremas 2.2 e 2.3.

Demonstração do Teorema 2.2. Como já observamos, os Lemas 2.12 e 2.13 garantem a existência de uma sequência $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c^* \quad \text{e} \quad I'(u_n) \longrightarrow 0 \tag{2.32}$$

quando $n \to \infty$. Pela Proposição 2.23, esta sequência é limitada em H, que é reflexivo por ser espaço de Hilbert. Portanto, pela reflexividade de H e pela imersão compacta $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$, existe $u_0 \in H$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H, \\ \\ u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^2_A(\mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{2.33}$$

Vejamos primeiramente que

$$I(u_0) \geq 0. \tag{2.34}$$

Para isto, suponha por contradição que $I(u_0) < 0$. Então $u_0 \not\equiv 0$ e, definindo $h(t) := I(tu_0)$, $t \geq 0$, temos que $h(0) = 0$ e $h(1) < 0$. Por outro lado, argumentando como na demonstração do Lema 2.12, vemos que $h(t) > 0$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Logo, pela diferenciabilidade de h, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} I(t_0 u_0) &= h(t_0) = \max_{t \in [0,1]} h(t) = \max_{t \in [0,1]} I(tu_0), \\ I'(t_0 u_0) t_0 u_0 &= h'(t_0) t_0 = 0. \end{aligned}$$

Daí, pela definição de c^*, o Lema 2.21, a semicontinuidade inferior da norma, o Lema de

Fatou e por (2.32), temos que

$$
\begin{aligned}
c^* \le I(t_0u_0) &= I(t_0u_0) - \frac{1}{4}I'(t_0u_0)t_0u_0 \\
&= \frac{1}{2}M(\|t_0u_0\|^2) - \frac{1}{4}m(\|t_0u_0\|^2)\,\|t_0u_0\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)\,(f(t_0u_0)t_0u_0 - 4F(t_0u_0)) \\
&< \frac{1}{2}M(\|u_0\|^2) - \frac{1}{4}m(\|u_0\|^2)\,\|u_0\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)\,(f(u_0)u_0 - 4F(u_0)) \qquad (2.35)\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}M(\|u_n\|^2) - \frac{1}{4}m(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)\,(f(u_n)u_n - 4F(u_n)) \\
&\le \liminf_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{1}{4}I'(u_n)u_n\right) \\
&= c^*,
\end{aligned}
$$

o que é absurdo. Portanto, vale a desigualdade (2.34).

Vamos mostrar agora que $I'(u_0) = 0$ e $I(u_0) = c^*$. Como a sequência (u_n) é limitada em H, existe $\rho_0 \ge 0$ tal que $\|u_n\| \to \rho_0$, a menos de subsequência. Pela semicontinuidade inferior da norma, temos que $\|u_0\| \le \rho_0$. Devemos mostrar que vale a igualdade. Então suponha, por contradição, que $\|u_0\| < \rho_0$. Definindo $v_n = u_n/\|u_n\|$ e $v_0 = u_0/\rho_0$, temos que $v_n \rightharpoonup v_0$ fracamente em H e $\|v_0\| < 1$. Daí, pelo Corolário 2.10, segue que

$$
\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n - u_0|^q(e^{pv_n^2} - 1) < \infty \quad , \quad \forall\, q > 0 \quad , \quad \forall\, p < \frac{4\pi\zeta^2}{1 - \|v_0\|^2}. \qquad (2.36)
$$

Por outro lado, usando (2.32), Proposição 2.23(ii), Proposição 2.16, (2.34) e a hipótese

(m_2), temos que

$$
\begin{aligned}
M(\rho_0^2) &= \lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(I(u_n) + \int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u_n)\right) \\
&= 2c^* + 2\int_{\mathbb{R}^2} A(x)F(u_0) \\
&= 2c^* + M(\|u_0\|^2) - 2I(u_0) \\
&< M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0}\right) + M(\|u_0\|^2) \\
&\leq M\left(\frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0} + \|u_0\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Como a função M é crescente, segue que

$$
\rho_0^2 < \frac{4\pi\zeta^2}{\alpha_0} + \|u_0\|^2 .
$$

Daí, observando que $\rho_0^2 = (\rho_0^2 - \|u_0\|^2)/(1 - \|v_0\|^2)$, obtemos

$$
\alpha_0\rho_0^2 < \frac{4\pi\zeta^2}{1 - \|v_0\|^2}.
$$

Então existe $\eta > 0$ tal que $\alpha_0 \|u_n\|^2 < \eta < 4\pi\zeta^2/(1 - \|v_0\|^2)$ para todo n suficientemente grande. Consequentemente, podemos escolher $r \in (1,2)$ próximo de 1 e $\alpha > \alpha_0$ próximo de α_0 tais que ainda tenhamos $r\alpha \|u_n\|^2 < \eta < 4\pi\zeta^2/(1 - \|v_0\|^2)$ e, por (2.36),

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n - u_0|^{2-r}(e^{r\alpha u_n^2} - 1) &= \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n - u_0|^{2-r}(e^{r\alpha\|u_n\|^2 v_n^2} - 1) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n - u_0|^{2-r}(e^{\eta v_n^2} - 1) \\
&\leq C_1,
\end{aligned}
$$

para todo n suficientemente grande. Portanto, usando a desigualdade (2.11) com $q = 1$, a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $H \hookrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^2)$, Lema 2.8$(i)$ e (2.33), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u_n)(u_n-u_0)\right| \leq \\
&\leq C_2\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n||u_n-u_0| + \ C_3\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n-u_0|(e^{\alpha u_n^2}-1)\\
&= C_2\int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{A(x)}|u_n|\sqrt{A(x)}|u_n-u_0|\\
&\quad + C_3\int_{\mathbb{R}^2}(A(x)|u_n-u_0|^2)^{(r-1)/r}(A(x)|u_n-u_0|^{2-r})^{1/r}(e^{\alpha u_n^2}-1)\\
&\leq C_4\left\|u_n\right\|\left\|u_n-u_0\right\|_{L^2_A(\mathbb{R}^2)}\\
&\quad + C_3\left\|u_n-u_0\right\|^{2(r-1)/r}_{L^2_A(\mathbb{R}^2)}\left(\int_{\mathbb{R}^2} A(x)|u_n-u_0|^{2-r}(e^{r\alpha u_n^2}-1)\right)^{1/r}\\
&\leq C_5\left\|u_n-u_0\right\|_{L^2_A(\mathbb{R}^2)} + C_6\left\|u_n-u_0\right\|^{2(r-1)/r}_{L^2_A(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

quando $n\to\infty$. Como $I'(u_n)(u_n-u_0)\to 0$ quando $n\to\infty$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\left(I'(u_n)(u_n-u_0)+\int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u_n)(u_n-u_0)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} m(\|u_n\|^2)\left\langle u_n, u_n-u_0\right\rangle_H\\
&= m(\rho_0^2)(\rho_0^2-\|u_0\|^2)\\
&> 0,
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $\|u_0\| = \rho_0 = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|$. Sendo H um espaço de Hilbert, essa convergência e a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u_0$ em H implicam que $u_n \to u_0$ fortemente em H. Como $I\in C^1(H,\mathbb{R})$, de (2.32) concluímos que $I(u_0)=c^*$ e $I'(u_0)=0$. Ou seja, lembrando que $c^*\neq 0 = I(0)$, então u_0 é uma solução fraca não-trivial do problema (P_2). Pela Observação 2.20, segue que u_0 é uma solução *ground state*. Por último, para verificar que u_0 é não-negativa, denote $\Omega^- := \{x\in\mathbb{R}^2 : u_0(x)<0\}$. Como $u_0^- = \max\{0,-u_0\}=0$ em $\mathbb{R}^2\setminus\Omega^-$ e, por hipótese, $f(s)=0$ para $s\leq 0$, temos que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} A(x)f(u_0)u_0^- = \int_{\Omega^-} A(x)f(u_0)u_0^- = 0.
$$

Por outro lado, $u_0^-\in H$, $u_0^- = -u_0$ em Ω^- e, conforme [27, Lema 7.6],

$$
\nabla u_0^-(x) = \begin{cases} -\nabla u_0(x) & , \quad \text{para q.t.p. } x\in\Omega^-,\\ 0 & , \quad \text{para q.t.p. } x\in\mathbb{R}^2\setminus\Omega^-. \end{cases}
$$

Então

$$\begin{aligned} 0 = I'(u_0)u_0^- &= m(\|u_0\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u_0\cdot\nabla u_0^- + b(x)u_0u_0^-) - \int_{\mathbb{R}^2}A(x)f(u_0)u_0^- \\ &= m(\|u_0\|^2)\int_{\Omega^-}(-\nabla u_0^-\cdot\nabla u_0^- + b(x)(-u_0^-)u_0^-) \\ &= -m(\|u_0\|^2)\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_0^-|^2 + b(x)(u_0^-)^2) \\ &= -m(\|u_0\|^2)\left\|u_0^-\right\|^2, \end{aligned}$$

o que implica que $u_0^- \equiv 0$ e, portanto, u_0 é não-negativa. $\square$

Demonstração do Teorema 2.3. Segue de maneira análoga à demonstração do Teorema 2.2, considerando agora $\zeta = 1$ e utilizando a Proposição 2.18 no lugar da Proposição 2.16. $\square$

2.6 Prova dos Teoremas 2.5 e 2.6

Como já foi dito na introdução, se $m \equiv 1$ a equação em (P_2) se reduz à equação de Schrödinger

$$(\widehat{P_2}) \qquad -\Delta u + b(x)u = A(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

O funcional energia associado a este problema é dado por

$$J(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}A(x)F(u), \quad u \in H. \tag{2.37}$$

Sob as hipóteses (f_1), $(\widehat{f_3})$ e (f_4^*), os mesmos argumentos utilizados na Seção 2.3 mostram que $J \in C^1(H,\mathbb{R})$,

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u\cdot\nabla v + b(x)uv) - \int_{\mathbb{R}^2}A(x)f(u)v, \quad \forall\, u, v \in H, \tag{2.38}$$

e J tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha, o que garante a existência de uma sequência $(u_n) \subset H$ tal que

$$J(u_n) \longrightarrow c^{**} \;\text{ e }\; J'(u_n) \longrightarrow 0 \tag{2.39}$$

quando $n \to \infty$, onde

$$c^{**} := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} J(\lambda(t)) > 0$$

e $\Lambda := \{\lambda \in C([0,1], H) : \lambda(0) = 0 \text{ e } J(\lambda(1)) < 0\}$.

Evidentemente, são válidas estimativas para o nível minimax c^{**} análogas às da seção 2.4, com as hipóteses $(\widehat{f_3}) - (\widehat{f_6})$ no lugar das hipóteses $(f_3) - (f_6)$, onde forem necessárias. Sob as hipóteses (f_1), (f_2), $(\widehat{f_3})$ e (f_4^*), também são válidas as conclusões da Proposição 2.23 e de sua prova para sequências de Palais-Smale do funcional J.

Com as observações feitas acima, estamos prontos para provar os Teoremas 2.5 e 2.6.

Demonstração do Teorema 2.5. Seja $(u_n) \subset H$ a sequência dada em (2.39). Como na prova do Teorema 2.2, a limitação de (u_n) em H implica na existência de $u_0 \in H$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad H, \\ \\ u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^2_A(\mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{2.40}$$

Além disso, analogamente ao que vimos na prova da Proposição 2.23, temos que $Af(u_n) \to Af(u_0)$ em $L^1(\Omega)$, para todo domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Por isto, pela convergência fraca em (2.40) e a convergência $J'(u_n) \to 0$, obtemos

$$J'(u_0)\phi = \langle u_0, \phi \rangle_H - \int_{\mathbb{R}^2} A(x) f(u_0)\phi = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Mas, seguindo os mesmos argumentos de [1, Teorema 3.22], podemos verificar que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em H, na norma $\| \cdot \|_H$. Portanto $J'(u_0)u_0 = 0$. Como, por $(\widehat{f_3})$, temos $J(u_0) \geq (1/\widehat{\theta_0}) J'(u_0)u_0$, segue que $J(u_0) \geq 0$.

Agora, utilizando a estimativa

$$c^{**} < \frac{2\pi\zeta^2}{\alpha_0},$$

a conclusão de que u_0 é uma solução fraca não-trivial e não-negativa para o problema $(\widehat{P_2})$ tal que $J(u_0) = c^{**}$ segue como na prova do Teorema 2.2. Ainda, se f satisfaz $(\widehat{f_4})$, os mesmos argumentos da prova do Lema 2.19 e da Observação 2.20 mostram que u_0 é uma solução de energia mínima na variedade de Nehari associada ao funcional J e, consequentemente, é uma solução *ground state*. □

Demonstração do Teorema 2.6. Segue de maneira análoga à demonstração do Teorema 2.5, considerando agora $\zeta = 1$ e utilizando a estimativa

$$c^{**} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

□

Observação 2.24. *Como podemos ver na prova dos Teoremas 2.5 e 2.6, não precisamos da hipótese* $(\widehat{f_4})$ *ou de qualquer condição decorrente dela para mostrar que* $J(u_0) \geq 0$*, diferentemente da prova dos Teoremas 2.2 e 2.3, em que usamos a hipótese* (f_4) *(via Lema 2.21(ii)) para mostrar que* $I(u_0) \geq 0$*.*

Referências

[1] R.A. Adams e J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces, 2nd edition*, Academic Press, Oxford, 2003.

[2] Adimurthi e K. Sandeep, *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*, NoDEA Nonlinear Diff. Eq. Appl. **13** (2007), 585-603.

[3] S. Agmon, A. Douglis e L. Nirenberg, *Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[4] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa e T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. **49** (2005), 85-93.

[5] C.O. Alves e S.H.M. Soares , *Nodal solutions for singularly perturbed equations with critical exponential growth*, J. Diff. Eq. **234** (2007), 464-484.

[6] A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-543.

[7] S. Aouaoui, *A multiplicity result for some Kirchhoff-type equations involving exponential growth condition in* $\mathbb{R}^2$, Communications on Pure and Applied Analysis **15** (2016), 1351-1370.

[8] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, New York, 1995.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[10] D.M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Diff. Eq. **17** (1992), 407-435.

[11] R. Černý, A. Cianchi e S. Hencl, *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **192** (2013), 225-243.

[12] C-M. Chu, *Multiplicity of positive solutions for Kirchhoff type problem involving critical exponent and sign-changing weight functions*, Bound. Value Probl. 2014, 2014:19 (2014).

[13] D.C. Clark, *A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 65-74.

[14] D.G. de Figueiredo, O.H. Miyagaki e B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Diff. Eq. **3** (1995), 139-153.

[15] M. de Souza, *Existence and multiplicity of solutions for a singular semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^2$, Electr. J. Diff. Eq. **2011** (2011), 1-13.

[16] M. de Souza e J.M. do Ó, *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications*, Math. Nachr. **284** (2011), 1754-1776.

[17] M. de Souza e J.M. do Ó, *On singular Trudinger-Moser type inequalities for unbounded domains and their best exponents*, Potential Analysis **38** (2013), 1091-1101.

[18] M. de Souza, J.M. do Ó e T. Silva, *Quasilinear nonhomogeneous Schrödinger equation with critical exponential growth in* $\mathbb{R}^n$, Topol. Methods Nonlinear Anal. **45** (2015), 615-639.

[19] J.M. do Ó, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), 301-315.

[20] J.M. do Ó, E. de Medeiros e U.B. Severo, *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 286-304.

[21] J.M. do Ó, M. de Souza, E. de Medeiros e U.B. Severo, *Critical points for a functional involving critical growth of Trudinger-Moser type*, Potential Analysis **42** (2015), 229-246.

[22] J.M. do Ó, F. Sani e J. Zhang, *Stationary nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ with potentials vanishing at infinity*, Annali di Matematica **196** (2017), 363-393.

[23] M. Fei e H. Yin, *Bound states of 2-D nonlinear Schrödinger equations with potentials tending to zero at infinity*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), 2299-2331.

[24] G.M. Figueiredo e J.R. Santos Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Differential Integral Equations **25** (9-10) (2012), 853-868.

[25] G.M. Figueiredo e U.B. Severo, *Ground state solution for a Kirchhoff problem with exponential critical growth*, Milan J. Math. **84** (2016), 23-39.

[26] M.F. Furtado e H.R. Zanata, *Multiple solutions for a Kirchhoff equation with nonlinearity having arbitrary growth*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **96** (2017), 98-109.

[27] D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[28] S. Goyal, P.K. Mishra e K. Sreenadh, *n-Kirchhoff type equations with exponential nonlinearities*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Serie A. Mat. **110** (2016), 219-245.

[29] Z. Guo, *Elliptic equations with indefinite concave nonlinearities near the origin*, J. Math. Anal. Appl. **367** (2010), 273-277.

[30] H.P. Heinz, *Free Ljusternik-Schnirelmann theory and the bifurcation diagrams of certain singular nonlinear systems*, J. Differential Equations **66** (1987), 263-300.

[31] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[32] M.A. Krasnoselskii e Y.B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen, 1961.

[33] N. Lam e G. Lu, *Existence and multiplicity of solutions to equations of n-Laplacian type with critical exponential growth in $\mathbb{R}^n$*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 1132-1165.

[34] Y. Li e B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 451-480.

[35] Q. Li e Z. Yang, *Multiple solutions for N-Kirchhoff type problems with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Analysis **117** (2015), 159-168.

[36] J.-L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (Proc. Int. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), North-Holland Mathematical Studies, 30 (North-Holland, Amsterdam, 1978), 284-346.

[37] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201.

[38] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 1077-1092.

[39] D. Naimen e C. Tarsi, *Multiple solutions of a Kirchhoff type elliptic problem with the Trudinger-Moser growth*, Adv. Diff. Eq. **22** no. 11/12 (2017), 983-1012.

[40] S.I. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyperbolic equations*, Math. USSR Sbornik **25**(1) (1975), 145-158.

[41] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. 65 AMS, Providence, Rhode Island, 1986.

[42] B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$, J. Funct. Anal. **219** (2005), 340-367.

[43] B. Sirakov, *Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Calc. Var. Partial Diff. Eq. **11** (2000), 119-142.

[44] N.S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473-483.

[45] Z-Q. Wang, *Nonlinear boundary value problems with concave nonlinearities near the origin*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **8** (2001), 15-33.

[46] Y. Yang, *Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 1679-1704.

[47] Y. Yang, *Adams type inequalities and related elliptic partial differential equations in dimension four*, J. Diff. Eq. **252** (2012), 2266-2295.

[48] S. Yijing e L. Xing, *Existence of positive solutions for Kirchhoff type problems with critical exponent*, J. Part. Diff. Eq. **25** No. 2 (2012), 85-96.

[49] H.R. Zanata, *Equações de Schrödinger com potenciais indefinidos*, Dissertação de mestrado, UnB, Brasília-DF, 2011.