Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Contribuição dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos

Thiago Henrique Santos Torres

Brasília

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

TORRES, THIAGO HENRIQUE SANTOS
Tc Contribuições dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos / THIAGO HENRIQUE SANTOS TORRES; orientador Raimundo de Araújo Bastos Júnior. -- Brasília, 2017.
92 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Jogos combinatórios. 2. Jogo do NIM. 3. Socioeducação. I. Bastos Júnior, Raimundo de Araújo, orient. II. Título.

Thiago Henrique Santos Torres

Contribuição dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Brasília

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Contribuições dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos

por

Thiago Henrique Santos Torres *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 14 de junho de 2017.

Comissão Examinadora:

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior – MAT/UnB (Orientador)

Helder de C. Matos

Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos – MAT/UnB (Membro)

Raul Behs

Prof. Dr. Raul Moreira Behs – CMB (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Luanne, pelo amor, companherismo e superação dos momentos difíceis, pois juntos nos tornamos mais fortes. À minha família, pelo amor e compreensão nas minhas ausências. Aos colegas de curso e de trabalho, pelo incentivo e apoio.

A tarefa essencial do professor é despertar a alegria de trabalhar e de conhecer. (Albert Eisntein)

"O homem se torna muitas vezes o que ele próprio acredita que é." (Mahatma Ganghi)

Agradecimentos

À Deus, pela saúde, disposição e sabedoria para poder superar todos os desafios que a vida me propôs.
À minha esposa, pais, sogros, irmãos e toda família que forneceram-me apoio incondicional para realização desse sonho.
Aos colegas de curso (turma 2015 ProfMat-UnB), em especial aos amigos João Marcos, Luis Lapa e Fabrício, que juntos superamos grandes desafios.
Ao professor Rui Seimetz, em nome de quem agredeço aos demais professores que acreditam na proposta do curso.
Ao professor Raimundo de Araújo Bastos Júnior, meu orientador, pela sugestão do tema, suporte e paciência durante a construção e finalização deste trabalho.
À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Resumo

Faz-se neste trabalho uma abordagem teórica sobre divisibilidade e sistema numérico, com o intuito de uma aplicação lúdica desses conceitos matemáticos abstratos, com destaque para utilização de jogos de natureza combinatória. Analisando e propondo atividades a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos em jogos de combinatórios, como por exemplo o Jogo do NIM. O objetivo é abordar, com maior empatia, conceitos matemáticos como divisibilidade, sistema numérico em base decimal e em base binária, entre outros tantos envolvidos na aritmética e assim contribuir para divulgação e disseminação de jogos combinatórios como ferramenta pedagógica na educação básica. Realizou-se um estudo de caso, com alunos do sistema socioeducativo, com o intuito de verificar como o jogo do NIM poderia motivá-los a aprender ou aprimorar seus conhecimentos matemáticos.
Palavras-Chave: Jogos combinatórios, Jogo do NIM, motivação, socioeducação.

Abstract

In this work, a theoretical approach on divisibility and numerical system is used, with the purpose of a playful application of these abstract mathematical concepts, with emphasis on the use of combinatorial games. Analyzing and proposing activities regarding the mathematical concepts involved in combinatorial games, such as NIM Game. The objective is to approach, with greater empathy, mathematical concepts such as divisibility, numerical system based on decimal and binary basis, among many others involved in arithmetic and thus contribute to the dissemination and dissemination of combinatory games as a pedagogical tool in basic education. A case study was carried out with students from the socio-educational system, in order to verify how the NIM GAME could motivate them to learn or improve their knowledge mathematical.
Keywords: Combinatorial games, NIM game, motivation, socioeducation.

Conteúdo

INTRODUÇÃO

Esse trabalho restringe-se a análise de jogos de tabuleiros, em especial o Jogo do NIM, que admitem uma abordagem envolvendo conceitos de aritmética, tais como divisibilidade, sistema de numeração. Será feita uma abordagem sobre os aspectos teóricos a respeito da importância do lúdico na educação básica e sua importância nas diretrizes curriculares do Distrito Federal. Propõe-se, também, uma abordagem teórica sobre jogos combinatórios, e a importância desta ferramenta pedagógica. Convergindo, assim, para o objetivo geral desse trabalho: verificar se a aplicação de atividades, com os jogos propostos, a um grupo de estudantes pode proporcionar-lhes maior empatia a aprender ou aprimorar conceitos matemáticos abstratos relacionados divisibilidade e sistema de numeração.

A escolha do jogo do NIM para esta dissertação foi fundamentada em diversos pressupostos, dentre os quais destacam-se o fato do lúdico ser uma ferramenta pedagógica presente nas diretrizes curriculares nacionais ou distritais, por tratar-se de um jogo acessível e que possibilita a utilização de materiais concretos, sendo a aplicação possível mesmo em ambientes com recursos limitados. Em relação à matemática o embasamento para utilização do jogo do NIM respalda-se no fato de abordar conteúdos abstratos, como divisibilidade e sistemas numeração, de forma mais palpável, concreta e lúdica. Além disso, quando o aluno analisa e tenta decifrar uma estratégia ótima, uma das situações problema propostas pelos jogos combinatórios, em busca de táticas para vencer o jogo, espera-se que haja desdobramentos para construção, fixação e aprofundamento de conhecimento matemático e social, pois os jogos educacionais também proporcionam momentos de constante aprendizagem de convivência coletiva e respeito ao próximo.

Ao optar pelo tema jogos, primeiramente foi realizada uma reflexão sobre como abordar esse tema, tendo em vista ser um assunto amplamente discutido e estudado, porém encontra-se pouca prática pedagógica com jogos combinatórios envolvendo aplicação de conceitos matemáticos para obter as estratégias ótimas. Com intuito de delimitar o tema foram selecionados os objetivos específicos:

- desenvolver conceitos matemáticos abstratos de forma lúdica;
- analisar conceitos matemático mobilizados para obter a estratégia ótima no jogo do NIM;
- avaliar os efeitos do jogo sobre a motivação dos alunos;
- realizar pesquisa bibliográfica sobre o uso dos jogos na Educação Básica, incluindo as diretrizes curriculares do Distrito Federal;
- despertar uma reflexão sobre o uso consciente dos jogos no processo de ensino aprendizagem;
- contribuir para a análise e divulgação de jogos combinatórios entre profissionais da educação como ferramenta pedagógica.

A análise teórica não será tratada exaustivamente, pois pretende-se enfatizar a possível contribuição do jogo do NIM no desenvolvimento e aperfeiçoamento de conceitos matemáticos durante o estudo de caso. O jogo do NIM foi desmembrado em duas versões, a primeira e mais simples consiste na exploração dos conceitos do Teorema da Divisão Euclidiana para obter uma estratégia ótima e, assim, obter a vitória. A segunda versão, um pouco mais complexa, envolve a utilização dos conceitos de sistema de numeração binária para dominar uma estratégia ótima.

Cabe destacar que houve um estudo de caso com alunos do sistema socioeducativo da escola CED São Francisco/UIPSS, no primeiro semestre de 2017, referente a utilização do jogo do NIM. A finalidade de tal estudo de caso era abordar os temas aritméticos de forma lúdica e buscar entender a relação dos alunos com o jogo e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, descoberta das estratégias máximas, operacionalização e esquematização dos teoremas envolvidos a partir da utilização do jogo do NIM. Durante a aplicação do estudo de caso um professor regente sugeriu o desenvolvimento de um campeonato com jogos que envolvam raciocínio e lógica. A partir desta sugestão realizei uma pesquisa sobre campeonatos de jogos matemáticos na internet, entre os resultados obtidos em diversos sites destaca-se o material encontrado na Associação Ludus (ludicom.org), organizadora do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, desde 2004 em Portugal, o qual traz uma interessante proposta para competições com jogos combinatórios para uma futura análise e desenvolvimento de tal atividade na escola.

O trabalho foi estruturado da seguinte forma:

CAPÍTULO 1: fundamentação teórica acerca dos conceitos matemáticos envolvidos, tais como Divisibilidade, Teorema da Divisão Euclidiana e Sistemas de Numeração;

CAPÍTULO 2: abordagem sobre a utilização dos jogos como ferramenta pedagógica na Educação Básica, incluindo uma análise do Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal (Diretrizes Curriculares do Distrito Federal), uma introdução aos jogos combinatórios e alguns exemplos como Dama (Perde-Ganha e Damushe), Xadrez, Semáforo, Jogo da Velha Gravitacional 2D, Jogo dos Quadrinhos;

CAPÍTULO 3: análise do jogo NIM, em suas duas versões, além de exemplos e atividades com outros jogos de tabuleiro que envolvam conceitos de jogos combinatórios; e para encerrar o capítulo algumas atividades propostas com o jogo do NIM para o estudo de caso, bem como suas dicas e soluções;

CAPÍTULO 4: metologia da pesquisa, estudo de caso e análise dos resultados.

Na parte final do trabalho encontram-se as considerações finais, onde há uma reflexão sobre a seriedade na utilização dos jogos em sala de aula, a análise da contribuição dos jogos no desenvolvimento de conceitos matemáticos com o público desse estudo de caso, além das referências bibliográficas. Encontram-se, também, os apêndices referentes a atividade de sondagem do nível de conhecimento e o questionário de avaliação da atividade propostas.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo abordará definições, propriedades, corolários e demonstrações a respeito dos principais conceitos matemáticos abordados neste trabalho: divisibilidade e sistemas numéricos. Tais conceitos não serão tratados de forma exaustiva e tão pouco pretende-se realizar aprofundamento demasiado nos assuntos, tendo em vista que os referidos temas são amplamente estudados e o propósito da dissertação é a utilização do lúdico como ferramenta para a construção e apropriação dos conceitos matemáticos. Os conceitos e definições abordados são necessários, neste momento, pois serão subsídio acadêmico para as demonstrações ao longo do desenvolvimento do trabalho em busca de mobilizar conteúdos matemáticos para atingir uma estratégia ótima no Jogo do NIM.

Para desenvolvimento de tais proposições foram consultados dois livros de Teoria dos Números dos autores Milies e Coelho (2001) e Hefez (2009).

1.1 Divisibilidade e Divisão Euclidiana

O assunto divisibilidade nem sempre é visto pelos alunos da Educação Básica com empatia, as vezes por não dominarem, ainda, as operações de adição, subtração e multiplicação, ou pela forma abstrata e complexa com que o algoritmo e operação de divisão são repassados aos alunos em uma etapa muito precoce de suas vidas escolares.

Definição 1.1.1. *Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a. A negação da afirmação a divide b é representada por $\nmid$, ou seja $a \nmid b$.*

Exemplo 1.1.2. $2|10$ *pois* $10 = 5 \cdot 2$

Exemplo 1.1.3. $3|12$ *pois* $12 = 4 \cdot 3$

Exemplo 1.1.4. $3 \nmid 10$ *pois não existe um* $c \in \mathbb{Z}$ *tal que* $10 = c \cdot 3$.

É importante destacar que se $a \neq 0$, o número inteiro c, nessas condições, é único . Isso é de fácil demonstração, pois caso existisse outro c' tal que $b = c'.a$, ocorreria que $c' \cdot = c \cdot a$, logo pela propriedade do cancelamento, temos $c' = c$. O inteiro assim definido é denominado quociente de b por a, sendo também representado da seguinte forma:

$$c = b/a = \frac{a}{b}$$

Observar-se, ainda, que a sentença $a|b$ não representa nenhuma operação matemática, muito menos uma fração. Como destaca Hefez (2009) "trata-se de uma sentença que diz ser verdade que existe um c tal que $b = c \cdot a$. E como casos particulares temos que $0 \nmid a$, se $a \neq 0$, pois não existe um inteiro c que satisfaça a igualdade $a = 0.c$, pois 0 divido por 0 é considerado uma indeterminação, pois qualquer número c satisfaz $0 = 0.c$.

A seguir temos algumas propriedades cujas demonstrações encontram-se em Hefez (2009).

Propriedades 1.1.5. *Quaisquer que sejam os inteiros a, b, c e d (assumindo divisores diferentes de zero)*

i) $a|a$

ii) Se $a|b$ e $b|c$, *então* $a|c$

iii) Se $a|b$ e $c|d$, *então* $ac|bd$

iv) Se $a|b$, *então para todo inteiro* m, *tem-se que* $a|bm$

iv) Se $a|b$ e $a|c$, *então para todos inteiros* m e n: $a|(mb + nc)$.

v) Se $a|b$, então $|a| \leq |b|$

COROLÁRIO 1.1.6. *Os únicos divisores de 1 são 1 e -1.*

Demonstração. Pela propriedade $v)$ se $a|b$, então $|a| \leq |b|$, se a é um divisor de 1, então temos que $|a| \leq 1$, como não existem inteiros entre 0 e 1, admitimos também que $a \neq 0$, temos que $|a| > 0$, logo $|a| = 1$, portanto $a = 1$ ou $a = -1$

□

COROLÁRIO 1.1.7. *Se $a|b$ e $b|a$ então $a = \pm b$ (com a e b diferentes de zero)*

Demonstração. De $a|b$ e $b|a$ implica que existem c e d inteiros tais que $b = c \cdot a$ e $a = d \cdot b$.

Substituindo o valor de b na segunda equação temos:

$a = d \cdot (c \cdot a) \leftrightarrow 1 = d \cdot c$, logo d é um divisor de 1, e pela demonstração anterior $d = \pm 1$. Consequentemente temos $a = \pm b$

□

De acordo com Hefez (2009) a divisão exata de um número inteiro por outro nem sempre é possível, expressa-se esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números inteiros, veremos que, ainda assim, será possível efetuar uma "divisão com resto pequeno", chamada de divisão euclidiana, introduzida por Euclides 300 anos antes de Cristo em sua obra Elementos. O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por inúmeras propriedades dos inteiros.

TEOREMA 1.1.8. *Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:*

$$a = b \cdot q + r, \text{ tal que } 0 \leq r < |b|$$

a é chamado dividendo

q é chamado de quociente da divisão de a por b

r é chamado de resto da divisão de a por b

Se $r = 0$ dizemos que b/a, ou seja, a é um múltiplo de b.

Demonstração. A demonstração do Teorema da Divisão Euclidiana pode ser encontrado sobre diversas formas, o fato importante é realizar a demonstração de sua existência e de sua unicidade:

i) Primeiramente demonstraremos a existência de q e r através de uma análise geométrica.

Seja b um número inteiro tal que b $\neq$ 0 e consideremos a divisão do conjunto dos números Inteiros em união de intervalos disjuntos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots \bigcup [-2|b|, -|b|) \bigcup [-|b|, 0) \bigcup [0, |b|) \bigcup \ldots\}$$

Conforme reta númerica:

[redacted]

Seja a, um número inteiro qualquer, observa-se que ele deve pertencer a um e somente um desses intervalos.

[redacted]

Portanto, existem m e r únicos tais que $a = m \cdot |b| + r$, com $0 \leq r < |b|$, o fato de $r \geq 0$ é facilmente comprovado pois a está a direita de $m \cdot |b|$ logo r pode coincidir com zero ou ser maior que ele; já o fato de $r < |b|$ pode ser compreendido facilmente, pois caso tivéssemos $r \geq b$ logo a não pertenceria ao referido intervalo, uma vez que o intervalo é semiaberto.

Conseqüentemente, na expressão $a = m \cdot |b| + r$, tomando $q = m$, se $b > 0$ e $q = -m$ se $b < 0$, temos:

$$a = q \cdot b + r \text{ , com } 0 \leq r < |b|$$

ii) Na segunda parte demonstra-se a unicidade dos inteiros q e r.

Para tal supõe-se que $a = q \cdot b + r = q' \cdot b + r'$, onde q, q', r, r' $\in \mathbb{Z}$, com:

0$\leq$ r < $|b|$ e 0$\leq$ r' < $|b|$

Sendo r e r' inteiros positivos temos:

$r' - r \leq \ r'$ e $-r \ \leq \ r' - r$

Partindo agora da expressão $r' - r \leq\ r'$ e o observando o que $0 \leq r' < |b|$ e $-r\ \leq\ r' - r$ temos:

r' - r $\leq$ r' $\leftrightarrow$ r' - r $\leq$ r'< $|b|$

$\leftrightarrow$ -r $\leq$ r' - r $\leq$ r' $<$ $|b|$

$\leftrightarrow$ - |b| $<$ -r $\leq$ r' - r $\leq$ r' $<$ |b| (sendo r $<$ $|b|$, implica que - r $>$ - $|b|$)

$\leftrightarrow$ - $|b|$< $|r' - r|$ $<$ $|b|$

$\leftrightarrow$ $|r' - r|$ $<$ $|b|$

Observando agora as equações abaixo:

$a = q.b + r(I)$

$a = q'.b + r'(II)$

Subtraindo a equação (I) de (II) temos:

$0 = b(q - q') + r - r' \leftrightarrow b(q - q') = r' - r \leftrightarrow |b|\ \cdot |(q - q')| = |r' - r| < |b|$ o que só possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$. E assim está provada a unicidade dos valores de q e r.

□

Cabe aqui um breve comentário sobre este teorema, principalmente no que se refere à unicidade dos valores de q (quociente) e r (resto). Tomemos o seguinte exemplo, efetuar a divisão de $a = 20$ por $b = 3$, podemos encontrar o número 20 representado sobre diversas formas através de combinações que envolvam algum múltiplo de 3 e uma operação de adição.

Veja a seguir algumas dessas possíveis situações:

$20 = 3 \cdot 7 + (-1)$

$20 = 3 \cdot 6 + 2$

$20 = 3 \cdot 5 + 5$

$20 = 3 \cdot 4 + 8$

O teorema da divisão quando afirma que existem únicos valores para q e r, tais que a igualdade $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < |b|$, pode ser ilustrado e compreendido com facilidade a partir do exemplo acima. Ao analisar os possíveis valores do resto, caso este admitisse valores negativos culminaria no absurdo de obter o produto $b \cdot q$ exceder o próprio valor original a;

e caso o resto admitisse valores maiores ou iguais ao módulo de b, seria outro absurdo, pois é fácil ver que ainda há condições prosseguir coma a divisão. Portanto no exemplo descrito, ao efetuar a divisão de 20 por 3, os únicos valores que satisfazem, unicamente, o teorema da divisão euclidiana são $q = 6$ e $r = 2$, logo $20 = 3 \cdot 6 + 2$.

1.2 Sistemas de Numeracão

Tendo em vista que a segunda versão do jogo do NIM envolve conceitos sobre o sistema binário de numeração para que seja possível obter uma estratégia ótima, será realizado, então, um apanhado geral sobre Sistemas de Numeração e mudança de bases numéricas.

O sistema de numeração amplamente utilizado pelas pessoas para representar os números inteiros é o sistema decimal posicional. É chamado de decimal pois todo número é representado por uma sequencia formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e acrescidos do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo. E é dito posicional, pois cada algarismo possui um peso, ou seja, representa uma quantidade que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa. Esse peso, sempre uma potência de dez, do seguinte modo:

- o algarismo da extrema direita com peso um;
- o seguinte, da direita para a esquerda, tem peso dez;
- o seguinte tem peso cem;
- o seguinte tem peso mil, e assim por diante.

Exemplo 1.2.1. $463 = 4.10^2 + 6.10^1 + 3.10^0$

Exemplo 1.2.2. $4258 = 4.10^3 + 2.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0$

Exemplo 1.2.3. $28435 = 2.10^4 + 8.10^3 + 4.10^2 + 3.10^1 + 5.10^0$

No sistema decimal cada algarismo possui uma ordem contada da direita para a esquerda e a cada terna de ordens forma-se uma classe. A seguir estão listadas os nomes das primeiras classes:

	unidades	1^a ordem
Classe das Unidades:	dezenas	2^a ordem
	centenas	3^a ordem
	unidades de milhar	4^a ordem
Classe do Milhar:	dezenas de milhar	5^a ordem
	centenas de milhar	6^a ordem
	unidades de milhão	7^a ordem
Classe do Milhão:	dezenas de milhão	8^a ordem
	centenas de milhão	9^a ordem

Fazendo um paralelo com o sistema decimal, que possui dez algarismos distintos na composição dos números inteiros, os sistemas de numeração posicional de base b, terá b algarismos distintos na formação das sequências que representam os números nesse sistema de base b.

Os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no teorema a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 1.2.4. *Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, r_2 \ldots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que*

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$$

Demonstração. A demonstração será realizada em duas etapas:

i) Da existência:

Note que $a = 1$ se escreve na forma acima, basta tomar $n = 0$ e $r_0 = 1$.

Seja S o conjunto dos naturais que não admitem uma representação como acima, pretende-se, então, mostrar que S $= \emptyset$.

Observa-se que $N \setminus S \neq \emptyset$, pois vimos que $1 \notin S$.

Ao supor, por absurdo, que $S \neq \emptyset$ implicaria que S possuiria um menor elemento, que certamente é maior que 1. Seja a' este menor elemento. Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana temos $a' = bq + r$, com $0 \leq$ r $< b$. Isso implica $q < a'$ e, portanto, $q \notin S$. Logo, q se escreveu da forma do teorema e, portanto, a' também, o que é uma contradição, provando assim que $S = \emptyset$.

ii) Da unicidade:

Suponha que existam duas expressões para a:

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n = r'_0 + r'_1 b + r'_2 b^2 + \ldots + r'_m b^m$$

Reescrevendo as expressõess com b em evidência temos:

$$\begin{aligned} a &= b\ (r_1 + r_2 b + \ldots + r_{n-1} b^{n-1}) + r_0 = \\ &= b\ (\ r'_1 + r'_2 b + \ldots + r'_{m-1} b^{m-1}) + r'_0 \end{aligned}$$

Como $0 \leq r_0 < b$, $0 \leq$ r'$_0 < b$, utilizando-se da unicidade do quociente e resto da divisão euclidianda dos inteiros, temos:

$$r_1 + r_2 b + \ldots + r_{n-1} b^{n-1} = r'_1 + r'_2 b + \ldots + r'_{n-1} b^{n-1} \text{ e } r_0 = r'_0$$

Repetindo-se o processo, temos que:

$$b\ (\ r_2 + \ldots + r_{n-2} b^{n-2}\ ) + r_1 = b\ (r'_2 + \ldots + r'_{m-2} b^{m-2}) + r'_1$$

Utilizando-se, novamente, da unicidade do quociente e do resto da divisão dos inteiros, temos:

$$r_1 = r'_1 \text{ e } r_2 + \ldots + r_{n-2} b^{n-2} = r'_2 + \ldots + r'_{m-2} b^{m-2}$$

Dessa forma, pode-se demonstrar sucessivamente que os coeficientes em ambas as expressões são iguais, conclui-se, assim, a demonstração da unicidade.

□

Exemplo 1.2.5. *Escrever o número 126 em base 4:*

$126 = 31 \cdot 4 + 2$

$31 = 7 \cdot 4 + 3$

$7 = 1 \cdot 4 + 3$

$1 = 0 \cdot 4 + 1$

Conforme o teorema acima temos $126 = 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2$ *ou alternativamente é comum encontrarmos a seguinte representação* $126 = [1332]_4$.

A expansão numa dada base b adotada fornece-nos um método para representar os números naturais através de símbolos. Para tanto, há a escolha de um conjunto S de b símbolos:

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{b-1}\}$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$. Um número natural a escreve-se na base b da seguinte forma

$$x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$$

com $x_0 ... x_n \in \ S$ e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + \ldots + x_n b^n$$

Se $b \leq 10$, utilizam-se os símbolos $0, 1, 2..., b-1$, pois utilizaremos os restos das sucessivas divisões euclidianas para realizar a mudança de base. Como já foi demonstrado o resto é sempre menor que o módulo de b. Caso opte-se por um sistema de numeração com $b > 10$, é indicado usar os dígitos de 0 a 9 acrescentando novos símbolos para 10, ..., b - 1, por exemplo α e β para representar os números 10 e 11.

O sistema de base 2, comumente chamado de sistema binário e amplamente utilizado em computação, será também adotado para obter uma estratégia ótima no jogo do NIM, segunda versão, a ser detalhado em capítulo próprio. No sistema de base $b = 2$ todos os números naturais são representados por uma sequencia utilizando símbolos do conjunto $S = \{0, 1\}$.

Exemplo 1.2.6. *Vamos representar* 78 *na base* 2*:*

$78 = 39 \cdot 2 + 0$

$39 = 19 \cdot 2 + 1$

$19 = 9 \cdot 2 + 1$

$9 = 4 \cdot 2 + 1$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 0 \cdot 2 + 1$

$78 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 12^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 = [1001110]_2$

Exemplo 1.2.7. *Vamos representar* 77 *na base* 5*:*

$77 = 15 \cdot 5 + 2$

$15 = 3 \cdot 5 + 0$

$3 = 0 \cdot 5 + 3$

$77 = 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2.5^0 = 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 2 = [302]_5$

Exemplo 1.2.8. *Vamos representar* 187 *na base* 7*:*

$187 = 26 \cdot 7 + 5$

$26 = 3 \cdot 7 + 5$

$3 = 0 \cdot 7 + 3$

$187 = 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 \; = 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5 = [355]_7$

Existem inúmeras formas para realizar mudanças de base entre os sistemas de numeração. Porém, como este não é o objeto de estudo deste trabalho, não aprofundaremos os estudos em técnicas além das divisões sucessivas. Entretanto, destaca-se uma dica para realizar a conversão de base decimal para base binária: basta reescrever os números do sistema decimal utilizando as potências de dois necessárias, e em seguida alternar entre os dígitos 1 e 0, quando a potência de dois foi utilizada ou não. Por exemplo: para o obter a representação binária do número 9, que está no sistema decimal, utilizaremos o auxílio da tabela com potências de base 2, de onde obtém-se $9 = 8 + 1$

Potências de base 2:	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
Conexões:	|			|
1 ou 0	1	0	0	1

Logo, $9 = [1001]_2$

CAPÍTULO 2

JOGOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

2.1 Jogos e sua utilização na educação básica

Observa-se que diversos centros acadêmicos possuem excelentes pesquisas e grupos de estudo sobre a importância do lúdico como ferramenta pedagógica. Ao examinar algumas obras sobre o assunto, estabeleceu-se, para este trabalho, o delineamento teórico a cerca do estudo dos jogos na Educação Básica com enfoque nos tópicos que proporcionem uma reflexão sobre o uso consciente dos jogos no processo de ensino aprendizagem e uma análise sobre as considerações a respeito do lúdico nas diretrizes curriculares do Distrito Federal.

Em princípio, destacam-se a dificuldade em definir o termo jogo, amplamente utilizado na educação. Pois em cada contexto a palavra jogo pode assumir significados distintos.

> Assumir que cada contexto cria sua concepção de jogo não pode ser visto de modo simplista, como mera ação de nomear. Empregar um termo não é um ato solitário. Subentende todo um grupo social que o compreende, fala e pensa da mesma forma. Considerar que o jogo tem um sentido dentro de um contexto significa a emissão de uma hipótese, a aplicação de uma experiência ou de uma categoria fornecida pela sociedade, veiculada pela língua enquanto instrumento de cultura dessa sociedade. Toda denominação pressupõe um quadro sociocultural transmitido pela linguagem e aplicado ao real. (KISHIMOTO, 1997, p.16)

Conforme Antunes (1998, p.11) "a palavra jogo provém de jocu, substantivo masculino de origem latina com significado de gracejo", ou seja, etimologicamente expressa o sentido de brincar, desafiar ou distrair-se, sentimentos esses que se confundem e se completam quando o tema é jogar. O jogo em si, dependendo da contextualização, pode assumir apenas sua função lúdica, prazerosa e ocasional, porém restringiremos a análise do jogo como componente de uma ferramenta pedagógica, em especial para o ensino de matem'atica.

De acordo com Antunes (1998), o professor deixou de ser um simples reprodutor e transmissor de conhecimento para o aluno, aponta, ainda, o surgimento da idéia de ensino despertado pelo interesse, em que destaca a relevância em utilizar-se dos atributos dos jogos como ferramentas geradoras de situações estimuladoras e eficazes.

> [. . .] hoje a maioria dos filósofos, sociólogos, etnólogos e antropólogos concordam em compreender o jogo como uma atividade que contém em si mesmo o objetivo de decifrar enigmas da vida e de construir um momento de entusiasmo e alegria na aridez da caminhada humana. Assim, brincar significa extrair da vida nenhuma outra finalidade que não seja ela mesma. Em síntese, o jogo é o melhor caminho de iniciação ao prazer estético, à descoberta da individualidade e à meditação individual. (ANTUNES, 1998, p.36)

Quanto ao fato de indicar o jogo como estratégia auxiliar na prática docente Kishimoto (2008) destaca a importância da mediação e orientação de um adulto, para que o jogo passe da simples situação de brincadeira livre, encarada como fator de entretenimento, e alcance o estado de ferramenta pedagógica, pois através da orientação e planejamento do professor o jogo dará forma aos conteúdos indutivos, convertendo-os em idéias lógico-científicas. É importante que o professor, em seu planejamento, deixe claro as justificativas que expressem importância pedagógica do jogo na aprendizagem dos alunos, afim de atingir uma meta.

Por parte do professor, é importante realizar uma reflexão sobre o planejamento e as formas de inserção dos jogos em suas atividades diárias. Caso contrário, propostas bem fundamentadas e interessantes não atingem os reais objetivos quando colocadas em prática, sob o risco de não serem inseridas na escola e na vida dos alunos. Essa reflexão é fundamental para conscientização sobre a função mediadora dos professores nos processos de aprendizagem e para uma progressiva segurança e autonomia na sua função, principalmente ao serem questionados sobre a utilização de jogos na escola.

Para Lima (2008, p.59) "indicar o jogo apenas como um elemento da cultura, atividade não produtiva, incerta, não é suficiente para que ele possa ser transformado em recurso pedagógico". Torna-se, então, primordial que o professor deixe claro as justificativas, em seu planejamento; que expressem qual o seu papel e a sua importância na aprendizagem e no desenvolvimento das crianças, isto é, qual a contribuição do jogo proposto, junto com as outras atividades, para que a escola alcance as suas finalidades.

Ainda de acordo com o descrito por Lima (2008, p.59) "os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os conteúdos já trabalhados." Devem, portanto, ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o aluno a adquirir e apropriar-se de conteúdos e conhecimentos relevantes. No caso deste trabalho, busca-se tratar conceitos matemáticos através de jogos, de tal forma que auxilie a aprendizagem dos alunos ao depararem-se com assuntos abstratos como divisibilidade e sistemas numéricos.

Antunes (1998) reforça em sua obra a função desenvolvida pelo professor, para que a utilização dos jogos como ferramenta pedagógica atinja seus objetivos.

> Elemento indispensável e imprescindível na aplicação dos jogos é o professor. Um profissional que assume sua crença no poder de transformação das inteligências, que desenvolve os jogos com seriedade, que estuda sempre e se aplica cada vez mais, desenvolvendo uma linha de cientificidade em seu desempenho, mas que essa linha não limita sua sensibilidade, alegria e entusiasmo. Um promotor de brincadeiras, que sabe brincar. (ANTUNES 1998, p.12)

Portanto, a ludicidade dos jogos não será considerada somente sobre os aspectos de simples instrumentos recreativos. Este trabalho limitar-se-á com a função pedagógica e motivadora dos jogos na aprendizagem, como agentes facilitadores e colaboradores na compreensão e aprendizagem de conteúdos matemáticos, além disso aborda-se o fato do jogo quanto ao desenvolvimento e aprimoramento da capacidade de convivência coletiva e respeito ao próximo, fatores importantes para o ambiente escolar em geral, em especial para os alunos da socioeducação, público do estudo de caso.

A escolha do jogo do NIM como norteador deste trabalho, considerou, também, o fato da utilização do lúdico por intermédio do jogo ter fundamentação em diversas diretrizes curriculares, entre elas o Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal, que no geral apontam para o fato de que o jogo é um agente auxiliar no desenvolvimento do indivíduo, quando estimula o crescimento coletivo e individual e o respeito mútuo, introduzindo uma forma diferenciada de abordar os problemas e conteúdos.

Para Charnay (1996, p. 46 apud WELTER, 2016, p.20) "só há problema se o aluno percebe uma dificuldade... Há então, uma ideia de obstáculo a ser superado [...]". Em nosso caso, como vencer o jogo do Nim é o primeiro problema ou desafio proposto, e em seguida a assimilação de conceitos matemáticos associados à dinâmica do jogo.

Portanto, a utilização consciente do lúdico como ferramenta pedagógica pode estimular o espírito investigativo dos alunos, que por muitas vezes está adormecido nas salas de aula. Por fim, Ribeiro (1997, p.135) destaca que "é preciso ter consciência dos limites da utilização do jogo na atividade pedagógica, rompendo uma visão romântica de que o jogo seria uma panacéia para todos os males". É importante desenvolver certa percepção a respeito da utilização dos jogos durante as aulas, principalmente sobre o paradoxo ou dicotomia envolvido, pois haverá momentos em que os objetivos pedagógicos serão alcançados com o atrativo proporcionado pelo lúdico. Porém, existem situações em que o professor terá maior dificuldade em conseguir fazer com que certos conteúdos passem por práticas lúdicas. Até mesmo porque o lúdico é apenas uma das inúmeras estratégias didáticas que o professor pode utilizar, na matemática é comum a prática de atividades com instrumentos de medição, a experimentação ou o uso de recursos tecnológicos, entre outras diversas metodologias.

2.2 Diretrizes curriculares da Educação Básica do Distrito Federal - Currículo em Movimento

Para que ensinar? O que ensinar? Como ensinar? O que e como avaliar? São questões que afligem professores, pais, alunos e de forma geral todos que estão envolvidos com a Educação Básica. Com o intuito dar subsídio a essas indagações, a partir 2011, através de estudos e plenárias regionais, a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), propôs a reestruturação das diretrizes curriculares do Distrito Federal, que culminou em 2014 com a implementação do Currículo em Movimento da Educação Básica. O Currículo ficou organizado num conjunto composto por 08 (oito) cadernos:

1. Pressupostos Teóricos;
2. Educação Infantil;
3. Ensino Fundamental – Anos Iniciais;
4. Ensino Fundamental – Anos Finais;
5. Ensino Médio;
6. Educação Profissional e EAD;
7. Educação de Jovens e Adultos;
8. Educação Especial.

A concretização e aplicação deste Currículo acontece democraticamente a partir dos projetos político-pedagógicos (PPP) das escolas, como expressão de sua intencionalidade. A nova proposta de currículo propõe a superação do clássico currículo coleção, que até então organiza os conteúdos de forma prescritiva, linear e hierarquizada, que nada mais é do que um currículo tradicional formado por conjunto de disciplinas e matérias, fechado em si, com conteúdo pelo conteúdo. O grande desafio proposto pela SEEDF é:

> [. . .] sistematizar e implementar uma proposta de currículo integrado em que os conteúdos mantêm uma relação aberta entre si, [. . .]. Esses conteúdos podem ser desenvolvidos a partir de ideias ou temas selecionados pelas escolas e em permanente mudança em torno dos eixos transversais: **Cidadania e Educação em e para os Direitos Humanos**, **Educação para a Diversidade**, **Educação para a Sustentabilidade**; além dos eixos integradores indicados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para cada etapa/modalidade/ciclo. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.65)

Na proposta do novo currículo o governo local considera as diferentes formas de organização da educação básica, conforme orienta o artigo 23 da LDB, “Art.23 A educação básica poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não-seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.”. No Distrito Federal, existem três modalidades predominantes de organização da educação básica: seriação, os ciclos e a semestralidade. São organizações escolares propostas que buscam melhor adequação a cada realidade local e têm condições de coexistência no Currículo em Movimento.

Com as evoluções e variabilidades propostas pela tecnologia da informação, pela internet e pela própria sociedade, fica compreensível que o currículo tenha recebido em sua nomenclatura a palavra movimento, conforme destaca a própria SEEDF em seu caderno de Pressupostos Teóricos:

> O Movimento deste Currículo é político, pedagógico, flexível, transformador, crítico, reflexivo, diverso, libertador de correntes, sejam ideológicas, científicas, filosóficas... O movimento é vida, é verdade prenhe de realidade, é senso comum e ciência, é relação teoria e prática, é elemento de poder. Poder como possibilidade de constituição da práxis transformadora da realidade social. É no Movimento que se constrói uma educação que vai além do capital, uma educação com o Estado e além dele, ou seja, uma educação pública em que consigamos enxergar e vislumbrar a participação conjunta do Estado e da Sociedade Civil. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.79)

Para atingir o objetivo de um currículo integrado, propôs-se um instrumento aberto em que os conhecimentos dialogam entre si, criando conexões entre as disciplinas e conteúdos através dos eixos transversais, estimulando assim a inovação, a pesquisa e o emprego de recursos e métodos mais criativos, flexíveis e humanizadas. "Considerando a importância da articulação de componentes curriculares de forma interdisciplinar e contextualizada, o currículo propõe ainda eixos integradores: alfabetização, somente para o Bloco Inicial de Alfabetização (BIA), letramentos e ludicidade para todo o Ensino Fundamental". (Distrito Federal, 2014b, p.14). Para o Ensino Médio o currículo propõem como eixos integradores entre os diversos conhecimentos a ciência, a tecnologia, a cultura e o mundo do trabalho.

Nesse aspecto, os conteúdos passam a ser organizados em torno dos eixos transversais de forma interdisciplinar, integrada e contextualizada.

> A interdisciplinaridade e a contextualização são nucleares para a efetivação de um currículo integrado. A interdisciplinaridade favorece a abordagem de um mesmo tema em diferentes disciplinas/componentes curriculares e, a partir da compreensão das partes que ligam as diferentes áreas do conhecimento/componentes curriculares, ultrapassa a fragmentação do conhecimento e do pensamento. A contextualização dá sentido social e político a conceitos próprios dos conhecimentos e procedimentos didático-pedagógicos, propiciando relação entre dimensões do processo didático (ensinar, aprender, pesquisar e avaliar). Em relação à seleção e organização dos conteúdos, este Currículo define uma base comum, mas garante certa flexibilidade para que as escolas, considerando seus projetos político-pedagógicos e as especificidades locais e regionais, enriqueçam o trabalho com outros conhecimentos igualmente relevantes para a formação intelectual dos estudantes. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.68)

O lúdico é, portanto, tratado com tal importância que passa a ser denominado eixo integrador entre os diversos conhecimentos, e está presente em todo Ensino Fundamental. O Currículo em Movimento traz uma nova forma de planejamento e organização da rotina pedagógica dos professores. Ao adotar os pressupostos do Currículo em Movimento, o professor ao elaborar um plano de aula, primeiramente, define quais objetivos quer atingir, para depois determinar quais conteúdos e estratégias irá mobilizar para concretizar seu planejamento. Esses objetivos e conteúdos se encaixam em eixos integradores, que por sua vez estão contidos em eixos transversais. Os objetivos não fazem conexão a apenas um determinado conteúdo, eles transpassam por diversos conteúdos, e podem estar relacionados a um ou mais eixos transversais.

Sendo o público alvo do estudo de caso desta dissertação, alunos, geralmente, do Ensino Fundamental - Anos Finais, foi realizado uma pesquisa sobre os pressuposto a respeito do ensino da Matemática na nova proposta curricular do DF, para essa etapa. Destaca-se que cada componente curricular traz uma contextualização antes de adentrar nas matrizes curriculares propriamente ditas. Quanto ao ensino da Matemática destaca-se:

> Na atualidade, aos conceitos referentes à Matemática foram acrescidos a função de promover a formação do cidadão crítico, desenvolvendo capacidades de estruturação de pensamentos funcionais e relevantes às aplicações na vida prática e na resolução de problemas de diversos campos de atividade. O ensino da Matemática considera a formação de capacidades intelectuais e funcionais como base da formação integral, possibilitando a articulação da disciplina com outras áreas do conhecimento no que se refere à multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. [...] Como uma grande área de pesquisa, a Educação Matemática, criada no século XX, refere-se ao ensino e à aprendizagem, norteando tendências como: Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Situações-Problema, Materiais Manipuláveis e Jogos, entre outras. (DISTRITO FEDERAL, 2014b, p.85-86).

Alinhado com as novas tendências de educação, com a valorização do educando em detrimento da mera transmissão de conhecimento através do fluxo professor-aluno, a nova proposta do currículo destaca:

> Para garantir a unicidade da teoria-prática no currículo e sua efetividade na sala de aula, devemos privilegiar estratégias de integração que promovam reflexão crítica, análise, síntese e aplicação de conceitos voltados para a construção do conhecimento, permeados por incentivos constantes ao raciocínio, problematização, questionamento, dúvida. O ensino que articula teoria e prática requer de professor e estudantes a tomada de consciência, revisão de concepções, definição de objetivos, reflexão sobre as ações desenvolvidas, estudo e análise da realidade para a qual se pensam as atividades. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.67)

Esta dissertação não possui foco nos processos de avaliação da aprendizagem, e sim na motivação do processo de aprendizagem através do lúdico, porém o tema avaliação é um assunto importante de qualquer procedimento construtivo e recebeu importantes considerações e recomendações na redação do Currículo em Movimento, entre as quais destaca-se o trecho a seguir:

> A avaliação é uma categoria do trabalho pedagógico complexa, necessária e diz respeito a questões tênues como o exercício do poder e a adoção de práticas que podem ser inclusivas ou de exclusão. [...] Embora os documentos oficiais da SEEDF e escolas explicitem, do ponto de vista conceitual, a avaliação formativa, ainda é comum o uso da função somativa, centralizada no produto, presente especialmente nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. Geralmente neste caso o rito e a práxis docente convergem para avaliar a aprendizagem e não para a aprendizagem. A intenção desta Secretaria é a de possibilitar, por meio de formação continuada dos profissionais da educação, a modificação dessa ótica e dessas práticas. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.71)

Ao realizar o estudo sobre o Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal, em especial sobre o lúdico como eixo integrador de saberes, constatou-se que houve por parte dos gestores públicos e dos profissionais da educação envolvidos no processo de reestruturação do currículo, a elaboração de um texto que não enrijece a dinâmica exigida para a sala de aula. O movimento proposto pelo currículo para Educação Básica do Distrito Federal é algo que vislumbra uma ressignificação para as atribuições da escola, que vão além do senso comum.

> Nesse sentido, é preciso compreender que os conhecimentos escolares não se traduzem exclusivamente no conhecimento científico, mas também sofrem influências dos saberes populares, da experiência social, da cultura, do lúdico, do saber pensar que constituem o conjunto de conhecimentos e que, no currículo tradicional, sofrem processos de descontextualização, recontextualização, subordinação, transformação, avaliações e efeitos de relações de poder. A escola deixa de ser apenas lugar de aquisição de habilidades, competências e conhecimentos para o exercício do trabalho, e torna-se espaço privilegiado de produção de cultura, de valorização de saberes, práticas e conteúdos que desenvolvam a consciência de classe. (DISTRITO FEDERAL, 2014a, p.76-77)

A seguir, destaca-se uma trecho dessa nova proposta curricular do Distrito Federal. Trata-se de uma tabela da componente curricular de Matemática do 6^o Ano do Ensino Fundamental, que servirá de subsídio para o planejamento pedagógico dos docentes, agora com a perspectiva de utilizar o conteúdo para alcançar objetivos.

EIXOS TRANSVERSAIS: EDUCAÇÃO PARA A DIVERSIDADE / CIDADANIA E EDUCAÇÃO EM E PARA OS DIREITOS HUMANOS / EDUCAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE	
EIXOS INTEGRADORES: LUDICIDADE E LETRAMENTOS **MATEMÁTICA - 6^o ANO**	
OBJETIVOS	**CONTEÚDO**
Identificar conhecimentos matemáticos como meios de compreensão e conversão do mundo. Estimular interesse, curiosidade, espírito de investigação e desenvolvimento da capacidade para resolver situações problema. Estabelecer relações entre temas matemáticos com diferentes campos e conhecimentos de outras áreas curriculares. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos. Identificar aspectos consensuais, respeitando todas as diversidades, bem como todos os contextos sociais abordados por meio da Etnomatemática. Reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática e serem capazes de aplicá-las. Utilizar a Matemática Financeira como ferramenta para tomada de decisões no cotidiano. Resolver desafios e problemas que envolvam raciocínio lógico. Compreender e realizar processos de cálculos mentais e escritos com operações no Conjunto de Números Naturais.	**Sistema de numeração** Origem e evolução dos números: abordagem histórica de sistemas de numeração Base decimal Noções de conjuntos e símbolos matemáticos **Números naturais e operações** Estruturação do raciocínio lógico e sequencial Representação geométrica: posicionamento da reta Situações-problema e expressões numéricas envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada. Números primos e compostos. Múltiplos e divisores. Critérios de divisibilidade de números naturais. Mínimo múltiplo comum com ênfase em situações-problema.

Fonte: Distrito Federal, 2014b, p.88-90

2.3 Introdução aos Jogos Combinatórios

Antunes (1998) afirma que a intenção explicita de provocar uma aprendizagem significativa, ou seja, estimular a construção de um novo conhecimento, é o fator principal que distingue um jogo pedagógico de um outro de caráter apenas lúdico. Com esse intuito, de valorizar o caráter pedagógico relacionado ao ensino de conceitos lógico-matemáticos, desenvolveu-se um campo dentro da matemática e economia conhecido por Teoria do Jogos.

Sartini et al (2004, p.1) fazem uma descrição informal sobre a teoria dos jogos, onde descrevem concisamente a essência dessa nova área do saber matemático, pois a apresentam como "[...] uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais "agentes de decisão" interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo." Os mesmos autores fazem um breve resumo sobre a os primórdios da teoria dos jogos:

> Registros antigos sobre teoria dos jogos remontam ao século XVIII. Em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, James Waldegrave analisa um jogo de cartas chamado "*le Her*" e fornece uma solução que é um equilíbrio de estratégia mista (conceito que nos familiarizaremos posteriormente). Contudo, Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral. No início do século XIX, temos o famoso trabalho de Augustin Cournot sobre duopólio. Em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos, o teorema afirma que o jogo de xadrez é estritamente determinado, isto é, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. Outro grande matemático que se interessou em jogos foi Emile Borel, que reinventou as soluções *minimax* e publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos. Ele achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de uma maneira semelhante. Em seu início, a teoria dos jogos chamou pouca atenção. O grande matemático John von Neumann mudou esta situação. Em 1928, ele demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas. (SARTINI et al 2004, p.2)

De acordo com Ferguson (2014, p.3) dentre os diversos tipos de jogos há características comuns a todos: têm um número pré-determinado de jogadores, possivelmente há disputas ou cooperação, estes agem sob condições incertas e no final recebem algum benefício ou prejuízo. Em alguns casos é possível propor ações a serem tomadas por um jogador, em outros, a expectativa é perceber o que se passa de modo a fazer presságios.

MATOS, BASTOS e SEIMETZ (2015, p.3, no prelo) apresentam uma definição essencial e objetiva para jogos matemáticos: "Um jogo é uma quadra $\mathbf{U} = (\mathbf{T}, \mathbf{J}, \mathbf{R}, \mathbf{O})$, onde $\mathbf{T}$ é o tabuleiro, $\mathbf{J}$ o número de jogadores, $\mathbf{R}$ as regras e $\mathbf{O}$ o objetivo. Em um jogo deve ficar claro quem são esses quatro elementos." Portanto, se uma atividade lúdica não conter objetivamente a definição desses quatro elementos, essa atividade não será considerada um jogo.

Ademais encontra-se a seguinte enumeração sobre a definição e as características de um jogo:

> Características comuns:
>
> 1.Um conjunto de posições, uma das quais é destacada como a posição inicial do jogo;
>
> 2. Um conjunto de jogadores que realizarão os lances do jogo;
>
> 3. Um conjunto de regras, que determinam:
>
> (a) Todos os lances permitidos aos jogadores (um lance é um movimento de uma posição do jogo para outra);
>
> (b) Todas as posições terminais (nas quais o jogo termina, dependendo de quem joga a seguir);
>
> (c) Uma quantidade de pontos a ser atribuída a cada jogador em cada posição terminal (que, na maioria dos casos será 1 ponto para os vencedores e 0 pontos para os perdedores). (TEIXEIRA, 2013, p.1)

Para Ferguson (2014, p.4) existem três formas fundamentais a serem consideradas no estudo dos jogos, "a forma extensiva, a forma estratégica e a forma de coalizão. Elas diferem na quantidade de detalhe sobre as jogadas que entra no modelo."Ferguson define, também, um jogo de informação perfeita, ou completa, quando os jogadores sabem todas as jogadas anteriores de todos os jogadores e os possíveis lances.

> Jogos de duas pessoas de informação perfeita com um resultado final de vitória ou derrota e nenhum lance aleatório são conhecidos como jogos combinatórios. Há registros teóricos e aprofundados sobre tais jogos, veja *On Numbers and Games* de J.H. Conway, 1976 e *Winning Ways for your mathematical plays* de Berlekamp, Conway e Guy, 1982. Tal jogo é chamado imparcial se os dois jogadores têm o mesmo conjunto de jogadas legais a partir de cada posição, um exemplo clássico é o jogo do NIM, e é chamado parcial (partizan) caso contrário, como exemplo temos o xadrez e as damas. (FERGUSON 2014, p.4)

Encontra-se ainda a seguinte contribuição a respeito do assunto:

> [...] um jogo combinatório é um jogo sequencial com informação completa, isto é, jogos onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Em particular, "informação completa" significa que o elemento de sorte/azar/probabilidade não pode estar presente no jogo, nem pode haver "cartas escondidas" ou algo do gênero. Praticamente qualquer jogo de baralho (Buraco, Canastra, Pôquer, Truco, etc.) não é um jogo combinatório (o fato de você não saber as cartas dos outros jogadores, dentre outros fatores, exclui "informação completa"; aliás, o simples fato das cartas serem embaralhadas de maneira desconhecida já faz com que o jogo não seja combinatório). Par ou Ímpar, Dois ou Um (Zerinho ou Um), também não são jogos combinatórios porque os jogadores jogam simultaneamente. Esportes como Futebol, Vôlei, etc., apresentam problemas como o fato de que os lances permitidos dependem da habilidade dos jogadores, e as regras dependem da interpretação de árbitros, por isso, também não são jogos combinatórios. (TEIXEIRA, 2013, p.5)

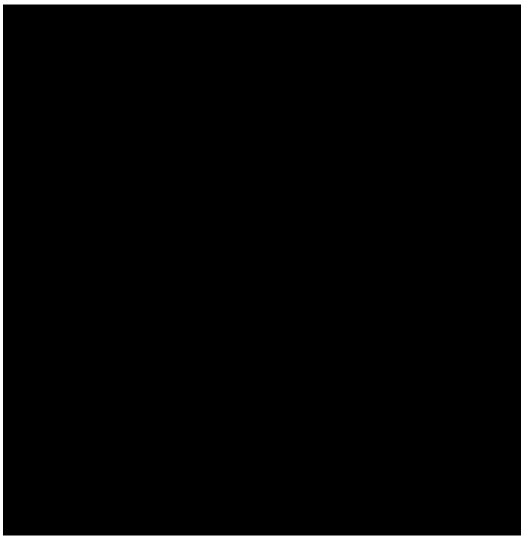
Além disso, Teixeira (2013) afirma que é comum também considerar combinatórios apenas os jogos em que o número de posições é finito, ou seja, pode haver infinitas possibilidades para os lances ou jogadas, mas o jogo em algum momento será encerrado, com um ganhador e um perdedor ou com um empate.

Grando (2000) apresenta um aspecto relevante que caracteriza, particularmente, os jogos combinatórios, segundo a teoria dos jogos: a existência de uma estratégia máxima, ou estratégia ótima, no jogo, ou seja, o interesse se volta para a investigação da estratégia que garante, sempre, a vitória a um jogador. Com a utilização do jogo do NIM, jogo combinatório proposto para o estudo de caso, e através das atividades propostas espera-se que os alunos consigam perceber uma estratégia ótima, além de associar e aprimorar os conteúdos matemáticos relativos ao jogo.

Vejamos agora exemplos de jogos combinatórios ou jogos não combinatórios, alguns deles conhecidos por muitos. Em alguns casos serão incluídas dicas, referências, ilustrações e fotos. As fotos foram realizadas com material cedido pelo Departamento de Matemática da UnB e as ilustrações criadas pelo autor deste trabalho.

2.3.1 Dama e Xadrez

Jogos que utilizam o tabuleiro quadriculado: Damas e Xadrez. Uma das versões do jogo de Damas utiliza o tabuleiro com 64 casas (8x8), alternadas entre claras e escuras, porém existem versões do jogo com 100 casas. Na versão ilustrada a seguir, temos a posição inicial do jogo, dispondo 12 peças cinzas e 12 peças brancas. O objetivo básico do jogo é capturar ou imobilizar a peças adversárias. As regras e demais peculiaridades podem ser consultadas em http://www.damasciencias.com.br/. O jogo de Xadrez é regulamentado mundialmente e possui campeonatos acirrados, a Confederação Brasileira de Xadrez, em seu site disponibiliza no endereço eletrônico http://www.cbx.org.br/files/downloads/Xadrez_lei_da_FIDE.pdf a tradução das Leis do Xadrez adotadas pela FIDE (*Fédération Internationale des Échcs*).

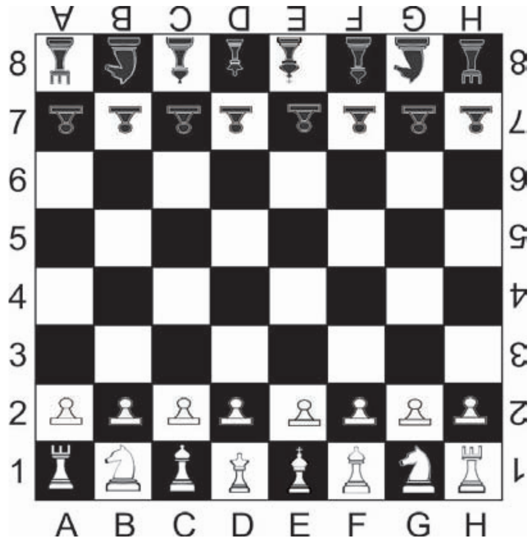


Jogo de Damas: poisção inicial

É possível encontrar diversas derivações do jogo de Damas, a seguir dois exemplos:

Perde-ganha: os jogadores, após escolherem suas peças seguem as regras básicas do jogo, porém o objetivo é ficar sem peças primeiro, ou seja, cada jogador deve movimentar suas peças de modo a oferecê-las ao adversário. Vence quem ficar sem peças primeiro.

Damuche: jogo sugerido e criado pelo professor Helder de Carvalho Matos, membro do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB) em memória das vítimas do naufrágio da embarcação de turismo Bateau Mouche IV em 1988 no Rio de Janeiro-RJ. O jogo segue as regras básicas do jogo de Damas tradicional, porém não há peças pré-definidas, neste caso os jogadores podem movimentar qualquer peça (brancas ou pretas), e cada jogador tem o objetivo de eliminar um dos tipos de peças, conforme definido no ínicio da partida. Vence quem cumprir primeiro o objetivo .



Jogo de Xadrez: poisção inicial

2.3.2 Semáforo e Jogo da Velha Gravitacional 2D

O Jogo do Semáforo, ou *Traffic* em inglês , e Jogo da Velha Gravitacional 2D são provenientes do tradicional Jogo da Velha. Na versão tradicional do jogo da velha quem inicia o jogo tem maiores chances de vencer, ou no mínimo empatar, a partida. Essas derivações propõem um desafio maior aos jogadores ao analisar as estratégias ótimas, pois envolvem intuição geométrica e constantes cálculos sobre as inúmeras possibilidades de lances e determinação de sequencias prováveis para obterem jogadas que levem a vitória.

Jogo do Semáforo, com origem em 1998, de autoria do matemático Alan Parr, é um jogo que exige maior concentração dos jogadores, sendo considerado mais estimulante, pois envolve maior exigência de raciocínio e discernimento, além de não ter a hipótese de empate. Este jogo, frequentemente, faz parte do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, organizado pela Associação Ludus, em Portugal. Não foi realizado um estudo aprofundado sobre a estratégia ótima, mas serão fornecidas dicas e referências na descrição do mesmo.

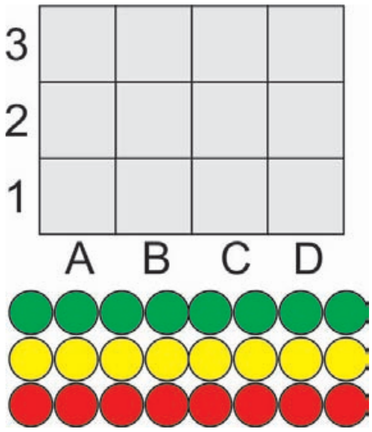
Jogo do Semáforo

Tabuleiro e material:

tabuleiro é formado por 12 casas (4 x 3);

8 peças verdes, 8 amarelas e 8 vermelhas;

As peças são compartilhadas pelos jogadores.



Objetivo:

Ser o primeiro a conseguir uma linha de três peças, consecutivas, da mesma cor na horizontal, vertical ou diagonal.

Regras:

O jogo realiza-se no seguinte tabuleiro, inicialmente vazio:

Em cada jogada, cada jogador realiza uma das seguintes ações:

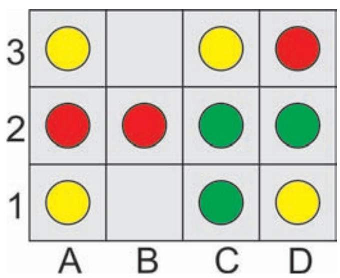
Colocar uma peça verde num quadrado vazio;

Substituir uma peça verde por uma peça amarela;

Substituir uma peça amarela por uma peça vermelha.

Uma ressalva, as peças vermelhas não podem ser substituídas. Isto significa que o jogo tem de terminar sempre: à medida que o tabuleiro fica com peças vermelhas, é inevitável que surja uma linha de três peças.

A seguir temos um exemplo de situação quase final do jogo:



Ao analisar o tabuleiro acima, verifica-se que só restam duas opções de jogada que não levam à derrota:

a) inserir uma peça verde em B1;

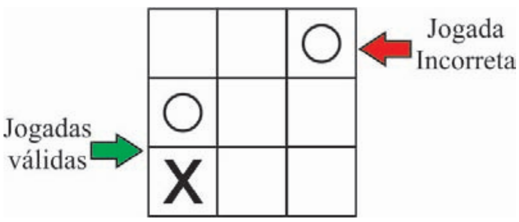
b) substituir a peça verde em D2 ou a peça amarela em D1.

Ao jogar numa dessas alternativas, o adversário joga na outra. Isto significa que o jogador seguinte irá perder.

Este jogo também pode ser facilmente adaptado e utilizado por pessoas com alguma dificuldade ou deficiência visual, sendo necessário apenas inserir relevos no tabuleiro, de modo que cada casa seja perceptível ao tato, e fazer a distinção das peças através de formas geométricas, por exemplo: peças verdes serão representadas por círculos, peças amarelas por triângulos e peças vermelhas por quadrados. Dicas e informações sobre o jogo podem ser encontradas no endereço eletrônico http://ludicum.org/jogos/abstr/semaforo.

Jogo da Velha Gravitacional 2D

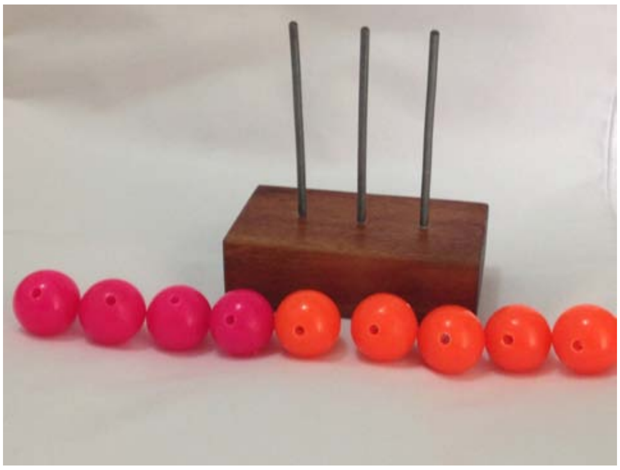
O Jogo da Velha Gravitacional, possui tabuleiro semelhante ao Jogo da Velha tradicional, porém está condicionado à gravidade, ou seja, só é possível inserir uma peça no segundo andar, após já ter inserido peças no térreo e no primeiro andar. O objetivo do jogo é alinhar três elementos idênticos na horizontal, vertical ou diagonal.



Este jogo é uma variação do jogo da velha, porém conforme a analise feita por MATOS, BASTOS e SEIMETZ (2015, p.23-26, no prelo), a grande diferença é que nesta versão há oportunidades para que ambos os jogadores vençam, sendo as probabilidades de vitória determinadas pelas estratégias e jogadas iniciais que geralmente envolvem simetria e princípio da contagem. Os referidos autores forneceram o protótipo para ser fotografado e ilustrar este trabalho. Para confeccionar o protótipo foram utilizados os seguintes materiais:

- uma base de madeira;
- três hastes de metal fixadas na base;

- cinco esferas perfuradas na cor laranjada;
- quatro esferas perfuradas na cor rosa.



A seguir temos a análise de uma estratégia ótima realizada por MATOS, BASTOS e SEIMETZ (2015, no prelo) do jogo da velha gravitacional 2D apresentado conforme o protótipo citado.

> Vamos indicar por X um jogador e por O outro jogador. E cada jogada será indicada por X_i e O_i, respectivamente. Considere que X inicie o jogo. É possível encontrar uma sequência X_i de jogadas para que X ganhe o jogo? Analisaremos todas as situações possíveis. A menos de simetria, temos duas possibilidades para o X iniciar o jogo.

1)

X		

2)

	X	

i) Descrição do Caso 1

Agora, temos as seguintes três possibilidades para o jogador O. Casos 1.1), 1.2) e 1.3), respectivamente :

1.1)

O		
X		

1.2)

X	O	

1.3)

X		O

Observamos em 1.1) e 1.2) que o jogador X ganha o jogo. Vejamos:

1.1)

X_3	O_2	X_4
O	X_2	O_3
X	X_1	O_1

1.2)

O_1	O_2	X_4
X_1	X_2	O_3
X	O	X_3

Analisaremos agora o Caso 1.3).

1.3)

X		O

Para este caso temos três possibilidades. Casos 1.3.a), 1.3.b) e 1.3.c), respectivamente):

1.3.a)

O_1		
X_1		
X		O

1.3.b)

X	X_1	O

1.3.c)

		X_1
X		O

Observamos em 1.3.a) e 1.3.b) que o jogador O, necessariamente, ganha o jogo. Para o caso 1.3.a) temos somente as seguintes possibilidades:

1.3.a)

O_1		
X_1	O_2	
X	X_2	O

1.3.a)

O_1		O_2
X_1	O_3	X_2
X	X_3	O

Para o caso 1.3.b) temos:

1.3.b)

O_3		X_2
X_3	O_2	O_1
X	X_1	O

Observamos em 1.3.c) que temos três possibilidades para O jogar. Casos 1.3.c.1), 1.3.c.2) e 1.3.c.3), respectivamente:

1.3.c.1)

O_1		X_1
X		O

1.3.c.2)

		X_1
X	O_1	O

1.3.c.3)

		O_1
		X_1
X		O

Observamos em 1.3.c.2) que o jogador X ganha o jogo.

?		
X_2	?	X_1
X	O_1	O

Nos casos 1.3.c.1) e 1.3.c.3) é fácil ver que o jogo dará velha ("empate").

ii) Descrição do Caso 2

O Caso 2 tem a seguinte configuração:

	X	

Para este caso, a menos de simetria, observamos que teremos somente duas possibilidades para O jogar. Casos 2.1) e 2.2), respectivamente:

2.1)

	X	O

2.2)

	O	
	X	

Para o caso 2.1) observamos que o jogador X ganha o jogo. Temos somente as seguintes possibilidades:

2.1)

X_3	O_1	X_4
O_2	X_1	O_3
X_2	X	O

2.1)

	O_1	X_3
	X_1	O_2
X_2	X	O

Para o caso 2.2) observamos, por simetria, que teremos somente duas possibilidades para X jogar.

2.2)

	X_1	
	O	
	X	

2.2)

	O	
X_1	X	

Em cada um dos casos acima temos, a menos de simetria, apenas uma única possibilidade para o O jogar. Casos 2.2.a) e 2.2.b), respectivamente:

2.2.a)

	X_1	
	O	
O_1	X	

2.2.b)

	O	
X_1	X	O_1

Em cada um dos casos 2.2.a) e 2.2.b) temos apenas uma possibilidade para X jogar e não perder o jogo, a saber.

2.2.a)

	X_1	
X_2	O	
O_1	X	

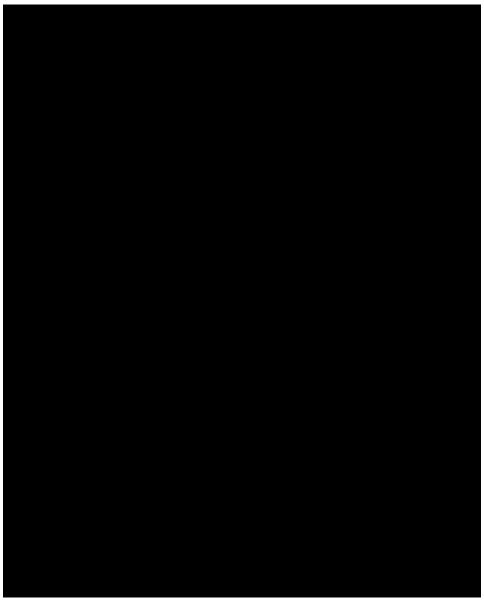
2.2.b)

	O	X_2
X_1	X	O_1

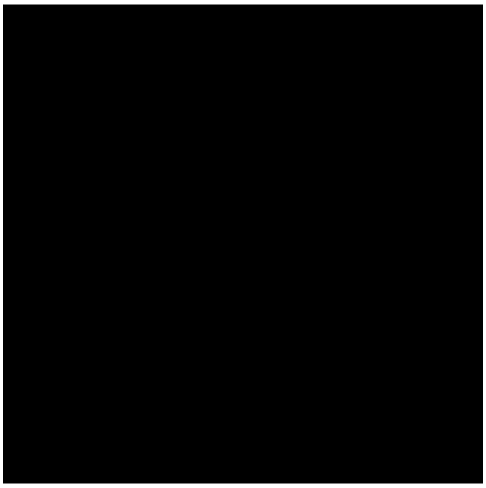
Nestes dois casos é fácil ver que o jogo vai dar velha.

Jogo dos Quadrinhos

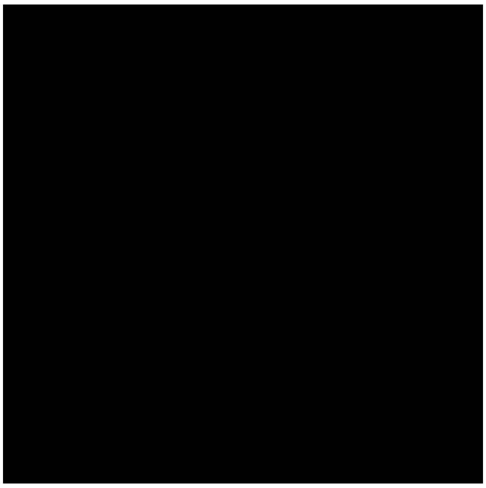
O Jogo dos Quadrinhos é um jogo histórico e retrataremos aqui a análise da estratégia ótima realizada na Revista do Professor de Matemática (RPM) n^o 05, em um artigo do Professor Helder de Carvalho Matos. O jogo é feito sobre um tabuleiro quadriculado demarcado com NxM pontos, conforme ilustra a seguir, com N = M = 5.



Cada jogador marca uma aresta unindo dois vértices consecutivos na mesma horizontal ou na mesma vertical, e toda vez que um dos jogadores, ao colocar uma aresta, completar um circuito fechado, ele tem direito e obrigação de marcar nova aresta. O autor destaca a importância de não se confundir "circuito fechado"com "quadrinho unitário" ou, simplesmente, "quadrinho". Embora todo quadrinho seja um circuito fechado, este pode ser mais geral que um simples quadrinho, conforme temos na figura abaixo.



O jogador que fechar o maior número de quadrinhos será o vencedor e o jogo termina quando o quadriculado original ficar reduzido apenas a quadrinhos. Para facilitar a contagem, os jogadores marcam os quadrinhos que vão fechando com a letra inicial do seu nome, ou com outro código previamente definido, conforme ilustrado abaixo.



Uma estratégia ótima, conforme Matos (1984).

> Segue-se a análise do jogo para situações ditas quase final, ou seja, quando no quadriculado não existirem quadrinhos com três arestas, mas um tal quadrinho forçosamente se formará com o acréscimo de qualquer nova aresta. A partir de situações quase final, são formados os corredores, que são seqüências de quadrinhos que serão fechados por jogadas sucessivas de um mesmo jogador. Quando um jogo se encontra em situação quase final ele consiste exclusivamente de corredores e qualquer aresta adicional precipita o fechamento de quadrinhos ao longo de um corredor. Vamos enumerar os corredores em ordem não-decrescente de seu tamanho. Por tamanho de um corredor entendemos o número de quadrinhos que ele produz com os fechamentos sucessivos.
>
> Supõe-se, como é natural, que cada jogador proceda da maneira a não entregar quadrinhos; e se for obrigado a entregar alguns, que entregue o menor número possível, sito é, que entregue o corredor que tenha menos quadrinhos a fechar. Esse procedimento será denominado perda mínima. Veremos, logo adiante, que tal procedimento não assegura vitória, ou mesmo empate; mas permite prever quem vai ganhar (ou empatar) o jogo.
>
> Observa-se agora que o jogador que fechar o último corredor (o de número r), fecha também os de números $r-2$, $r-4$, $\ldots$, e o outro jogador fechará os

corredores $r-1$, $r-3$, $r-5$, ... Há dois casos a considerar, conforme r seja par ou ímpar.

1^o caso: r par. O jogador que fechar o último corredor ganhará um número de quadrinhos igual a:

$S_1 = C_r + C_{r-2} + ... + C_2$

E o outro jogador ficará com

$S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + ... + C_1$ quadrinhos.

2^o caso: r ímpar. O jogador que fechar o último corredor ganhará:

$S_1 = C_r + C_{r-2} + ... + C_1$ quadrinhos, ao passo que o outro ficará com

$S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + ... + C_2$ quadrinhos.

Vamos colocar esses dois casos a lado, em colunas, o que nos permite comparar as somas S_1 e S_2.

r **é par**	r **é ímpar**
$C_r \geq C_{r-1}$	$C_r \geq C_{r-1}$
$C_{r-2} \geq C_{r-3}$	$C_{r-2} \geq C_{r-3}$
...	...
$C_2 \geq C_1$	$C_1 \geq 0$
Soma: $S_1 \geq S_2$	Soma: $S_1 > S_2$

De acordo com o autor, Matos (1984), isto permite constatar, facilmente, que o jogador que terminar o jogo sempre levará vantagem e certamente ganhará se r for ímpar, pois neste caso, S_1 é estritamente maior que S_2. Portanto, a estratégia para ganhar (ou, pelos menos, empatar) o jogo é, assegurar-se de fechar o último corredor. Caso o número de vértices for ímpar, então ganha ou empata o primeiro jogador (o que começa o jogo); ao passo que se o numero de vértices for par, então ganha ou empata o segundo jogador. Esse resultado foi obtido ao considerar o jogo já em situação quase final, quando então vale a seguinte fórmula de Euler generalizada [1] para grafos planos:

$$A + r = V + R - 2$$

[1]Essa fórmula é uma conseqência simples da fórmula de Euler para grafos planos, vide p. 143 do livro "Teoria e Modelos de Grafos" de Paulo O. Boaventura Netto, Editora Edgard Blucher, 1979

Onde A é o número de arestas, r o numero de corredores, V o número de vértices e R o número de regiões.

Prosseguindo com a análise do jogo temos:

> Para determinar quem ganha o último corredor e, portanto, ganha ou empata o jogo, o autor supõe que $R = 1$ quando o jogo chega a uma situação quase final. Isto significa que no quadriculado não há circuitos fechados. Então, a fórmula de Euler fornece:
>
> $$A \; + \; r \; = \; V \; - \; 1$$
>
> Examina-se duas hipóteses, conforme V seja ímpar ou par e cada uma delas comporta dois casos.
>
> 1^a hipótese: V é impar. Então $A + r$ é par, daí os dois casos seguintes:
>
> *Caso 1a*: A e r ambos pares. Disto decorre que foi o segundo jogador quem colocou a última aresta (pois A é par), levando o jogo a situação quase final. Portanto, é o primeiro jogador que entregará o primeiro corredor ao segundo; e como r é par será primeiro quem fechará o último corredor, ganhando ou, pelo menos, empatando o jogo.
>
> *Caso 1b*: A e r ambos ímpares. Então, foi o primeiro jogador quem colocou a última aresta (pois A é impar), levando o jogo a situação quase final. Em conseqüência, o segundo jogador entregará o primeiro corredor ao primeiro jogador; e como r é impar, o primeiro jogador fechará o último corredor, ganhando o jogo, pois neste caso não há empate.
>
> 2^a hipótese: V é par. O raciocínio aqui é inteiramente análogo ao da 1^a hipótese, com dois casos a considerar. A única diferença é que agora quem ganha ou empata o jogo é o segundo jogador.
>
> Falta examinar o caso em que $R > 1$. Ora, quando o jogo começa, $R = 1$, pois só temos uma região, que é o plano todo. E, se R permanecer igual a 1 até a situação quase final, um dos jogadores é o favorecido; como acabamos de ver, trata-se do primeiro se V for ímpar e do segundo se V for par. Se um dos jogadores decide fechar um circuito, ele altera a paridade de $V + R - 2$, na situação quase final, portanto altera a paridade da soma $A + r$ na fórmula de Euler e, repetindo os argumentos já usados, o anteriormente favorecido passa a ser desfavorecido. Mas lembremos que pelas regras do jogo, o próprio jogador que fechou um circuito

é obrigado a colocar uma nova aresta, o que novamente altera a posição dos jogadores, restabelecendo, as previsões originais. Isto completa a demonstração do teorema em todos os casos.

Jogos não combinatórios

São jogos não combinatórios os que envolvem a sorte, o acaso, ou que um jogador não pode presumir a jogada do outro jogador. Alguns exemplos: Dominó, Pôquer, 21 e jogos de cartas em geral, entre outros.

CAPÍTULO 3

JOGO DO NIM

3.1 Jogo do NIM (1^a Versão)

A Matemática Discreta e a análise dos jogos combinatórios, áreas recentes na história da matemática trazem importantes destaques sobre o Jogo do NIM:

> [...] o interesse dos matemáticos por esse jogo se relaciona ao fato de que o Nim seja caracterizado como um jogo de estratégia vinculado à teoria dos jogos matemáticos, campo de investigação da Matemática Discreta. Destaca-se, ainda, que a teoria dos jogos surge como um crescente ramo da Matemática Moderna, que tem sido desenvolvida, principalmente, nos últimos 50 anos e é aplicada a situações que envolvem competição, confronto entre adversários, decorrendo daí o interesse pelos jogos estratégicos. (GRANDO, 2000, p.187)

Optou-se por utilizar o Jogo do NIM neste trabalho, em princípio, devido ao fato de ser um jogo de estratégia, de possuir regras simples e diretas, ter aplicação fácil em ambientes com carência de recursos tecnológicos ou financeiros; vantagem em se trabalhar com material concreto e caso não seja possível a utilização dos palitos a organização para substituí-los é realizada facilmente, por lápis e papel, ou algum outro recurso, levando-se em consideração o local de aplicação do estudo de caso, uma escola do sistema socioeducativo.

> Os primeiros trabalhos que se tem registro sobre o jogo do Nim segundo Gardner (1961), são atribuídos ao matemático Charles L. Bouton. Por sua vez, mesmo não se sabendo com certeza de onde se origina o nome Nim, em inglês arcaico, significa apanhar. Além disso, NIM invertido (*WIN*), traduzindo do inglês, significa vencer. Porém, além das raízes inglesas, também existe uma outra suposição afirmando que essa palavra pode ser de origem chinesa.(RODRIGUES, 2004, p.3)

Utilizou-se, aqui, a versão original do jogo, ou seja, a sua forma mais simplificada, em termos de regras e de estratégia a ser definida, neste trabalho será simplesmente denominada 1^a versão. A seguir temos as regras do jogo, desta que é considerada a versão inicial por diversos autores:

1. Sobre o tabuleiro dispõe-se uma fila com um número qualquer de palitos;
2. os dois jogadores jogam alternadamente;
3. cada jogador retira, na sua vez, um determinado número de palitos do tabuleiro;
4. deve-se retirar pelo menos um palito a cada jogada, e a quantidade de palitos a ser retirada deve ter um limite máximo, previamente fixado;
5. perde a partida quem retirar o último palito.

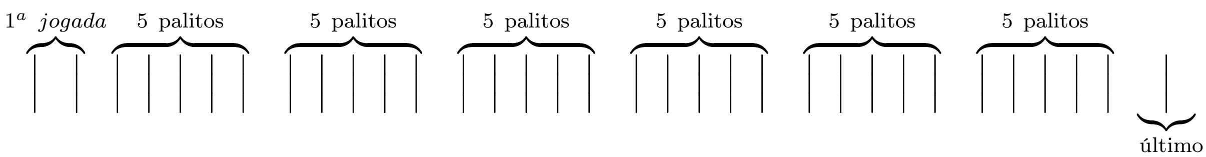
Com o intuito de conhecer melhor o jogo, analisaremos a seguir um exemplo e uma técnica para obter uma estratégia ótima:

Dada quantidade de palitos, N = 33, dispostos sobre o tabuleiro e n = 4 a quantidade máxima de palitos a ser retirada por cada participante. O jogo terá o seguinte formato:

$$| \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ |$$

O primeiro jogador, desde o seu primeiro lance, deve estar atento à escolha de uma estratégia ótima, com intuito de vencer a partida, ou seja, deixar um palito 1 para que o segundo jogador o retire na última jogada. É comum, conforme cita Fomin et al (2012), a utilização da estratégia "trás-para-frente", para resolver situações problemas como esta. Logo, o primeiro jogador pode traçar uma estratégia de forma que em sua penúltima jogada deixe seis palitos para o segundo jogador, pois esse só poderá retirar 4, então na jogada seguinte o primeiro jogador retira a quantidade restante necessária para deixar 1 palito para o segundo jogador em sua última jogada. A situação-problema resume-se em: é possível traçar uma estratégia, no início do jogo, de tal forma que restem 6 palitos na penúltima jogada do primeiro jogador?

A resposta é sim, e a análise de "trás-pra-frente" da situação-problema proposta, deixar 6 palitos na penúltima jogada do primeiro jogador, inicia-se ao agrupá-los em um grupo com 5 palitos e outro com 1 palito. Esse grupo de 5 palitos, ilustra bem a situação do jogo, pois cada jogador pode retirar no máximo 4 palitos e pensar em deixar 1 palito para o adversário. Surge a demanda por uma análise de agrupar os palitos em grupos de 5 em 5. Em nosso exemplo, poderíamos formar os grupos de palitos de várias formas. Porém, o jogador que inicia o jogo deve pensar, ou mentalizar em sua estratégia ótima, o tabuleiro com a seguinte configuração:



Com base na configuração ilustrada acima, o primeiro jogador ao iniciar o jogo, aplicando sua estratégia de ótima, deve retirar 2 palitos na primeira jogada e nas jogadas seguintes retirar a quantidade de palitos suficientes para que se elimine cada grupo de cinco palitos por rodada, de tal forma a deixar reservado um palito para o segundo jogador retirar em sua última jogada. Portanto, se o segundo jogador retirar 1 palito o primeiro deve retirar 4; se o segundo retirar 2 o primeiro deve retirar 3; ou seja o primeiro jogador deve retirar a quantidade que falta para completar$(n + 1)$ palitos.

Ao analisar a estratégia proposta acima, organizado os palitos em q grupos de $(n + 1)$ palitos e um grupo menor, percebe-se que o jogo pode ser analisado segundo o estudo da divisão euclidiana e análise dos restos.

Para o estudo de estratégias ótimas desse jogo utilizaremos algumas adaptações ao Teorema 1.1, Divisão Euclidiana demonstrado na página 15, como segue:

$$N = (n + 1) \cdot q + r$$

e, consequentemente,

$$N - r = (n + 1) \cdot q,$$

onde q é um inteiro positivo e $0 \leqslant r < |q|$.

Analisando esse exemplo, agora sob o enfoque do Teorema de Euclides, temos: a partir da situação problema $33 = 5 \cdot 6 + 3$. Após o primeiro jogador retirar dois palitos a configuração do jogo fica $31 = 5 \cdot 6 + 1$. Para que o primeiro jogador mantenha-se no controle do jogo e obtenha a vitória, este deverá contrapor as retiradas do segundo jogador, a fim de manter o resto um, quando efetuar-se a divisão do número de palitos sobre o tabuleiro por $(n + 1)$, neste caso por cinco.

Com a avaliação do exemplo acima e em busca dos conceitos matemáticos relacionados para garantir que os jogadores obtenham uma estratégia ótima em busca da vitória, passaremos a análise do caso geral.

Definições preliminares, seja N um número natural qualquer, que definirá a quantidade de palitos que irão compor inicialmente o tabuleiro do jogo. Fixa-se a quantidade máxima n de palitos que cada jogador irá retirar em cada jogada, tal que $n \geq 2$. A partir de agora admite-se que os jogadores possuam domínio sobre as regras e estratégias vencedoras do jogo, dominam também a divisão euclidiana, ou seja não cometam eles erros que os levem a derrota. Teremos, assim, a partir do Teorema Euclidiano da Divisão três possíveis desdobramentos para a análise dos restos para essa versão do Jogo do NIM:

Caso geral: sendo N o número inicial de palitos sobre o tabuleiro, n a quantidade máxima de palitos que cada jogador pode retirar, q o quociente na divisão euclidiana e r o resto da divisão, quando existir. Temos:

$N = (n+1) \cdot q + r$ e, consequentemente, $N - r = (n+1) \cdot q$, onde q é um inteiro positivo e $0 \leqslant r < |q|$.

Com o intuito de obter uma estratégia ótima no Jogo do NIM, e definir quem irá vencer a partida, primeiro ou segundo jogador, até mesmo antes dela começar. Será realizado o estudo do resto na divisão euclidiana de N por $(n+1)$, subdivido em dois casos particulares:

i) Quando $r \neq 1$

ii) Quando $r = 1$

Demonstração. A demonstração utilizará os conceitos relacionados ao Teorema da Divisão Euclidiana.

i) Para o caso em que $r \neq 1$ comprova-se, a seguir, que ao utilizar os conceitos matemáticos para traçar uma estratégia ótima o primeiro jogador ganhará, sempre.

Inicia-se a demonstração realizando a divisão N de por $(n+1)$ obtendo assim:

$$\mathrm{I)}\ \mathrm{N} = (\mathrm{n}+1)\,.\mathrm{q} + \mathrm{r} = (\mathrm{n}+1)\,.\ \mathrm{q} + 1 + \ (\mathrm{r}-1)$$

O primeiro jogador deve iniciar fazendo uma retirada de forma a deixar uma quantidade S de palitos sobre o tabuleiro que o leve a vitória, ou seja de forma que ele fique em uma posição segura.

Como $r > 1$, obtemos S através da análise do resto de tal forma que

$$\mathrm{II)}\ \mathrm{S} = \mathrm{N} - (\mathrm{r}-1) = \mathrm{N} + 1 - \mathrm{r}$$

Substituindo os valores encontrado em (*) na equação (**)

$$\mathrm{S} = (\mathrm{n}+1)\,.\mathrm{q} + 1$$

Em cada retirada $\boldsymbol{s}$ do segundo jogador, o primeiro jogador deverá completar:

$(n+1) - \boldsymbol{s}$, para retornar a uma posição segura e assim vencer o jogo.

Se $r = 0$, a posição segura S é do primeiro jogador. De fato, basta o primeiro jogador retirar n palitos de um dos grupos de $(n+1)$ palitos, restando $q-1$ grupos de $(n+1)$ palitos mais 1 palito. Percebe-se que após a jogada inicial do primeiro jogador, o segundo jogador depara-se diante da situação descrita no caso em que o resto $r = 1$.

ii) Para o caso em que o $r = 1$, a estratégia ótima é favorável ao segundo jogador. Pois quandova divisão de N por $(n+1)$ deixar resto 1, o jogador que iniciar a partida não estará em uma posição segura, que favoreça a vencer o jogo.

Para $r = 1$ temos:

$$III)S = N - (r-1) = N + 1 - r = N$$

Ou seja, a posição segura é o número inicial de palitos, assim o segundo jogador irá controlar a partida, analisando a nova quantidade palitos sobre o tabuleiro após o primeiro jogador iniciar a partida. Pois a partir de então a quantidade de palitos sobre o tabuleiro deixará resto diferente de um, recaindo sobre o caso do item i). Portanto o segundo jogador deve realizar a devida retirada de palitos em sua primeira jogada e contrapor as demais jogadas do primeiro jogador, sempre completando grupos de $(n+1)$ palitos.

$\square$

Na seção adiante, em atividades propostas, consultar página 62 exercício 2, é sugerido realizar-se uma alteração na regra do jogo onde quem retirar o último palito será o ganhador.

3.2 Jogo do Nim (2^a Versão)

A partir de agora será realizado o estudo da segunda versão do Jogo do NIM, que desde o início do século XX é objeto de estudo em importantes centros acadêmicos, inclusive este jogo teve sua estratégia ótima demonstrada, em 1901, por meio de uma publicação de um artigo científico da revista Annals of Mathematics, de autoria de Charles. L. Bouton. Neste artigo ele demonstra que há uma estratégia que, quando adotada por um dos participantes, fará com que ele sempre seja o vencedor, conhecida como estratégia ótima.

Regras da 2^a versão do Jogo do NIM:

1. Nesta versão do jogo dispõe-se sobre a mesa, ou tabuleiro, um número N de palitos separados em n grupos, denominados $n_1, n_2, n_3 \ldots n_m$, de tal forma que $n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_m = N$;

2. os dois jogadores jogam alternadamente;

3. cada jogador, na sua vez, retira um determinado número de palitos de apenas um dos n grupos sobre o tabuleiro;

4. deve-se retirar pelo menos um palito a cada jogada, e a quantidade de palitos a ser retirada não tem um limite máximo, ou seja, é permitido que um jogador retire todos os palitos de uma fila;

5. vence a partida aquele jogador que retirar o último palito.

Assim como na primeira versão, começaremos a análise do jogo através de exemplos e em seguida uma abordagem para casos gerais. Vejamos um exemplo do jogo com uma ou duas pilhas, em seguida de forma generalizada. E mais adiante como estruturar os conceitos matemáticos para estratégia ótima.

Exemplo 3.2.1. *Uma fila com 11 palitos.*

$$Fila\ 1: \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \quad (11\ palitos)$$

Como não há limite para quantidade de palitos a ser retirada, o primeiro jogador retira os 11 palitos e vence o jogo.

Exemplo 3.2.2. *Duas filas com mesma quantidade de palitos.*

$$Fila\ 1: \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \quad (10\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \quad (10\ \ palitos)$$

Neste caso, o segundo jogador estará em posição segura, pois basta retirar a mesma quantidade de palitos na fila em que o primeiro jogador não alterou. Se o primeiro jogador retirar três palitos da Fila 1, o segundo jogador deverá retirar três palitos na Fila 2, e repetir esta tática nas demais jogadas, no momento que o primeiro jogador retirar o último ou últimos palitos de certa fila, o segundo jogador poderá fazer o mesmo na outra fila. Esse método é conhecido como estratégia do espelho.

Essa estratégia pode ser utilizada constantemente, ou seja, deixar o tabuleiro com duas filas, com mesmo número de palitos para o adversário. Ou seja é o caso do nosso terceiro exemplo:

Exemplo 3.2.3. *Uma fila com 9 palitos e outra com 6 palitos.*

$$Fila\ 1: \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \quad (9\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \ \Big| \quad (6\ \ palitos)$$

Ao iniciar o jogo, o primeiro jogador deve retirar três palitos da Fila 2, deixando as filas com a mesma quantidade de palitos. De agora em diante o segundo jogador enfrentará uma posição desfavorável, que decisivamente o levará a derrota, conforme exposto no Exemplo 3.2.

Até o momento foram apresentadas ocasiões simples, a grande dificuldade a ser enfrentada, a partir de agora, é estabelecer relações entre este jogo de palitos e a estratégia ótima para situações com N palitos, dispostos em n_m filas, tal que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m = N$, com $n_i \neq n_j$. Com a publicação do artigo de Bouton (1901), propô-se conexões entre uma estratégia ótima para este jogo e o sistema de numeração binário. A utilização do sistema de numeração binário, como ferramenta para buscar a vitória no Jogo do NIM (2^a Versão), o qual já realizamos uma breve abordagem no capítulo de fundamentação teórica, terá mais alguns exemplos na seção com Atividades Propostas, será ilustrada a partir da análise do artigo publicado por Raguenet e Barrêdo (1986), na RPM - Revista do Professor de Matemática Vol. 06, com algumas adaptações:

A primeira adaptação ao exemplo é alteração em sua regra, pois aqui utilizaremos a opção em que o jogador que retirar o(s) último(s) palito(s) vence o jogo. Fato este não alterar significativamente a estratégia para vencer o jogo, conforme veremos adiante.

Exemplo 3.2.4. *Tabuleiro composto por 3 filas:*

$$Fila\ 1: \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\quad (9\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\quad (6\ \ palitos)$$

$$Fila\ 3: \Big|\ \Big|\ \Big|\ \Big|\quad (4\ \ palitos)$$

- Primeiramente, converte-se as quantidades de palitos em cada fila por sua representação no sistema binário:

Fila 1: 1 0 0 1 (9 em binário)

Fila 2: 1 1 0 (6 em binário)

Fila 3: 1 0 0 (4 em binário)

- Realizando-se a contagem de dígitos iguais a 1, coluna por coluna, indicando com símbolos P ou I a paridade da quantidade desses dígitos. Caso a quantidade de dígitos 1 seja de paridade par insere-se pela letra P abaixo da coluna, caso a quantidade de dígitos iguais a 1 tenha paridade ímpar insere-se então a letra I.

Neste exemplo temos a paridade do somatório das Fila 1 + Fila 2 + Fila 3:

Fila 1:	*1*	*0*	*0*	*1*
Fila 2:	*0*	*1*	*1*	*0*
Fila 3:	*0*	*1*	*0*	*0*
Somatório:	*I*	*P*	*I*	*I*

Chamaremos de combinação segura, posição segura ou favorável a vitória, quando um jogador deixar sobre o tabuleiro para seu adversário um resultado com a combinação da soma das colunas apenas quantidades pares (P) de dígitos iguais a 1.

Neste exemplo, para obter uma estratégia ótima, basta o primeiro jogador transformar o resultado (I P I I) numa combinação segura. Observa-se que, como é proibido adicionar palitos, teremos, então que retirar, por exemplo, palitos da Fila 1.

Para tal, na Fila 1 devemos ter o número binário "0 0 1 0", que corresponde a 2 palitos. Para isso, basta retirar 7 palitos da Fila 1.

Fila 1:	*0*	*0*	*1*	*0*
Fila 2:	*0*	*1*	*1*	*0*
Fila 3:	*0*	*1*	*0*	*0*
Somatório:	*P*	*P*	*P*	*P*

O segundo jogador não irá conseguir alterar a combinação segura repassada pelo primeiro jogador, com todos elementos par na soma dos binários (P P . . . P). De tal forma, que para manter a estratégia ótima o primeiro jogador, ao receber uma combinação desfavorável à vitória, pois contém algum elemento da soma dos binários com paridade ímpar, deve devolver ao adversário uma combinaç ão segura.

A seguir temos o caso geral e a demonstração da generalização, baseada nos conceitos demonstrados por Bouton (1901) e inferências a partir do artigo de Raguenet e Barrêdo (1986):

Definição 3.2.5. *Uma posição é dita vencedora ou segura se, e somente se, a soma dos algarismos iguais a 1 em qualquer coluna for par, caso contrário é uma posição desfavorável ou perdedora.*

Demonstração. Para demonstrar esta afirmação utilizaremos em três etapas:

a) O jogo encerra-se com uma soma par.

b) Qualquer jogada a partir de uma posição segura, ou seja com soma par, leva a uma posição desfavorável, com soma ímpar.

c) De qualquer pósição desfavorável, com soma ímpar, é possível alterar para alguma posição segura, com soma par, em uma jogada.

Utilizando as propriedades da existência e unicidade do teorema da representação dos números no sistema binário, temos:

a) O jogo sempre acaba quando não há palitos sobre o tabuleiro. Ou seja a soma dos algarismos sempre será zero, que é par.

b) Devido a unicidade dos números escritos na forma binária e ao fato de que após cada jogada a quantidade de palitos em uma única fila será alterada, teremos na representação binária da fila a ser alterada, inevitavelmente, a troca de algum dígito “0"por “1"ou vice-versa, fato este que irá mudar a paridade coluna.

c) Existindo uma ou mais colunas com soma ímpar, o jogador deverá observar qual fila contém o dígito “1"e que pode ser alterado para “0", de forma que alterando a quantidade de palitos em uma única fila possa alterar a paridade das colunas necessárias para chegar a uma posição segura.

□

Após observação do exemplo e da demonstração percebe-se que independente da regra combinada no início da partida, retirar o último palito implicar a vitória ou caso seja combinado que essa situação possa levar a derrota, em ambos os casos a estratégia vencedora, pode ser obtida através da transformação dos números em sistema decimal para o sistema binário, pois em ambos os casos o jogo é encerrado quando a soma dos dígitos ou palitos é zero. E por fim, o jogador que manter uma combinação segura na soma dos dígitos 1 ganha o jogo. Portanto, se na disposição inicial do jogo a soma binária dos palitos na mesa formar uma combinação segura, a primeira pessoa a jogar vai desmanchar esta combinação segura, o segundo jogador terá oportunidade recompor a combinação segura, com essa estratégia ótima vencer o jogo. Para análise de exemplos onde altera-se a regra do jogo, para a situação em que o jogador que retirar o último palito perde a partida, basta consultar o artigo original da Revista do Professor de Matemática - Vol. 06. Em seção seguinte serão propostas atividades com esta versão do Jogo do NIM com o intuito de realizar a análise da estratégia ótima e a utilização do sistema binário.

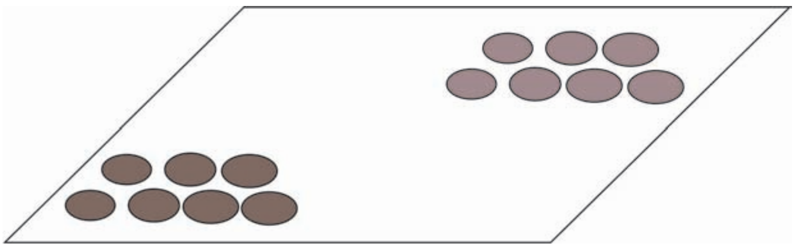
Para facilitar o domínio do jogo, e não se prender à utilização exaustiva dos números binários, recomenda-se a prática e domínio inicial do jogo com quantidades menores de palitos, por exemplo filas com (1, 2 e 3), (3, 4 e 5)... e assim os jogadores podem iniciar uma estratégia ótima a partir de análises pré-existentes de somas seguras (favoráveis a vitória) ou desfavoráveis. Podendo também após o domínio de uma estratégia ótima com poucos palitos, acrescentar mais filas e mentalizar os blocos (conjunto de filas) com mesma paridade, e assim contrapor as jogadas do adversários até que se tenha em mãos a vantagem na partida.

3.3 Outros jogos de natureza determinística

Dizemos que um jogo é determinístico se é possível definir o vencedor antes mesmo que se inicie a partida. Tais jogos tem sua relevância em virtude da ludicidade envolvida na descoberta das estratégias ótimas e na aplicação de conhecimento matemático para tal. Como vimos nesse capítulo o jogo do NIM, em ambas verões, é de natureza determinístico e suas análises envolvem conceitos matemáticos tais como sistema de numeração, aritmética básica, números binários, incluindo análise da paridade dos números.

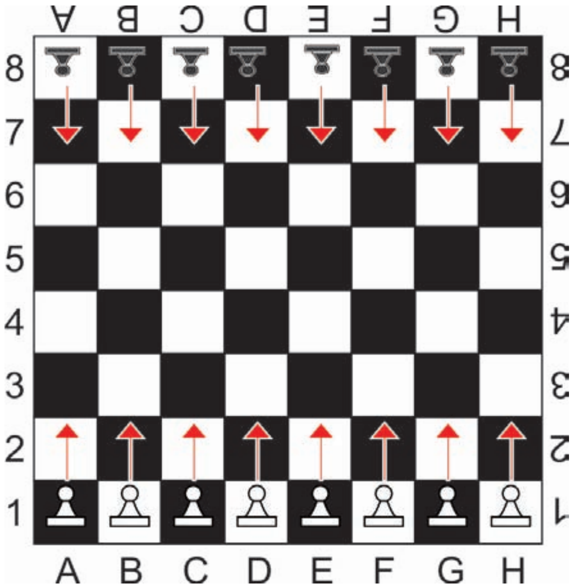
Agora, apresentamos alguns jogos retirados com referência no livro Círculos Matemáticos: a experiência russa. E, adicionalmente, apresentamos algumas dicas e estratégias possíveis .

JOGO 3.3.1. *Temos duas pilhas, cada uma delas com 7 pedras, conforme ilustração a seguir. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.*

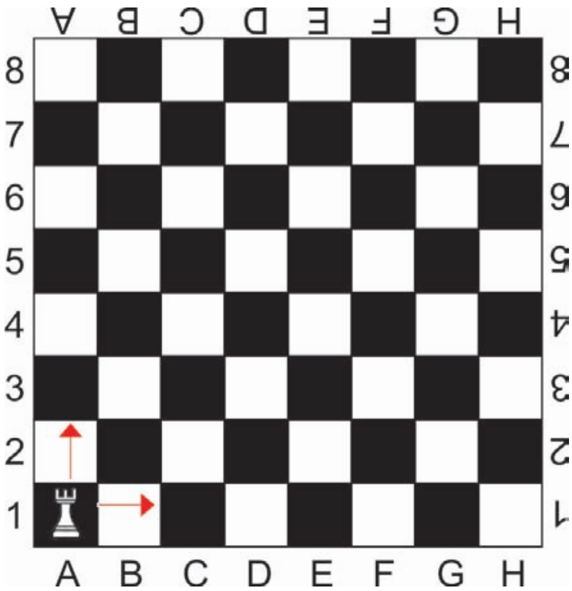


JOGO 3.3.2. *Temos dois montes de pedras. Um tem 30 pedras e o outro 20. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Vence o jogador que remover a última pedra.*

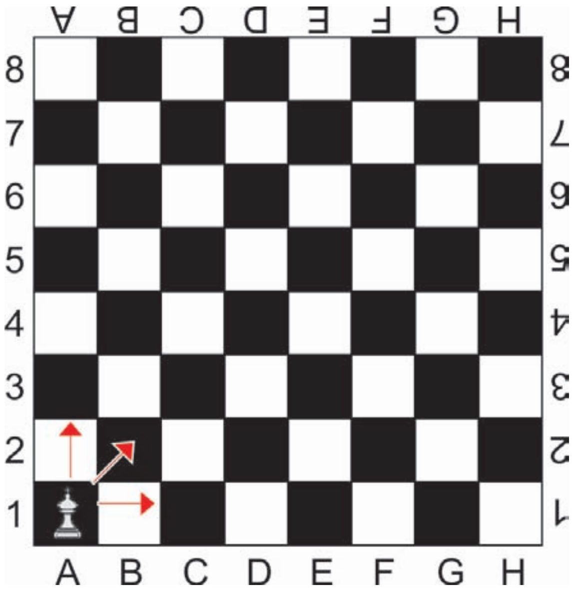
Jogo 3.3.3. *Oito peões brancos estão na primeira fila de um tabuleiro de xadrez e oito peões pretos estão na oitava fila. Dois jogadores se revezam movendo verticalmente um de seus peões na direção da outra extremidade do tabuleiro por um número arbitrário de casas. Não é permitido sobre um peão de cor oposta. Perde o jogador que não pode jogar.*



Jogo 3.3.4. *Em um tabuleiro de xadrez, um torre está na posição A1. Dois jogadores se revezam movendo a torre quantos quadrados quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente para cima. Vence o jogador que colocar a torre na posição H8.*



Jogo 3.3.5. *Coloca-se um Rei na posição A1 de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo-o para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima e para a direita, uma casa por vez. Vence o jogador que colocar o Rei na posição H8.*



Soluções e dicas

Os jogos propostos nos Exemplos 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3: Podem ser resolvidos utilizando a estratégia ótima do Jogo do NIM - 2^a Versão, para o caso em que há duas filas.

Jogo 3.3.4: Conforme orientações que podem ser obtida em Formin (2012), De acordo com a paridade da casa inicial e da casa final, o segundo jogador vence a partida.Após a primeira jogada, o segundo jogador deve, sempre, levar a torres na diagonal principal do tabuleiro: B2, C3, D4, E5, F6, G7, H8.

Jogo 3.3.5: Assim como orientações do autor citado anteriormente, o primeiro jogador vence se observar que a posição final pode ser transformada de H8, para (8,8), ou seja uma coordenada formada por dois números pares. O jogo inicia-se, partindo, de A1, coordenada (1,1), se o primeiro jogador posicionar o rei em B2, coordenada (2,2), e em seguida contrapor as jogadas do segundo jogador, que só poderá mover a peça para uma posição onde ao menos uma das ordenadas é ímpar.

3.3.1 Atividades propostas, dicas e soluções

Esta seção tem o intuito de tornar a leitura do texto principal mais harmônica e direta, destacando, a partir dos conceitos abordados no texto principal, algumas atividades, dicas e soluções sobre o jogo do NIM e suas variações.

Atividades: Jogo do NIM - 1^a Versão:

1) Seja N a quantidade de palitos e n a quantidade de palitos máxima a ser retirada em uma disputa do jogo do NIM, em que o jogador que retirar o último palito é o perdedor, indique em cada situação qual jogador terá estratégia ótima:

a) N = 27 e n=4

b) N = 25 e n=3

c) N = 30 e n=5

d) N = 41 e n=3

e) N = 40 e n=4

2) Para o Jogo do NIM, 1^a versão, caso altere-se a regra do quesito encerramento do jogo, onde nesse novo momento o jogador que retirar o último palito será o vencedor, qual deve ser a estratégia ótima?

Atividades: Jogo do NIM - 2^a Versão

3) Seja N a quantidade de palitos e n a quantidade de palitos máxima a ser retirada em uma disputa do jogo do NIM, em que o jogador que retirar o último palito é o vencedor, indique em cada situação qual jogador terá estratégia ótima:

a) $N = 25$ e $n = 3$

b) $N = 30$ e $n = 4$

c) $N = 45$ e $n = 5$

d) $N = 41$ e $n = 3$

e) $N = 40$ e $n = 4$

4) Para cada situação inicial do jogo do NIM diga se o jogador 1 ou 2 encontra-se em posição segura para iniciar o jogo:

a) Jogo 1

$$Fila\ 1: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (9\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (6\ \ palitos)$$

b) Jogo 2

$$Fila\ 1: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (12\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (6\ \ palitos)$$

$$Fila\ 3: |\ |\ |\ |\ | \quad (5\ \ palitos)$$

c) Jogo 3

$$Fila\ 1: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (12\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (11\ \ palitos)$$

$$Fila\ 3: |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (7\ \ palitos)$$

d) Jogo 4

$$Fila\ 1: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (9\ \ palitos)$$

$$Fila\ 2: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (13\ \ palitos)$$

$$Fila\ 3: |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ | \quad (15\ \ palitos)$$

Soluções e dicas

1)

a) Após realizar a divisão euclidiana obtém-se $27 = 5 \cdot 5 + 2$. Incide no caso geral com resto maior do que um. Verifica-se que o jogador 1 conseguirá a vitória ao adotar estratégia ótima de, por exemplo, em sua primeira jogada retirar um palito e contrapor as jogadas do segundo jogador, retirando a quantidade suficiente para atingir 5 palitos, mantendo assim o resto igual a 1.

b) Após realizar a divisão euclidiana obtém-se $25 = 6 \cdot 4 + 1$, que incide no caso geral onde o resto é igual a um. Observa-se nessa situação que o jogador 1 não conseguirá obter a estratégia ótima e o jogador 2 terá a chance de vitória, basta analisar a quantidade de palitos que ficarão sobre o tabuleiro após a jogda do primeiro jogador e realizar análise do resto na divisão por 4.

c) Ao realizar a divisão euclidiana obtem-se o resto igual a zero, $30 = 5 \cdot 6 + 0$. Incide-se no caso geral onde o resto é diferente de 1. Verifica-se que o jogador 1 conseguirá a estratégia ótima retirando em sua primeira jogada a quantidade máxima de palitos, 5, e em seguinta contrapor as jogadas do segundo jogador, de tal forma que a soma das retiradas do jogador 2 e jogador 1 seja igual a 6.

d) Esse exercício possui análise idêntica ao que foi exposto no item b), pois $41 = 10 \cdot 4 + 1$, ou seja $r = 1$

e) Esse exercício possui análise idêntica ao que foi exposto c), pois $40 = 10 \cdot +0$.

2)

Basta o leitor observar os q grupos formados por $(n+1)$ palitos, e o jogador que iniciar a partida deve retirar a quantidade de palitos coincidente com o resto da divisão de N por $(n+1)$, e nas jogadas seguintes ir contrapondo as retiradas do segundo jogador de forma que a soma dos palitos retirados seja $(n+1)$. Agora caso não exista resto para ser retirado pelo primeiro jogador, a situação fica favorável ao segundo jogador.

3)

a) Ao realizar a divisão euclidiana verifica-se que o resto é um, $25 = 6 \cdot 4 + 1$. Verifica-se que o jogador 1 conseguirá a estratégia ótima caso retire 1 palito em sua primeira jogada, e nas demais basta contrapor as jogadas do segundo jogador, de tal forma que a completar a soma igual 4 com os palitos retirados pelo segundo jogador.

b) Ao realizar a divisão euclidiana verifica-se que o resto é igual a zero, $30 = 6 \cdot 5 + 0$. Observa-se nessa situação que o jogador 1 não conseguirá obter a estratégia ótima e o jogador 2 terá a chance de vitória, basta analisar a quantidade de palitos que ficarão sobre o tabuleiro após a jogda do primeiro jogador e realizar análise do resto na divisão por 5.

c) Ao realizar a divisão euclidiana verifica-se que o resto é igual a três, $45 = 7 \cdot 6 + 3$, e o procedimento para que o Jogador 1 obtenha a vitória coincide com o exposto no item a)desta questão.

d) Ao realizar a divisão euclidiana verifica-se que o resto é igual a um, $41 = 10 \cdot 4 + 1$, e o procedimento para que o Jogador 1 obtenha a vitória coincide com o exposto no item a) desta questão.

e) Ao realizar a divisão euclidiana verifica-se que o resto é igual a zero, $40 = 8 \cdot 5 + 0$, e o procedimento para que o Jogador 2 obtenha a vitória coincide com o exposto no item b) desta questão.

4)

a) Faz-se a conversão das quantidades de palitos de cada fila para números binários e efetua-se a soma, com a análise da paridade: Para o obter a representação binária do número 9, que está no sistema decimal, utilizaremos o auxílio da tabela com potências de base 2, de onde obtém-se $9 = 8 + 1$.

Potências com base 2:	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$\mathbf{2^1 = 2}$	$\mathbf{2^0 = 1}$
Conexão:	|			|
1 ou 0	1	0	0	1

$$\text{Logo, } 9 = [1001]_2$$

Para o obter a representação binária do número 6, que está no sistema decimal, utilizaremos o auxílio da tabela com potências de base 2, de onde obtém-se

Potências com base 2:	**4**	**2**	**1**
Conexão:	|	|	|
1 ou 0	1	1	0

$$\text{Logo, } 6 = [110]_2$$

Efetua-se a soma das respectivas representações binárias:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & I & I & I & I \end{array}$$

O Jogador 1, que iniciará a partida, está em posição favorável a vitória, pois depara-se com uma soma não segura, com elementos de paridade ímpar, $(I\ I\ I\ I)$ sobre o tabuleiro e assim tem a possibilidade de deixar sobre o tabuleiro uma combinação segura, retirando palitos, e deixando a soma com dígitos de paridade par, adotando assim uma estratégia ótima. Neste exemplo a quantidade de palitos a ser retirada são três palitos na Fila 1, ficando esta com 6 palitos, $[110]_2$, levando o Jogador 1 à conquistar a estratégia ótima.

Poderia, também, utilizar a estratégia definida para os casos em que há apenas duas filas, ou seja, deixar as filas com o mesmo número de palitos e em seguida fazer o espelhamento das retiradas do Jogador 2, e neste caso nem utilizar-se-ia a soma de números binários.

b) Utiliza-se o procedimento anterior para conversão das quantidades de palitos de cada fila para os respectivos representantes no sistema binário:

Potências com base 2:	**8**	**4**	**2**	**1**
Conexão:	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1
$12 = 8 + 4 \rightarrow$	1	1	0	0
$6 = 4 + 2 \rightarrow$	0	1	1	0
$5 = 4 + 1 \rightarrow$	0	1	0	1

Efetua-se a soma das respectivas representações binárias:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & I & I & I & I \end{array}$$

Para obter uma estratégia vencedora, o Jogador 1, que está em posição segura para iniciar a partida, deve mudar o resultado ($I\ I\ I\ I$) para uma combinação segura. Deve, por exemplo, retirar nove palitos da fila 1. E a partir daí contrapor as retiradas do Jogador 1, de forma a manter uma combinação segura, ou seja passar para o adversário uma soma de números binários composta somente por quantidades pares dígitos 1, algo do tipo ($P\ P\ \ldots\ P$).

c) Utiliza-se o procedimento anterior para conversão das quantidades de palitos de cada fila para os respectivos representantes no sistema binário, porém agora será o Jogador 2 que irá conseguir obter a estratégia ótima:

Potências com base 2:	**8**	**4**	**2**	**1**
Conexão:	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1
$11 = 8 + 2 + 1 \rightarrow$	1	0	1	1
$12 = 8 + 4 \rightarrow$	1	1	0	0
$7 = 4 + 2 + 1 \rightarrow$	0	1	1	1

Efetua-se a soma das respectivas representações binárias:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & P & P & P & P \end{array}$$

O Jogador 1 não está em posição segura para iniciar a partida, pois conforme demonstrado anteriormente, não é possível, após sua retirada inicial, repassar para o adversário uma outra combinação segura. Pois partindo-se de uma posição já segura (P P P P), logo qualquer alteração realizada pelo Jogador 1 deixará sobre o tabuleiro uma posição desfavorável a sua vitória.

d) Utiliza-se o procedimento anterior para conversão das quantidades de palitos de cada fila para os respectivos representantes no sistema binário o Jogador 1 irá conseguir obter a estratégia ótima:

Potências com base 2:	**8**	**4**	**2**	**1**
Conexão:	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1
$9 = 8 + 2 \rightarrow$	1	0	0	1
$13 = 8 + 4 \rightarrow$	1	1	0	1
$15 = 4 + 2 + 1 \rightarrow$	1	1	1	1

Efetua-se a soma das respectivas representações binárias:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & I & P & I & I \end{array}$$

Para obter ua estratégia vencedora, o Jogador 1 está em posição segura para iniciar a partida, pois tem a oportunidade mudar o resultado da soma binária ($I\ P\ I\ I$) e deixar sobre o tabuleiro uma combinação segura, retirando palitos 7 palitos da fila 1, por exemplo, e assim deixando a soma com dígitos pares ($P\ P \ldots\ P$).

CAPÍTULO 4

ESTUDO DE CASO

4.1 Metodologia

O referencial teórico foi realizado com fundamentação em pesquisa bibliográfica, o estudo de caso foi planejado através dos pressupostos de uma pesquisa qualitativa, que segundo D'Ambrosio (2011) compreende-se por uma metodologia que tem como essência o foco sobre o indivíduo, considerando todo seu significado, complexidade, bem como sua inserção e interação com o meio. Afim de atingir o objetivo da pesquisa, foram realizadas análises de caráter interpretativo, com o intuito de verificar a assimilação e desenvolvimento de conhecimento a partir da utilização dos jogos propostos.

Durante o estudo de caso em sala de aula utilizou-se o método hipotético-dedutivo, que de acordo com Ramos (2009) apresenta o seguinte fluxo: "Problema; Conjecturas; Dedução de consequências observadas; Tentativa de falseamento; Corroboração". Ou seja, no geral serão utilizadas as estratégias empregadas na metodologia de resolução de problemas, pois após conhecimento e atividades com o jogo do NIM será solicitado aos alunos, que após explorarem o jogo, realizem suas conjecturas e possam deduzir e solucionar o problema de obter uma estratégia ótima do jogo. A atividade de sondagem do nível dos conhecimentos relativos aos conteúdos a serem trabalhados e o questionário avaliativo sobre as atividades encontram-se nos Apêndice A e B.

4.2 Sujeitos da Pesquisa

O desenvolvimento da atividade com o Jogo do NIM foi realizado com alunos da escola onde sou professor de Matemática desde o ano de 2015, porém poderia ser realizada em qualquer outra com público do Ensino Fundamental Anos Finais ou Ensino Médio. Trata-se do Núcleo de Ensino (NUEN) da Unidade de Internação Provisória de São Sebastião (UIPSS), vinculada ao Centro Educacional (CED) São Francisco, que pertence à Coordenação Regional de Ensino (CRE) de São Sebastião e esta subordinada a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), da cidade de Brasília-DF. Neste núcleo de ensino são atendidos adolescentes do sistema socioeducativo do Distrito Federal, especificamente do sexo masculino, em medida socioeducativa de internação provisória.

Antes de prosseguir com a descrição e especificidades da escola e dos sujeitos da pesquisas, faremos uma pausa para definição de alguns termos relativos à socioeducação, as vezes desconhecidos por muitos. A socioeducação tem como objetivo buscar reinserir esses adolescentes ao convívio social. Medidas socioeducativas são atos jurídicos determinados, por autoridade competente, ao adolescente autor de ato infrator, e tais medidas estão previstas no Estatuto da Criança e do Adolescentes (ECA), Lei 8069, de 13/07/1990). Acrescenta-se, ainda, a Lei 12.594, de 18/01/2012, que institui o Sistema Nacional de Atendimento Socioeducativo (Sinase), para regulamentar a execução das medidas socioeducativas destinadas a adolescente que pratique ato infracional.

De acordo com o ECA, em seus artigos 112 a 128, e também conforme as Diretrizes para Escolarização na Socioeducação do Distrito Federal (2014), as principais medidas socioeducativas são: advertência; obrigação de reparar o dano; prestação de serviços à comunidade; liberdade assistida; inserção em regime de semi-liberdade; internação em estabelecimento educacional. A medida considerada mais severa, a de internação em estabelecimento educacional, pode ser de dois tipos: provisória e estrita. Na internação provisória o adolescente permanece em restrição de liberdade por até 45 dias, aguardando decisão judicial. Já a internação estrita, é por um tempo determinado por decisão judicial, não podendo exceder três anos.

Com o intuito de compartilhar as especificidades do ambiente onde aconteceu o estudo de caso foi realizada uma pesquisa no Projeto Político Pedagógico de 2016 (PPP-2016) da escola, em busca de dados importantes sobre seu histórico, funcionamento e características, que inclusive traz em considerações sobre o NUEN/UIPSS.

O CED São Francisco, popularmente conhecido por "Chicão" iniciou suas atividades no ano letivo de 2008, com apoio dos Coordenadores Intermediários da Regional do Plano Piloto, sem a sua sede própria. A construção da sede própria foi inaugurada no segundo semestre de 2009 e conta com 20 salas de aula, biblioteca, espaço para laboratórios de física e química, anfiteatro, cantina, quadra poliesportiva coberta, entre outros em uma área de $3718m^2$, localizada na Rua 17 Lote 100, Área Especial no Bairro São Francisco, São Sebastião-DF.

O NUEN tem as atividades socioeducativas realizadas com a co-participação da Secretaria de Estado de Políticas para Crianças, Adolescentes e Juventude (SECRIANÇA) responsável pela administração da unidade e gestão sobre as equipes de atendimento sociopsicopedagógico, médico, segurança, limpeza, manutenção e conservação, sendo responsável pela integridade física do adolescente e do professor, e a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), responsável pela escola, professores e escrituração escolar dos alunos.

Desde o do ano de 2013 o Núcleo de Ensino (NUEN), da Unidade de Internação Provisória de São Sebastião (UIPSS), é vinculado à escola CED São Francisco, tal vinculação à uma escola da rede pública faz-se, entre outros motivos, com o intuito de manter o sigilo das informações do aluno que passa pela socioeducação e aprimorar a escrituração escolar. A UIPSS possui, atualmente, estrutura física e de recursos humanos para atendimento médio de 180 adolescentes do sexo masculino, distribuídos em sete módulos, de acordo com a idade, o número de internações, o porte físico e a manutenção da integridade física. No ano de 2016 passaram pela unidade aproximadamente 2500 adolescentes. Os módulos 1 e 2 possuem 15 alojamentos, os módulos 3, 4 e 5 possuem 20 alojamentos, o módulo 6 (Proteção da Integridade Física - PIF) possui 4 alojamentos e o Módulo Disciplinar (MD) possui 10 alojamentos.

A escola funciona dentro da unidade de internação, e conta com 12 salas de aula, e faz o atendimento inclusive dos alunos do PIF e MD nos respectivos módulos. São 26 professores organizados em quatro grupos, sendo três grupos com seis professores e um grupo com oito professores. Os professores são responsáveis por áreas de conhecimento, cada grupo tem no mínimo um representante de cada área: Linguagens, Exatas, Humanas, Educação Física, Artes e Alfabetização (Letramento).

Quanto ao público específico do estudo, são estudantes com características ímpares. Eles encontram-se em cumprimento de medida socioeducativa e assistidos por uma escola que funciona dentro de um espaço destinado a privação de liberdade. Nesse período em que eles estão sob tutela do Estado por um período de até 45 dias, aguardando decisão judicial em virtude de terem cometido atos infracionais de grave ameaça ou violência, ou pela reincidência, ou ainda pelo descumprimento de outra medida socioeducativa, como determina o Art. 121 do ECA, a oferta de escolarização é uma obrigação do Estado. A pesquisa foi aplicada nesta escola pelo fato de ser o meu local de trabalho, e por ser um projeto que tem a oportunidade contribuir para a aprendizagem e ressocialização dos alunos, que em geral encontram-se com distorção idade/série, dificuldades e desmotivação em relação aos estudos.

A escola, CED São Francisco, após primeiro ano de contato com esse novo desafio, que aconteceu em 2013, buscou novas formas de atuação, com adequações pedagógicas, metodológicas e logísticas que tivessem o objetivo de tornar o atendimento do NUEN realmente significativo para a socioeducação.

Com este propósito em mente, um grupo de trabalho, formado por professores que atuavam na escola, com o devido suporte da direção do CED São Francisco, implantaram a partir de 2014 a proposta de trabalhar com a metodologia baseada em projetos e não mais com o formato tradicional da escola. Tendo em vista que a escola nos moldes tradicionais não atendia as especificidades de uma unidade de internação provisória, com estudantes que em sua maioria abandonaram a escola por não terem uma boa relação com ela, apresentando um histórico de indisciplina, repetência e fracasso escolar. As turmas não são organizadas de forma seriada, como em uma escola comum. A partir de então, implantou-se a pedagogia de projetos, uma proposta para enfrentar os desafios das turmas serem multisseriadas, com defasagem escolar, da rotatividade dos alunos, e ainda teve pela frente o objetivo reinserir os adolescentes ao convívio social com esperanças de que a educação pode mudar seu futuro.

> A Pedagogia de Projetos promove a horizontalização da relação com os saberes. Ela permite que todos os envolvidos no trabalho pedagógico sejam atores e autores, que as pessoas aprendam não somente "conteúdos", mas habilidades, atitudes, valores, princípios. O trabalho por projetos de aprendizagem desperta a curiosidade, o interesse pela descoberta, pelo novo. E, além de tudo isto, permite que os sujeitos construam todos esses saberes a partir de seus próprios interesses, sem que lhe sejam impingidas informações sobre as quais eles não têm o menor interesse e curiosidade porque não fazem parte de seu contexto de vida (CASTRO, 2008, p. 65).

Em outubro de 2014, com a perspectiva de institucionalizar as práticas pedagógicas e subsidiar a organização do trabalho nos núcleos de ensino das Unidades de Internação Socioeducativas, a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal publicou as Diretrizes Pedagógicas da Escolarização na Socioeducação, a qual, entre diversas contribuições, fornece subsídios para metodologias baseadas em projetos.

A realidade da grande maioria dos jovens do sistema socioeducativo é marcada por altos índices de abandono e reprovação escolar, que são claramente percebidos durante a prática docente. E, mesmo esses adolescentes, encontrando-se afastados ou não da escola, reconhecem que através da educação podem encontrar suporte necessário para superar dificuldades e construir um futuro melhor. O desenvolvimento dessa pesquisa teve como estímulo a seguinte questão: O lúdico pode motivar a aprendizagem matemática na educação básica? Em especial, os jogos podem motivar esse público específico?

A respeito da criminalidade e o desenvolvimento das crianças e jovens destaca-se "[...] Nas condições da moralidade burguesa do Direito, desviam-se para o crime aqueles que não se enquadram nos limites do padrão médio que sentem em si força e não podem aceitar a ordem estabelecida da vida". (Vigotski, 2010, p.312). E no que se refere à capacidade intelectual ou mesmo capacidade de aprendizagem o mesmo autor destaca:

> As falhas morais não significam incapacidade da criança para formar habilidades sociais ou sua incapacidade para o convívio social; ao contrário, muito amiúde essa criança revela astúcia fora do comum, agilidade, inteligência, autêntico heroísmo e, o que é mais importante, a maior fidelidade a alguma moral como a dos pequenos ladrões de rua ou "batedores de carteira", que têm a sua moral, a sua ética profissional, o seu conceito de bem e de mal. O mais das vezes o desequilíbrio moral da criança ocorre em função de duas causas básicas. A primeira é o abandono que é um fato de imensa dependência social, ou seja, de qualquer preocupação com a elaboração de reações de adaptação ao meio. A segunda é o elevado talento geral das crianças, que não encontram vazão para sua energia nas formas comuns de comportamento."(VIGOTSKI, 2010, p.312)

É com esse entendimento, valorizando os indivíduos nas suas potencialidades, que a equipe de professores, a qual faço parte, acredita que através da educação o sistema socioeducativo pode contribuir para que os adolescentes que ali estão, ou por ali já passaram, se responsabilizem por seus atos e possam encontrar opções para modificar seus destinos.

4.2.1 Procedimentos para coleta de dados

A pesquisa passou por etapas iniciadas em outubro de 2016, quando aconteceram as primeiras reuniões com meu orientador para começar os estudos de alguns jogos matemáticos relevantes à educação básica, quando optamos pela utilização do Jogo do NIM, um jogo combinatório. No último trimestre de 2016 foi realizado o projeto desta dissertação e a análise desse e de outros jogos. Nos primeiros meses 2017, após o desenvolvimento teórico, com o início do ano letivo nas escolas públicas do Distrito Federal, foram realizadas algumas abordagens, junto aos professores regentes na escola onde pretendia-se realizar a pesquisa, a respeito da utilização do lúdico como fator motivador e sobre a possibilidade da cessão de alguns momentos junto com suas turmas para desenvolvimento e aplicação de um jogo até então desconhecido pelos professores. Após o consentimento por parte dos professores Tiago Luz, Paulo Tiago e Eraldo Carlos, que concordaram em colaborar com o estudo de caso, obteve-se a liberação e apoio por parte da Supervisora do NUEN, a professora Sara Araújo, e do Diretor do CED São Francisco, o professor Carlos Alberto Menna Barreto Franco Neto.

Durante o mês de abril, nos dias 05, 06 e 07, e no mês maio, nos dias 08 e 09 realizaram-se os procedimentos para coletar informações a respeito das contribuições dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos, que foram planejados para acontecer em um único encontro com cada grupo de estudantes, tendo em vista a especificidade da escola.

Para o desenvolvimento da atividade com os adolescentes sobre o Jogo do NIM foi realizado um encontro com os alunos com duração máxima de 2 horas. Em uma outra oportunidade, na aula seguinte ou no dia seguinte, foi apresentado um questionário, disponível para consulta no Apêndice B, para que cada aluno, anonimamente, fizesse a avaliação da atividade. O questionário foi aplicado sem a presença ou interferência do pesquisador. Para participar da pesquisa, uma amostra, composta por alunos dos módulos 2, 3 e 4 foi selecionada sob orientação dos professores regentes. No módulo 2 houve, à época da aplicação da atividade, a participação de 19 alunos, no módulo 3 participaram 22 alunos e do módulo 4 participaram 32, portanto, um total de 73 adolescentes envolvidos no estudo de caso. Destaca-se, desde já, que os módulos contavam com uma quantidade superior de alunos nos dias da aplicação da atividade, porém alguns alunos não participaram devido às ausências em sala de aula, fato que acontece por motivos alheios à competência da administração escolar.

O desenvolvimento das atividades foi realizado sob o seguinte planejamento:

1. Apresentação pessoal e explanação dos motivos da pesquisa;

2. Aplicação da Sondagem ou Atividade Diagnóstica, disponível no Apêndice A, com tempo máximo de 40 minutos;

3. Explanação das regras do Jogo do NIM, com auxílio do quadro branco, marcador de quadro branco (pincel), assim como algumas demonstrações;

4. Inicio da atividade lúdica supervisionada, solicitar que os adolescentes formassem as duplas para dar início as disputas, em um primeiro momento com a 1^a versão do

jogo, em seguida com a 2^a versão, conforme alguns exemplos encontrados na seção de atividades propostas;

A seguir alguns objetivos propostos para o estudo de caso:

1. Identificar conhecimentos e dificuldades básicas relacionados às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão;
2. introduzir o jogo do NIM e estimular os alunos a disputar algumas partidas;
3. proporcionar momento lúdico de contato com o Jogo do NIM;
4. incentivar os alunos, a partir das vivências no jogo e através de intervenções pontuais, que façam suas conjecturas sobre a melhor técnica para obter a vitória;
5. observar erros e antecipações no jogo;
6. sistematizar, juntamente com os alunos quais os conceitos matemáticos necessários para desenvolver a estratégia ótima;
7. observar se o lúdico foi agente motivador no processo ensino-aprendizagem;

Recursos didáticos: atividade de sondagem (Apêndice A), caneta, pincel, apagador, quadro branco, palitos de picolé e questionário para avaliação da atividade (Apêndice B).

4.3 Avaliação dos resultados

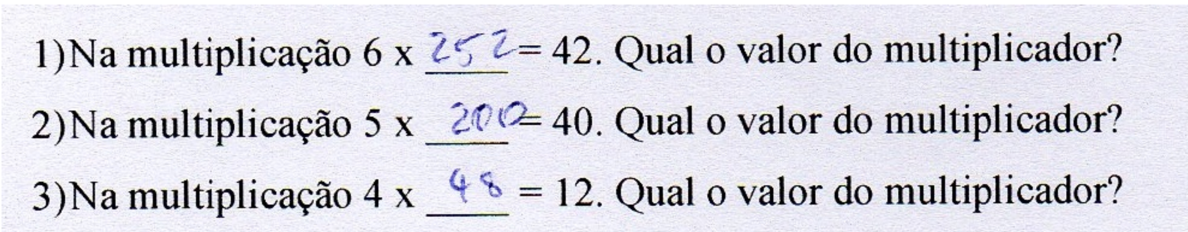
A análise dos dados foi muito complexa, evidenciando-se a necessidade de implementar atividades complementares e estudos com maior profundidade em virtude dos seguintes aspectos:

- os alunos estão com de restrição de liberdade;
- os módulos são formados por turmas multisseriadas;
- muitos alunos estão evadidos da escola há certo tempo;
- as turmas apresentam elevada heterogeneidade em diversos aspectos.

4.3.1 Atividade de sondagem

Inicialmente os alunos foram submetidos a uma sondagem com o intuito de avaliar o nível de conhecimento e habilidade para resolver situações-problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão, além de analisar a capacidade de raciocínio, cálculo mental, estratégias e "erros". Destacam-se algumas observações iniciais: apenas dois adolescente, menos de 3% da amostra, optaram por não participar das atividades, todos os demais se predispuseram a realizar o teste, e o fizeram com a autonomia apropriada e esperada. A intervenção do professor regente ou pesquisador ocorria quando a dúvida do aluno o impedia de continuar no desenvolvimento dos exercícios, e para evitar sua desmotivação eram, então, realizados alguns esclarecimentos ao grupo de alunos no quadro branco ou verbalmente. Tais intervenções foram pontuais, por exemplo, com um aluno do 3^o Ano do Ensino Fundamental, que está evadido da escola há mais de três anos, e cerca de outros 6 alunos que estão a mais de um ano sem frequentar a escola.

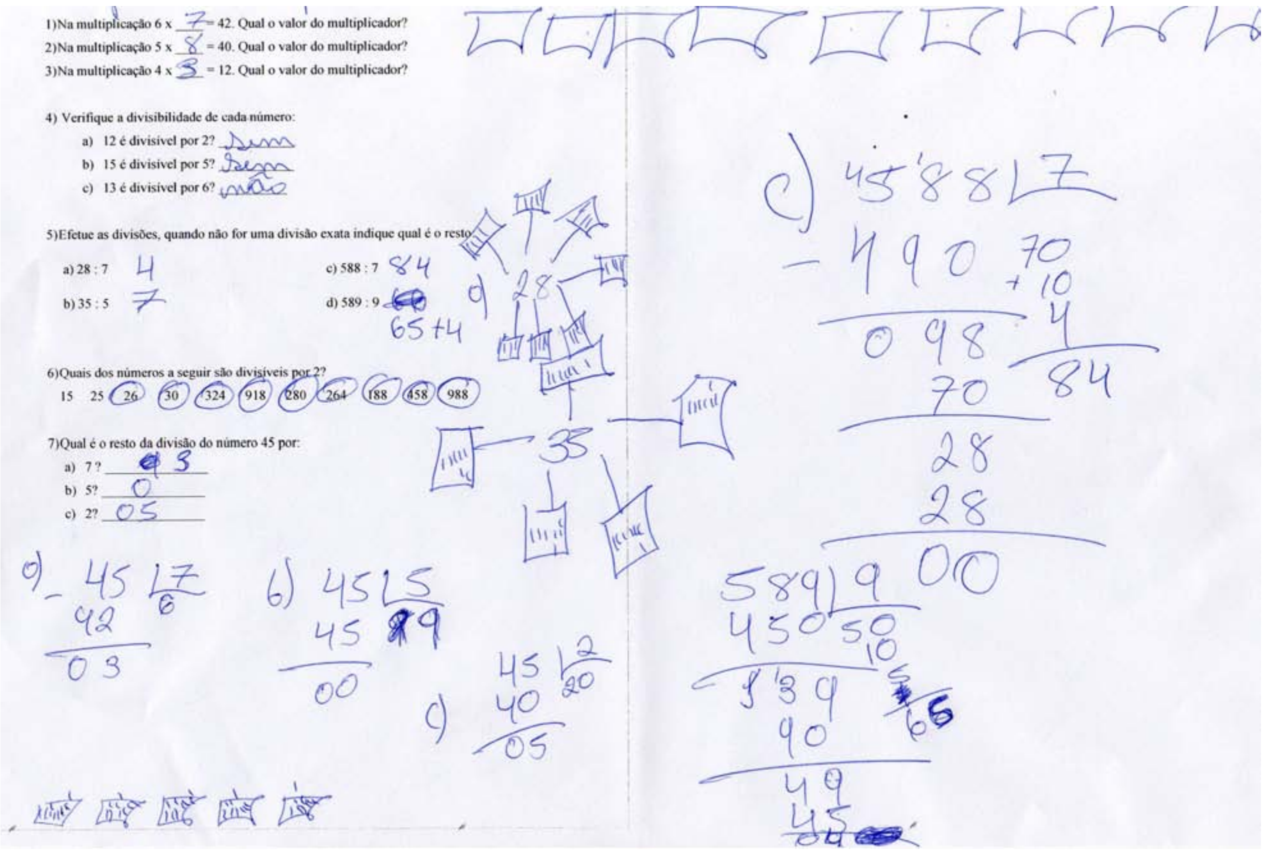
Através da apreciação dos resultados foi possível reconhecer "erros" e tentativas de superação peculiares, como no episódio de um aluno que nas questões de 1 a 3 ao invés de responder corretamente o valor do multiplicador, provavelmente, fez outros cálculos em virtude da falha na interpretação da questão, realizou a multiplicação de 6 x 42 = 252, 5 x 40 = 200 e 4 x 12 = 48.


1)Na multiplicação 6 x 252 = 42. Qual o valor do multiplicador?
2)Na multiplicação 5 x 200 = 40. Qual o valor do multiplicador?
3)Na multiplicação 4 x 48 = 12. Qual o valor do multiplicador?

Na questão 4, em todas as salas, foi necessário que o professor pesquisador realizasse uma pausa para uma breve explanação sobre o significado do termo divisibilidade e, através de alguns exemplos mostrar quando um número é divisível ou não por outro. Após essa explicação apenas dois alunos erram a alternativa b) da questão 4, onde há o seguinte questionamento: 15 é divisível por 5?. Um outro aluno deixou em branco o item c) desta mesma questão, onde há o seguinte questionamento: 13 é divisível por 6?. Porém este aluno também deixou todas a demais questões em branco.

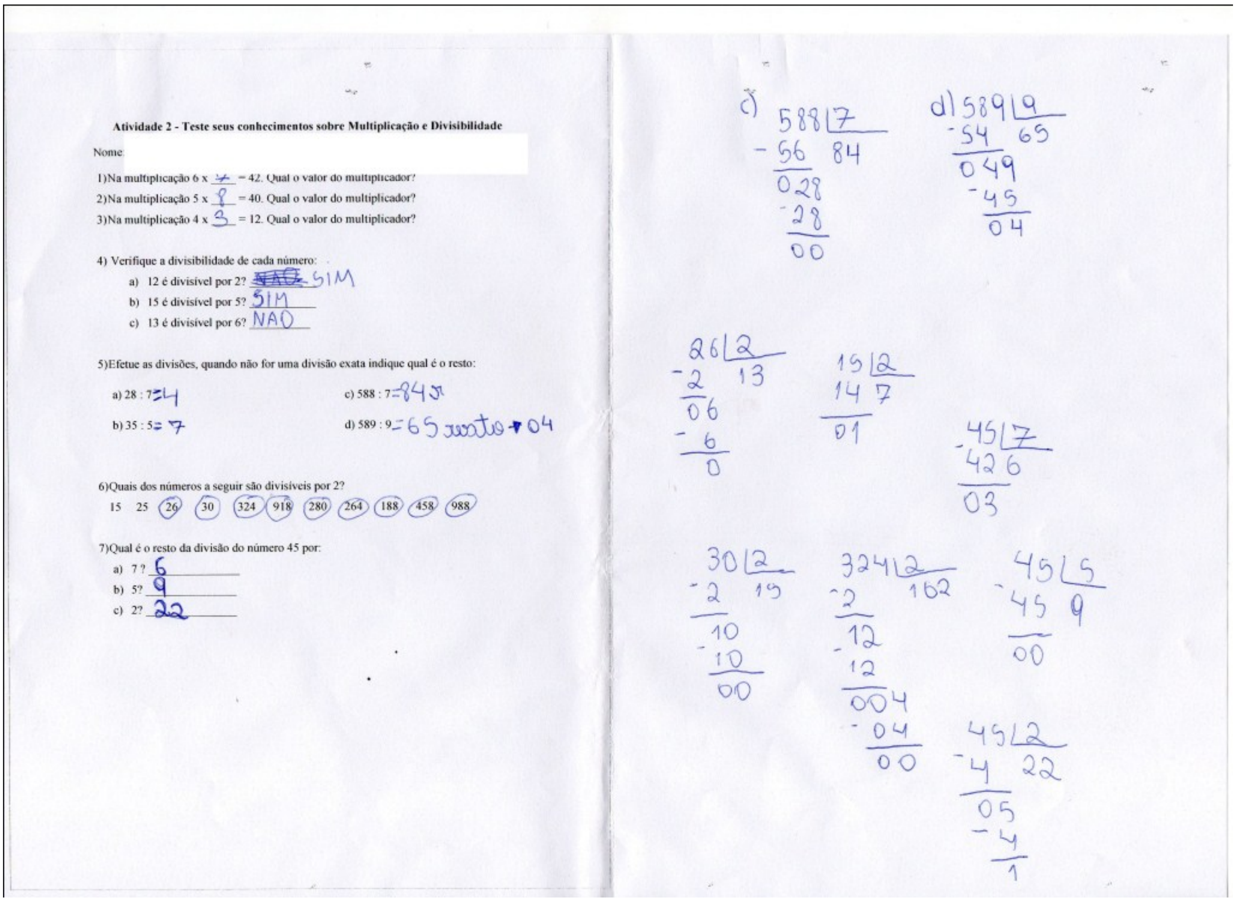
Destaca-se, também, o fato relativo à dificuldade encontrada pelos alunos de realizarem divisão de números formados por mais de duas classes de unidades, como a questão 5, item *c*)588 : 7 ou item *d*)589 : 9. Muitos adolescentes justificam as dificuldades encontradas pelo fato de estarem há muito tempo afastados da escola, associando a isso a dificuldade em memorizar a tabuada da multiplicação. Fez-se então uma intervenção por parte do professor pesquisador, utilizando o quadro branco e o pincel marcador para quadro branco, com o intuito de fazer uma abordagem sobre a técnica de divisão por estimativa, onde os alunos que encontravam maior dificuldade com a tabuada da multiplicação e divisão, poderiam resolver divisões com essa técnica.

Alguns alunos já estavam utilizando técnicas de contagem por agrupamento para resolver as questões, ou o algoritmo tradicional da divisão, porém após a explanação no quadro do método alternativo aqueles alunos com dificuldade deram andamento à atividade.



No que se refere à questão 6 apenas dois alunos não responderam, o que representa aproximadamente de 8% do total da amostra. Suspeita-se que tais estudantes não tinham o domínio ou conhecimento prévio dos conceitos relacionados à divisibilidade, números pares e ímpares. Houve casos de alunos que começaram a realizar diversas divisões por 2, até que percebessem que tratava-se da divisão de números pares por dois e então completassem o exercício rapidamente.

Outro “erro” em destaque ocorreu quando dois alunos, provavelmente, confundiram o comando do enunciado ou não assimilaram os conceitos e termos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto. Alguns alunos responderam a questão 7, itens a), b) e c) com os valores correspondentes ao quociente, e não ao resto como solicitado no comando da questão. Um exemplo está na imagem a seguir.


Atividade 2 - Teste seus conhecimentos sobre Multiplicação e Divisibilidade

Nome:

1)Na multiplicação 6 x 7 = 42. Qual o valor do multiplicador?
2)Na multiplicação 5 x 8 = 40. Qual o valor do multiplicador?
3)Na multiplicação 4 x 3 = 12. Qual o valor do multiplicador?

4) Verifique a divisibilidade de cada número:
a) 12 é divisível por 2? ~~NÃO~~ SIM
b) 15 é divisível por 5? SIM
c) 13 é divisível por 6? NAO

5)Efetue as divisões, quando não for uma divisão exata indique qual é o resto:
a) 28 : 7 = 4
b) 35 : 5 = 7
c) 588 : 7 = 84
d) 589 : 9 = 65 resto 04

6)Quais dos números a seguir são divisíveis por 2?
15 25 26 30 324 918 280 264 188 458 988

7)Qual é o resto da divisão do número 45 por:
a) 7 ? 6
b) 5? 9
c) 2? 22

4.3.2 Questionário de avaliação do estudo de caso

Com relação a análise das respostas do questionário aplicado para avaliação do desenvolvimento das atividades do estudo de caso, destaca-se que nem todos os alunos que participaram da pesquisa o responderam. Há alguns fatores a serem considerados hipoteticamente:

- alguns alunos não sentiram confiança em expor sua opinião;
- em virtude da rotatividade dos alunos, os primeiros questionários foram aplicados no dia seguinte ao da atividade, logo o aluno poderia não estar na unidade, por estar em audiência ou ter cumprido os 45 dias.

Por esse motivo o segundo bloco de questionários, aplicados no mês de maio, foi entregue no mesmo dia do desenvolvimento da atividade. Participaram da atividade 73 alunos, e apenas 48 responderam e devolveram o questionário que contém perguntas relacionadas ao desenvolvimento e aplicação da atividade lúdica com o Jogo do NIM. Entre os 48 questionários obtidos, o que representa aproximadamente 65,7% da amostra, foram selecionados 42 para análise, pois quatro desses continham apenas marcação "(x) sim"nas perguntas 1, 4 e 5 e não responderam as demais perguntas, e outros dois alunos devolveram o questionário afirmando que não participaram da atividade. A amostra de questionários sob análise restringiu-se a aproximadamente 57,5% do total de participantes.

As observações realizadas durante o estudo de caso, também, fazem parte da avaliação da atividade, bem como as considerações dos professores regentes. Durante a atividade os alunos eram constantemente supervisionados, orientados e observados, pelos professores pesquisador e regente de turma.

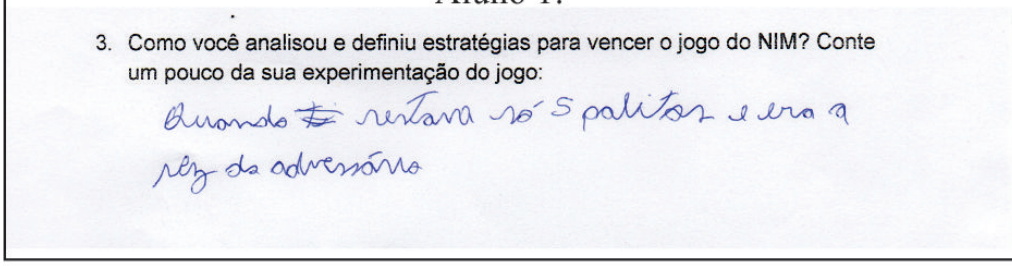
Um fato marcante foi registrado no módulo 3, na ocasião os alunos recepcionaram-nos, pesquisador e professor regente, argumentando que não gostavam de matemática, e no primeiro momento não estavam dispostos a participar. Porém, após apresentação da proposta da aula, que envolveria uma série de exercícios na sondagem e um jogo de palitos que envolve matemática, até então desconhecido por todos, a turma se acalmou, ficou curiosa e concordou em começar a atividade de sondagem.

A respeito da análise das perguntas do questionário, em linhas gerais o item 2 todos alunos identificaram que o jogo envolve algum conceito matemático, entre os quais destacam-se os principais termos utilizados nas respostas: "raciocínio, cálculos, estratégia, divisão, subtração, contagem, tabuada e multiplicação".

Ressalta-se que os alunos iniciavam o jogo sem uma estratégia inicial, e que somente a partir de uma certa quantidade de palitos sobre o tabuleiro começavam a realizar os cálculos quando já restavam uma quantidade menor de palitos. Foi sugerido que os alunos realizassem algumas partidas retirando o número máximo de três ou quatro palitos e variando a quantidade de palitos sobre o tabuleiro, afim de buscar uma estratégia vencedora para o jogo.

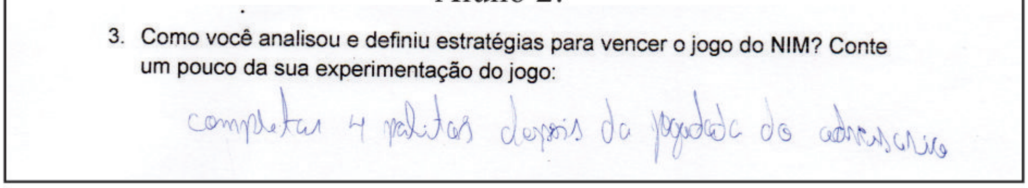
Relembrando que a atividade foi realizada em encontro único de aproximadamente duas horas com os alunos, e que eles, em grande parte, encontraram muita dificuldade para descrever uma estratégia ótima. No entanto, destacam-se alguns avanços na tentativa de conjecturar uma estratégia para a primeira versão jogo do NIM. A seguir temos alguns argumentos selecionados:

Aluno 1:


3. Como você analisou e definiu estratégias para vencer o jogo do NIM? Conte um pouco da sua experimentação do jogo:

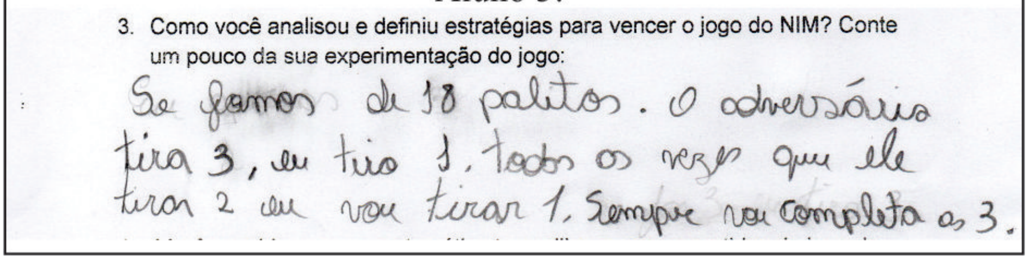
Quando restava só 5 palitos e era a vez do adversário

Aluno 2:


3. Como você analisou e definiu estratégias para vencer o jogo do NIM? Conte um pouco da sua experimentação do jogo:

completar 4 palitos depois da jogada do adversário

Aluno 3:


3. Como você analisou e definiu estratégias para vencer o jogo do NIM? Conte um pouco da sua experimentação do jogo:

Se formos de 18 palitos. O adversário tira 3, eu tiro 1. todos os vezes que ele tiran 2 eu vou tirar 1. Sempre vou completa as 3.

.

Quando questionados sobre a utilização dos conceitos matemáticos para vencer o jogo, apenas quatro alunos, declararam que nem sempre os utilizaram para vencer, ou seja jogaram e venceram ao acaso. Os outros 38 alunos, mesmo em grande parte, não dominando a estratégia ótima, consideram que a matemática auxiliou a vencer as partidas. Durante as observações realizadas em sala de aula, muitos alunos argumentavam a importância da concentração, do raciocínio lógico, dos cálculos e estratégias para buscar a vitória, e os argumentos eram valorizados e mostravam como a matemática estava presente e poderia ser útil naquele momento.

A pergunta sobre o Jogo do NIM e sua relação com a motivação em aprender ou aprimorar os conhecimentos teve cinco alunos que declararam que o jogo não os atraiu, representando aproximadamente 12% dos questionários destacados para análise. Um desses justificou: "porque não gosto"; o outro: "não achei interessante" e os outros três alunos não justificaram suas respostas. Em relação aos demais 37 alunos que responderam afirmativamente à pergunta as justificativas foram, de forma geral, que o jogo é motivador; divertido; desafiador; simples porém força a usar a mente; envolve disputas; é curioso e até mesmo educativo pois através do jogo aprendeu a dividir.

Aluno 1:

5. O jogo do NIM proporcionou motivação (vontade) em aprender ou aprimorar seus conhecimentos sobre matemática:
(X) Sim ( ) Não

Justifique sua resposta:
porque a pessoa se esforço a mente para ganhar o jogo

Aluno 3:

5. O jogo do NIM proporcionou motivação (vontade) em aprender ou aprimorar seus conhecimentos sobre matemática:
(X) Sim ( ) Não

Justifique sua resposta:
É um jogo simples, porem divertido e tem que ter estrategia.

Aluno 4:

5. O jogo do NIM proporcionou motivação (vontade) em aprender ou aprimorar seus conhecimentos sobre matemática:
(X) Sim ( ) Não

Justifique sua resposta:
Porque com os palitos eu Aprendia a dividir

Na última pergunta, referente a utilização de jogos matemáticos como ferramenta pedagógica, seis entrevistados não responderam, o que representa uma abstenção próxima a 14% dos questionários sob análise. As respostas dos outros 36 adolescentes foi favorável a utilização dos jogos matemáticos, e de forma geral as justificativas foram semelhantes as realizadas no item 5, em especial destaca-se a anotação de um aluno: "é bom, mais depende do jogo". Ou seja, retoma-se aqui um dos objetivos de estudo deste trabalho, a utilização de jogos no ensino de matemática ser planejada, orientada, supervisionada e não apenas empregar o lúdico simplesmente pelo lazer e diversão, sendo importante ter objetivos específicos e estar de acordo com as necessidades de cada turma.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização do lúdico como ferramenta pedagógica faz parte de diversas diretrizes curriculares, inclusive está presente em diferentes componentes do Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal. No que se refere à utilização do lúdico no ensino de matemática, este trabalho propôs-se a analisar os estímulos que os jogos combinatórios, em especial o Jogo do NIM, podem proporcionar aos alunos da socioeducação. Para tal foram realizados pesquisa bibliográfica e um estudo de caso com adolescentes do sistema socioeducativo do CED São Francisco/UIPSS. Esperava-se que, através de uma abordagem com materiais concretos e utilizando-se dos jogos combinatórios, conceitos abstratos de aritmética, tais como divisibilidade e sistema de numeração, pudessem ser percebidos pelos estudantes com maior empatia, e assim se apropriassem de, ou se aprimorassem em, tais conhecimentos.

Ressalta-se que a amostra do estudo de caso é heterogênea em diversos aspectos: sociais, culturais e acadêmicos. Um dos objetivos almejados através das atividades orientadas com o jogo do NIM seria que os alunos dominassem uma estratégia ótima, fato que infelizmente não foi alcançado por grande parte dos alunos. Percebeu-se nas observações, e análise dos resultados, que durante a atividade muitos alunos demonstravam boas estratégias com poucos palitos sobre o tabuleiro, porém não conseguiram determinar uma estratégia para vencer dada uma quantidade qualquer de palitos. Por este motivo e também pelo fato de que os alunos ficavam apreensivos em saber como vencer o jogo, ou como a matemática poderia ajudá-los, ao final de cada atividade reservava-se um tempo para discutir a estratégia ótima utilizando a divisão e a análise dos restos.

Considerando a heterogeneidade do público-alvo do estudo de caso, o fato da atividade ser desenvolvida em um único dia, em virtude das especificidades das turmas, a análise dos resultados é algo muito complexo. Porém, evidencia-se que através da utilização do jogo do NIM que os alunos sentiram-se motivados e desafiados a estudar, a aprender ou a aprimorar seus conhecimentos, fatores que sugerem a necessidade de implementação de atividades complementares junto as aulas tradicionais de matemática.

Existem diversos jogos que podem ser utilizados para auxiliar o professor no desenvolvimento lúdico de conceitos matemáticos, tais como alguns citados neste trabalho ou outros como Go e Mancala, que envolvem princípio da contagem, raciocínio lógico-matemático, posicionamento geométrico, entre outros. Considero relevante e primordial a dedicação do professor em pesquisar, planejar e orientar seus alunos para que os jogos possam se afirmar como instrumentos pedagógicos, e que através do aprimoramento dos profissionais da educação, dissemine-se cada vez mais as boas práticas dos jogos, não apenas como ferramentas para o lazer e a diversão.

Por fim espero ter contribuído para a análise e divulgação de jogos combinatórios entre profissionais da educação e estudantes.

Bibliografia

[1] ANTUNES, Celso. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1998. 295 p.

[2] BOUTON, Charles. L.. **NIM, a game with a complete matheimatical theory**. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 3, No. 1/4 (1901 - 1902), pp. 35–39.

[3] CASTRO, W. **A pedagogia de projetos como estratégia para a formação de professores para uso do computador na educação**. 2008. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2008. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/3790>. Acesso em: 28 jan. 2017.

[4] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 22^a ed.; Campinas, SP: Papirus, 2011. 125 p.

[5] DISTRITO FEDERAL, Secretaria de Estado de Educação. **Currículo em Movimento da Secretaria de Estado de Educação do DF:** Pressupostos Teóricos. Brasília, DF, 2014.

[6] DISTRITO FEDERAL, Secretaria de Estado de Educação. **Currículo em Movimento da Secretaria de Estado de Educação do DF:** Ensino Fundamental - Anos Finais. Brasília, DF, 2014.

[7] DISTRITO FEDERAL, Secretaria de Estado de Educação. **Diretrizes Pedagógicas: Escolarização na Socioeducação**. Brasília, DF, 2014.

[8] BRASIL. **Estatuto da criança e do adolescente (ECA):** Lei N^o 8069, de 13 de julho de 1990. Brasília, 1990.

[9] FERGUSON, Thomas S.. **Game Theory**. Mathematics Department, University of California, Los Angeles (UCLA), Second Edition, 2014. Disponível em: <http://www.math.ucla.edu/∼tom/Game_Theory/Contents.html> Acesso em 11 fef. 2017.

[10] FOMIN, Dimitri et al. **Círculos Matemáticos:** A experiência russa. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[11] GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239 f. Tese (Doutorado)-Faculdade de Educação, Universidade Estaual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

[12] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 330 p.

[13] KISHIMOTO, T. M. **O Brincar e suas teorias**. São Paulo; Editora Cengage Learning, 2008. 172 p.

[14] LIMA, José Milton. **O jogo como recurso pedagógico no contexto educacional**. São Paulo, SP: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2008, 157p.

[15] RAGUENET,Inez Freire. BARRÊDO, Márcia Kossatz de. **A teoria matemática do jogo de Nim**. Dept. de Matemática da PUC-RJ. In: RPM – Revista do Professor de Matemática Vol 6. Sociedade Brasileira de Matemática. 1^o semestre de 1985.

[16] MATOS, Helder C.; BASTOS, Raimundo; SEIMETZ, Rui. **Desenvolvendo Alguns Conceitos Matemáticos por Meio de Jogos**. Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. In: 4^o Colóquio da Região Centro-Oeste, 2015. No prelo.

[17] MATOS, Helder C. .**O jogo dos quadrinhos**. In: Revista do Professor de Matemática - RPM. Vol. 5, 1984.

[18] MILIES, F. C. Polcino; COELHO, S. P.**Números: uma introdução à Matemática**. 3^a ed. São Paulo, SP: Editora da Universidade de São Paulo, 2001. 240 p.

[19] RAMOS, A. bf Metodologia da Pesquisa Científica. São Paulo, SP: Atlas, 2009. 246 p.

[20] RIBEIRO, Maria L. S. O jogo na organização curricular para deficientes mentais. In: KISHIMOTO, T. M.(Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação** . São Paulo: Cortez, 1997.p. 133-142.

[21] RODRIGUES, Hélio Oliveira; SILVA, José Roberto da.O JOGO DO NIM E OS CONCEITOS DE MDC E MMC. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004, Recife/PE.

[22] SARTINI, Brígida Alexandre et al. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. In: **II Bienal da SBM Universidade Federal da Bahia**, 2004, Salvador/BA.

[23] TEIXEIRA, Ralph Costa, Jogos Combinatórios e Números Surreais, Departamento de Matemática Aplicada, UFF, In: 2^o **Colóquio da Região Sudeste**, 2013, São Carlos/SP.

[24] VIGOTSCKI, L.S.**Psicologia pedagógica**. 3^a ed.; São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2010. 561 p.

[25] WELTER, Jocemar Rodrigo. **Contribuições do jogo do nim para o Ensino de Aritmética**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Matemática, Universidade Federal de Santa Maria-UFSM, Santa Maria, 2016.

APÊNDICE A

Atividade Diagnóstica

Atividade - Teste seus conhecimentos sobre Multiplicação e Divisibilidade

Nome: ____ Data: ________

1. Na multiplicação 6 x ____ = 42. Qual o valor do multiplicador?

2. Na multiplicação 5 x ____ = 40. Qual o valor do multiplicador?

3. Na multiplicação 3 x ____ = 21. Qual o valor do multiplicador?

4. Verifique a divisibilidade de cada número:

5. 16 é divisível por 2? ____________

6. 25 é divisível por 5? ____________

7. 13 é divisível por 6? ___________

8. Efetue as divisões, quando não for uma divisão exata indique qual é o resto:

a) 28 : 7

b) 35 : 5

c) 588 : 7

e) 589 : 9

9. Circule os números que são divisíveis por 2:

15 25 26 30 324 918 280 264 188 458 988

10. Qual é o resto da divisão do número 45 por:

a) 7 ? ________________

b) 5? ________________

c) 2? ________________

APÊNDICE B

Questionário de avaliação do estudo de caso

Questionário de avaliação da atividade: Jogo do NIM (jogo dos palitos)

1. Você participou da atividade com o jogo do NIM (jogo dos palitos)?

   ( ) Sim ( )Não

   Caso não tenha participado da atividade não é necessário responder as demais perguntas.

2. Quais áreas da matemática você acredita serem envolvidas ao jogar o NIM?

   ____

   ____

   ____

3. Como você analisou e definiu estratégias para vencer o jogo do NIM? Conte um pouco da sua experimentação do jogo:

4. Você considera que a matemática te auxiliou a vencer partidas do jogo do NIM? ( ) Sim ( )Não ( ) Às vezes.

5. O jogo do NIM proporcionou motivação (vontade) em aprender ou aprimorar seus conhecimentos sobre matemática:

   ( ) Sim ( ) Não

   Justifique sua resposta:

6. Qual a sua opinião sobre a utilização de jogos matemáticos e a aprendizagem de conteúdos da matemática?