



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grafos: Algumas Aplicações a Nível Médio

por

Rodrigo Vaz Costa

Brasília, 2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC837g Costa, Rodrigo Vaz
Grafos: Algumas Aplicações a Nível Médio / Rodrigo
Vaz Costa; orientador Ary Vasconcelos Medino. --
Brasília, 2017.
79 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Grafos. 2. Algoritmos. 3. Matrizes. 4.
Poliedros. 5. Análise Combinatória. I. Medino, Ary
Vasconcelos, orient. II. Título.

Rodrigo Vaz Costa

Grafos: Algumas Aplicações a Nível Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para a obtenção do grau de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino

Brasília

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

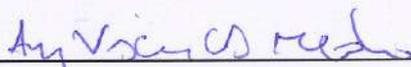
Grafos: Algumas Aplicações a Nível Médio
por
Rodrigo Vaz Costa*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

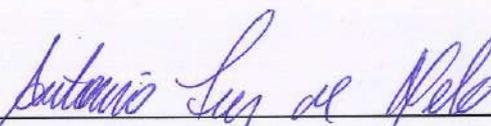
MESTRE

Brasília, 06 de julho de 2017.

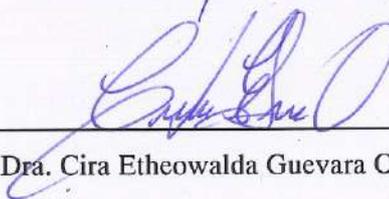
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino – MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Antonio Luiz Melo – MAT/UnB (Membro)



Profa. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano – EST/UnB (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação

Dedicatória

Dedico esse trabalho de conclusão à minha família, meus amigos, colegas de curso e professores, que me apoiaram nesse período de dois anos de mestrado, e a todos aqueles que acreditam que o ensino de Matemática pode ser transformado em algo lúdico, criativo e estimulante para professores e alunos.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por essa conquista, e por ter me abençoado com a disposição e inspiração para realizar esse trabalho. À minha família, por sempre estarem presentes e por estarem sempre juntos a mim, nesse momento e em todos os outros, em horas de felicidade e tristeza; enfrentamos as dificuldades unidos e sempre vencemos a todas.

Aos meus professores de Ensino Médio, e hoje amigos e colegas de profissão, Angel Prieto, Fausto Camelo e Daniel Wanzeller, por todo o apoio que recebi desde o início, quando percebi que iria cursar Matemática para ser professor. Fiz uma escolha certa e recebi a aprovação e o suporte de cada um e além disso, a experiência que me passaram nesses anos de preparo até me tornar professor contribuiu muito para a pessoa e o profissional que sou hoje.

A todos os meus alunos, ex-alunos e aos muitos desses que se tornaram amigos valiosos, por me servirem de inspiração para melhorar cada vez mais meu trabalho e por me ajudarem a ser uma pessoa melhor. Tantos passaram pela minha vida e deixaram suas marcas; jamais serão esquecidos e sempre estarão comigo em cada momento que eu adentrar uma sala de aula.

Ao professor Ary Medino pela ótima orientação, disposição e paciência para me guiar na elaboração deste trabalho; aos professores da UnB, pela dedicação e pela qualidade na transmissão do conhecimento; ao professor Rui Seimetz pela excelente coordenação do PROFMAT e por todas as ótimas diretrizes passadas nesses últimos dois anos. À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A Teoria dos Grafos é um campo da Matemática que surgiu no século XVIII e que vêm se desenvolvendo muito desde então. Tem aplicações notáveis em diversas áreas, tais como Lógica, Biologia, Análise Combinatória, Programação Computacional e Química. É ainda, de uma forma geral, uma ferramenta muito útil no estudo de relações, na construção de algoritmos e na análise de viabilidade de certas situações.

Esse trabalho tem como objetivo mostrar como a Teoria dos Grafos pode ser usada como ferramenta para auxiliar no ensino de Matemática a nível Médio. Para isso, será exposto como essa teoria se encaixa em alguns conteúdos específicos previstos no currículo de cada um dos três anos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos; Aplicações; Algoritmos; Matrizes; Poliedros; Análise Combinatória.

Abstract

Graph theory is a field of Mathematics which first emerged in the 17th century and has been much developed ever since. Such theory has outstanding applications in many other areas, such as Logic, Biology, Combinatorics, Computer Programming and Chemistry. It also is, generally speaking, a very useful tool in studying relations, building algorithms and analysing the viability of certain situations.

This work has the purpose of showing that Graph theory can be used as an auxiliary tool in the teaching of mathematics at the high school level. We will show how the subject fits in some of the topics covered in the standard curriculum for each of the three years of the brazilian high school.

Keywords: Graph theory; Applications; Algorithms; Matrices; Polyhedra; Combinatorics.

Sumário

Introdução	11
1 Conceitos iniciais sobre grafos	15
1.1 Definições	15
1.2 Grafos Eulerianos e Ciclos Hamiltonianos	22
2 Grafos e Algoritmos	25
2.1 Árvores Geradoras	26
2.2 Grafo Valorado	27
2.3 Análise de Fluxo a Custo Mínimo	28
2.3.1 O Algoritmo de Prim	29
2.3.2 O Algoritmo de Kruskal	30
2.3.3 O Algoritmo de Dijkstra	34
3 Grafos e Matrizes	41
3.1 Matrizes de Adjacência	42
3.2 Matrizes de Incidência	48
3.3 Armazenamento de dados	50
4 Grafos e o Teorema de Euler para os poliedros	53
4.1 Grafos Planares	54
4.2 Poliedros Regulares	59

5 Grafos e Análise Combinatória	66
5.1 Comissões e grafos completos	67
5.2 Conhecidos numa reunião e o Teorema de Ramsey	68
5.3 Casais dançantes e emparelhamentos em grafos	72
Índice Remissivo	77
Referências Bibliográficas	79

Introdução

A primeira motivação para esse trabalho vem de um problema muitas vezes reconhecido como o primeiro (e um dos mais famosos da Matemática em geral) cuja solução fez uso da Teoria dos Grafos. Foi proposto ao grande matemático Leonhard Euler (1707–1783). Na cidade alemã de Königsberg (hoje Kaliningrado, na Rússia), o rio Prególia dividia a geografia da região da maneira mostrada na Figura 1 a seguir.

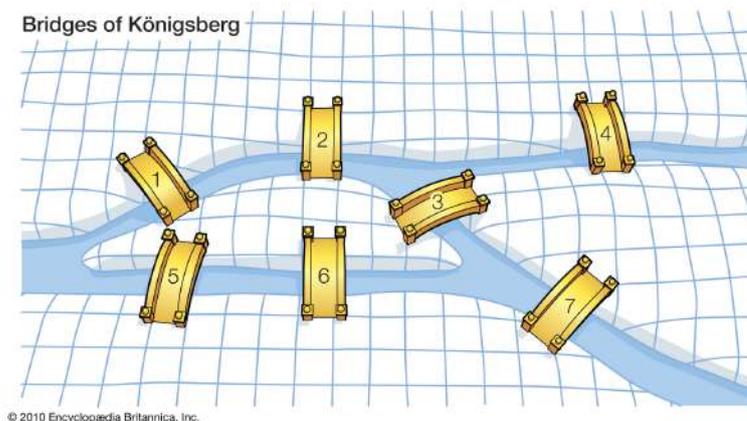


Figura 1: As Pontes de Königsberg. Fonte: <https://www.britannica.com/topic/Konigsberg-bridge-problem?oasmId=68671>

Os moradores da cidade gostavam de passear pelas pontes, e perceberam um fato curioso: não importa o quanto tentassem, não era possível fazer um passeio que utilizasse cada ponte uma única vez, começando e terminando em um mesmo ponto; era sempre preciso utilizar ao menos uma ponte mais de uma vez. Euler interessou-se pelo problema e escreveu um artigo sobre o mesmo. Em termos gerais, ele representou

o problema na forma de um diagrama (Figura 2), em que cada porção de terra era representada por um ponto e cada ponte, por uma linha.

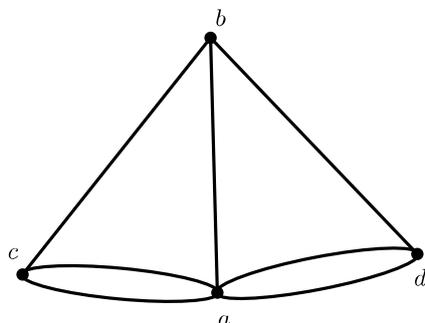


Figura 2: Diagrama feito por Euler.

Através desse diagrama e de um teorema que provou posteriormente no mesmo artigo, Euler mostrou por que passeios como esses eram impossíveis.

Outro problema muito divulgado que utiliza resultados importantes da Teoria dos Grafos consiste em um desafio de lógica: desenhar a figura 3 sem tirar o lápis do papel ou percorrer uma mesma linha duas vezes. Como veremos, resolver esse problema é equivalente verificar se o grafo que o representa é ou não um circuito euleriano.

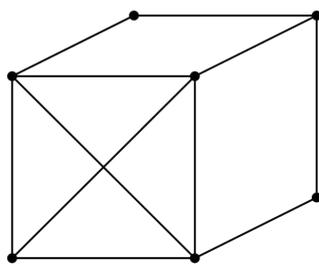


Figura 3: Um problema de lógica.

Idéias parecidas às utilizadas nos dois problemas anteriores podem ser evidenciadas na seguinte questão encontrada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicado no ano de 2011. Nessa questão, o candidato deveria analisar a situação apresentada e em seguida, assinalar a única alternativa correta entre as apresentadas nas

alternativas (a), (b), (c), (d) ou (e) a seguir.

Um técnico em refrigeração precisa revisar todos os pontos de saída de ar de um escritório com várias salas.

Na imagem apresentada, cada ponto indicado por uma letra é a saída do ar, e os segmentos são as tubulações.

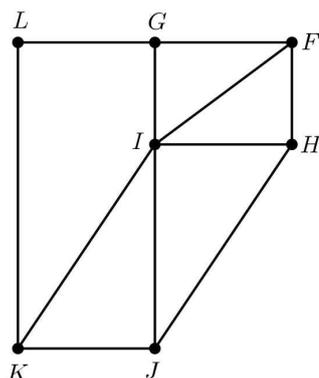


Figura 4: Item do ENEM–2011.

Iniciando a revisão pelo ponto K e terminando em F , sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será passando pelos pontos

- (a) $K, I, e F$.
- (b) $K, J, I, G, L e F$.
- (c) $K, L, G, I, J, H e F$.
- (d) $K, J, H, I, G, L e F$.
- (e) $K, L, G, I, H, J e F$.

O objetivo desse trabalho é mostrar como a Teoria dos Grafos ganhou espaço no mundo moderno, mostrando suas várias aplicações em problemas teóricos de Matemática e em situações cotidianas. Cada capítulo foi estruturado de forma a mostrar as definições principais e as respectivas aplicações da Teoria dos Grafos em conteúdos do 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio.

O Capítulo 1 concentra as definições mais gerais sobre grafos, entre elas as definições de grafos eulerianos e caminhos hamiltonianos, que serão usados para justificar as soluções dos três problemas motivadores encontrados nessa introdução. Além desses problemas, as definições e teoremas constantes nesse capítulo serão essenciais para a fundamentação teórica dos outros capítulos dessa obra.

O Capítulo 2 tem como tema central um conteúdo pouco abordado na Matemática do Ensino Médio, mas que se encaixaria muito bem no 1º ano do mesmo: a análise de algoritmos e outros raciocínios recursivos. Alguns algoritmos clássicos serão apresentados, e serão utilizados principalmente para decidir qual o custo mínimo em algumas situações que envolvem deslocamentos de cargas de pessoas.

O Capítulo 3 mostra a relação entre grafos e matrizes, que são amplamente utilizadas no 2º ano do Ensino Médio. Matrizes e as operações com as mesmas são especialmente necessárias no armazenamento dos dados contidos nos grafos, e também servem como ferramenta para analisar algumas situações que envolvem transporte de informações e objetos.

O Capítulo 4 tem o objetivo de mostrar que grafos são também extremamente úteis no estudo dos poliedros convexos. Será mostrado como a Teoria dos Grafos pode ser utilizada para demonstrar dois fatos muito importantes da geometria espacial, ensinada no 2º ano do Ensino Médio: a relação de Euler para poliedros convexos e também a existência de apenas cinco poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

O Capítulo 5 traz uma relação muito familiar entre grafos e Análise Combinatória, conteúdo em geral ensinado no 3º ano do Ensino Médio. Seu objetivo é utilizar as noções intuitivas que a Teoria dos Grafos oferece para demonstrar alguns resultados complexos da Análise Combinatória, sem recorrer ao uso de fórmulas ou raciocínios mais complicados.

Para facilitar a localização das diversas definições utilizadas em capítulos e teoremas durante todo esse trabalho, foi acrescentado um Índice Remissivo, no qual cada definição pode ser encontrada em sua respectiva página de origem.

Capítulo 1

Conceitos iniciais sobre grafos

Esse capítulo traz as principais definições usadas em Teoria dos Grafos, e que serão muito importantes para o entendimento desse trabalho. Além disso, os teoremas demonstrados nesse capítulo formam a base do que será desenvolvido nos capítulos posteriores. As relações com vários problemas clássicos de lógica também é explorada, mostrando que os conceitos da Teoria dos Grafos ajudam a resolução de problemas aparentemente difíceis de maneira mais intuitiva. As definições e demonstrações aqui encontradas são baseadas nas presentes nas referências [1],[2], [3] e [4].

1.1 Definições

Chamamos *grafo* a todo par (V, A) de conjuntos $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, cujos elementos v_i são chamados *vértices*, e $A \subset \{\{v_i, v_j\}, v_i, v_j \in V\}$, cujos elementos são chamados *arestas*. Observamos então que cada aresta é um par não-ordenado de vértices. Os vértices que formam certa aresta são chamados *extremidades* da mesma. Se houver uma aresta ligando dois vértices quaisquer, esses vértices serão chamados *adjacentes* e diz-se que a aresta comum é *incidente* aos vértices. Quando não houver confusão de notações, a aresta $\{u, v\}$ será representada simplesmente por uv .

Podemos então imaginar os vértices de um grafo como pontos e as arestas como

linhas que conectam esses pontos. Por exemplo, sendo $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $A = \{ab, bc, bd, ce, cf, fg, ga\}$, a Figura 1.1 mostra um diagrama representativo para o grafo $G = (V, A)$.

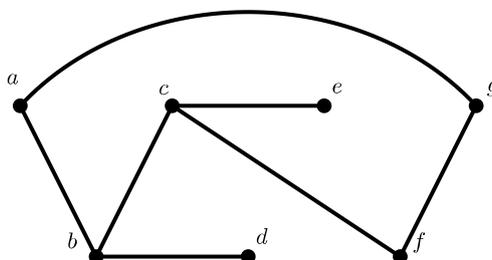


Figura 1.1: Grafo G .

Definimos *grau* de um vértice v , denotado por $d(v)$, como o número de arestas incidentes a v . Na Figura 1.1, temos, por exemplo, $d(a) = 2$ e $d(c) = 3$. Em um grafo G , definimos ainda o *grau maximal de G* ($\Delta(G)$) e o *grau minimal de G* ($\delta(G)$), como sendo respectivamente o maior e o menor grau de um vértice de G . Ainda no exemplo anterior, temos $\Delta(G) = 3$ e $\delta(G) = 1$.

Se um vértice conecta-se a si mesmo, a aresta que faz essa conexão é chamada *laço*. Se um grafo possui laço, é costume chamá-lo de *pseudografo* (Figura 1.2).

Se um grafo é tal que existe mais de uma aresta ligando dois vértices, o mesmo é denominado *multigrafo* (Figura 1.3).

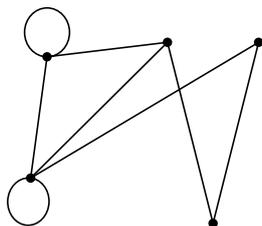


Figura 1.2: Um pseudografo.

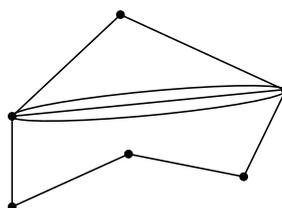


Figura 1.3: Um multigrafo.

No problema das pontes de Königsberg, o diagrama feito por Euler é um multigrafo em que os vértices são as porções de terra e as arestas, as pontes.

A notação que será utilizada nesse trabalho para representar o número de elementos de um conjunto X qualquer será $|X|$. A seguir, o primeiro teorema importante sobre grafos.

Teorema 1.1.1 (Contagem dupla). *Em um grafo $G = (V, A)$ em que não há vértices conectados a si mesmos, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|.$$

Demonstração.

Por definição, o número de arestas que incidem no vértice v é igual a $d(v)$. Como cada aresta do grafo é incidentente a exatamente dois vértices, se somarmos todos os graus dos vértices, obteremos o dobro do número de arestas, ou seja, $2|A|$, pois contamos cada aresta duas vezes.

□

Uma consideração importante é que nos pseudografos (Figura 1.2) pode-se definir um teorema semelhante, mas para isso, é necessário contabilizar duas vezes uma aresta que incide num mesmo vértice.

Se um grafo apresenta exatamente uma aresta ligando cada par de vértices, então esse grafo é chamado *completo*. Um grafo completo de n vértices será denotado por K_n . Um *ciclo* é um grafo de vértices $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e cujas arestas são $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Um ciclo de n vértices será denotado por C_n . É importante observar que em um ciclo todos os vértices têm grau 2. As Figuras 1.4 e 1.5 representam, respectivamente, um K_5 e um C_6 .

Grafos sem laços e em que não há dois vértices ligados por mais de uma aresta são chamados *grafos simples*. Dessa forma, os ciclos e os grafos completos são exemplos de grafos simples.

Um *caminho* é um grafo de vértices $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e arestas $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. O número n é chamado *comprimento do caminho*. Em outras palavras, um caminho entre os vértices v_i e v_j nada mais é que um conjunto de arestas que conectam v_i a v_j

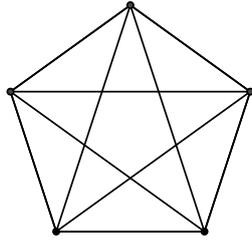


Figura 1.4: K_5 .

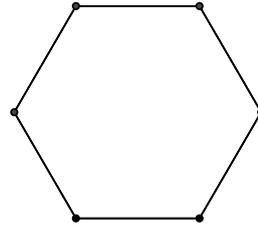


Figura 1.5: C_6 .

(Figura 1.6). Além disso, um caminho pode ser obtido a partir de um ciclo qualquer, por meio da retirada de uma de suas arestas.

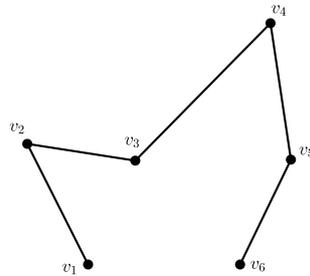


Figura 1.6: Um caminho entre os vértices v_1 e v_6 .

Um grafo é dito *conexo* se, para qualquer par de vértices, existe um caminho que os liga. Uma *árvore* (Figura 1.7) é um grafo conexo e sem ciclos e uma *floresta* (Figura 1.8) é um grafo cujos subconjuntos são árvores.

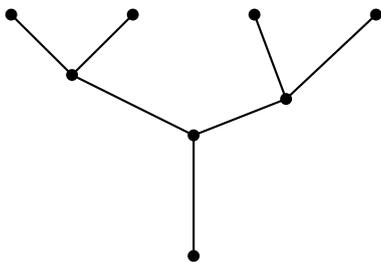


Figura 1.7: Uma árvore.

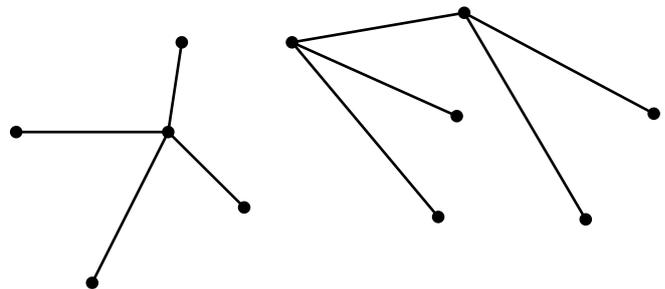


Figura 1.8: Uma floresta.

Árvores são extremamente utilizadas em diversos contextos. Em Química, são

usadas na representação da fórmula estrutural de hidrocarbonetos de cadeia saturada e aberta, chamados *alcanos*. Na Figura 1.9 a seguir, a representação do isooctano (C_8H_{18}), alcano presente na gasolina.

Em probabilidade, árvores são utilizadas para construção de diagramas de possibilidades (chamados convenientemente de “*diagramas da árvore*”). A seguir, a Figura 1.10 apresenta a árvore de possibilidades que mostra os possíveis resultados do experimento aleatório “jogar uma moeda e um dado honestos”.

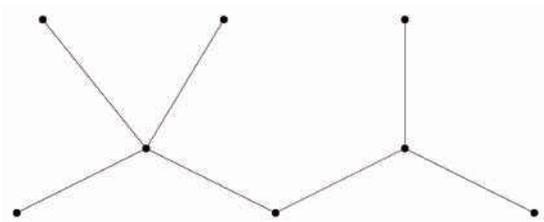


Figura 1.9: Isooctano.

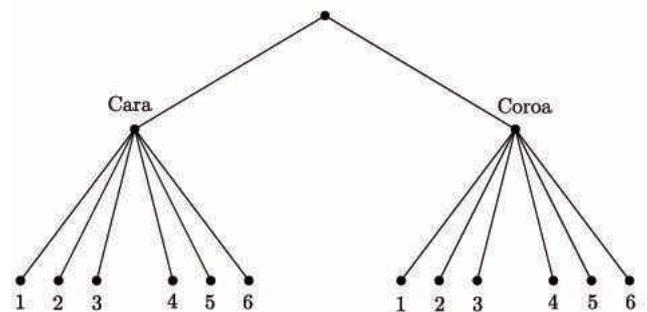


Figura 1.10: Árvore de possibilidades.

Uma aresta de um grafo é denominada *ponte* se sua retirada desconecta o grafo. Observe que nas árvores, toda aresta é uma ponte (Figura 1.7). A demonstração desse fato é simples: se a retirada da aresta uv não desconecta o grafo, então existe no grafo um caminho entre u e v . Dessa forma, ao colocar a aresta uv de volta, formaríamos um ciclo; isso é absurdo, uma vez que a existência desse ciclo contraria a definição de árvore.

Teorema 1.1.2. *Toda árvore de n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas.*

Demonstração.

A prova segue por indução sobre o número de vértices. Para $n = 1$, a árvore tem zero arestas, e o resultado vale. Suponha, por hipótese de indução, que o teorema vale para todas as árvores com números de vértices variando de 1 a $n - 1$.

Eliminando uma aresta da árvore, a mesma se desconecta, formando árvores menores com n_1 e n_2 vértices, respectivamente (observe que $n_1 + n_2 = n$). Como $n_1 < n$

e $n_2 < n$, pela hipótese de indução, as árvores menores possuem, respectivamente, $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ arestas. Por fim, se voltarmos com a aresta que foi eliminada, o total de arestas na árvore completa de n vértices será

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1.$$

□

Teorema 1.1.3. *Toda árvore de n vértices, com $n \geq 2$ tem ao menos dois vértices de grau 1.*

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que a quantidade de vértices de grau 1 seja menor que 2. Como $n \geq 2$, então não há vértices de grau zero, e portanto, deve haver apenas um vértice de grau 1. Com isso, a quantidade de vértices com grau maior ou igual a 2 é pelo menos $n - 1$. Daí,

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 2(n - 1) + 1.$$

Como, pelo teorema da contagem dupla, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|$, e pelo teorema anterior, $|A| = n - 1$, temos

$$2|A| \geq 2(n - 1) + 1$$

$$2(n - 1) \geq 2(n - 1) + 1$$

$$0 \geq 1,$$

o que é absurdo.

□

Um grafo G é dito *bipartido* (Figura 1.11) se é possível particionar seus vértices em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta de G tem uma extremidade

em V_1 e outra em V_2 . Se o conjunto das arestas de G é formado por todas as possíveis ligações entre os vértices dos conjuntos V_1 e V_2 , então G é chamado *grafo bipartido completo*. Além disso, se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, é costume dar nome ao grafo bipartido completo com vértices em V_1 e V_2 de $K_{m,n}$.

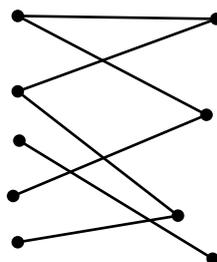


Figura 1.11: Um grafo bipartido.

Teorema 1.1.4. *Um grafo G é bipartido se, e somente se não contém ciclos de tamanho ímpar.*

Demonstração.

Suponha inicialmente que G é bipartido, com vértices particionados nos subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 . Se houver um ciclo em G , o mesmo deve possuir alternadamente vértices em V_1 e V_2 . Ora, para retornar ao ponto de partida é necessário percorrer um número par de arestas, caso contrário, dois vértices de V_1 ou V_2 deveriam estar ligados entre si, o que não é possível. Logo, G contém apenas ciclos de tamanho par.

Reciprocamente, suponha que G seja um grafo conexo que não contenha ciclos de tamanho ímpar. Para mostrar que G é bipartido, devemos encontrar subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 cujos elementos são os vértices de G . Sendo v um vértice qualquer de G , defina V_1 como o conjunto dos vértices $u \in G$ tais que existe um caminho de comprimento par entre v e u . De forma semelhante, defina V_2 como o conjunto dos vértices $u \in G$ tais que existe um caminho de comprimento ímpar entre v e u . Temos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, uma vez que se u pertencesse simultaneamente a V_1 e V_2 , então haveria

um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando u e v . Esses ciclos podem cruzar-se ou não antes de chegar a u , produzindo ciclos menores. Como o número total de arestas usado nesses ciclos é ímpar (soma dos números de arestas dos dois caminhos), isso produziria ao menos um ciclo de tamanho ímpar em G , contrariando a hipótese.

□

1.2 Grafos Eulerianos e Ciclos Hamiltonianos

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência de arestas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{r-1}v_r$. O número r é chamado *comprimento* do passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas, o mesmo é chamado de *trilha*; se $v_1 = v_r$, o passeio é uma *trilha fechada* ou *circuito*. Se além de arestas distintas, o passeio possuir vértices distintos, o mesmo é denominado *caminho* e se $v_1 = v_r$, o caminho é denominado *ciclo*, conforme o que vimos na seção anterior.

Um grafo G com n arestas é dito *euleriano* se existe uma trilha fechada de comprimento n em G . Ou seja, um grafo é euleriano se é possível percorrê-lo, voltando ao ponto de partida, utilizando cada aresta uma única vez. Por outro lado, se um grafo não é euleriano, mas tem uma trilha aberta de comprimento n , o mesmo é chamado *semieuleriano*.

Existe uma relação clara entre essa definição e dois problemas apresentados na introdução desse trabalho. De fato, o grafo representado na Figura 3 é euleriano, e o grafo apresentado na Figura 2 não o é. Observando o problema associado à Figura 3, podemos afirmar que um grafo euleriano pode ser desenhado “sem tirar o lápis do papel”, retornando ao ponto de partida.

Analisar se certo passeio é ou não um circuito euleriano pode parecer fácil, mas quando o número de arestas aumenta, o tempo que se gasta nessa análise cresce muito. Para facilitar esse trabalho, o próprio Euler, no artigo em que mostrou a solução negativa do problema das pontes de Königsberg, determinou uma condição necessária

para que um grafo seja euleriano.

Teorema 1.2.1 (Euler, 1736). *Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração.

Suponha inicialmente que G é euleriano e portanto, possui um circuito de comprimento $n = |A|$. Seja v um vértice qualquer de G . Se o circuito é executado, toda vez que se chega ao vértice v por uma aresta, deve-se sair por outra. Como o circuito euleriano nunca repete arestas, deve haver um número par de arestas incidentes a v . Logo, o grau de v é par.

Reciprocamente, suponha agora que todos os vértices de G têm grau par. A demonstração segue por indução sobre o número de arestas de G . Se $n = 1$, então $G = K_2$, que é euleriano, e portanto o teorema vale. Considere então, por hipótese de indução, que o teorema vale para todo grafo com número de arestas variando entre 1 e $n - 1$. Como G é conexo e não possui nenhum vértice de grau 1, segue que G não é uma árvore, e portanto, tem pelo menos um ciclo (que é um circuito, por definição). Seja C o circuito de maior comprimento possível em G . Se o comprimento de C é igual a n , o teorema está provado. Caso contrário, considere o grafo $H \subset G$ obtido a partir da retirada das arestas de C . A retirada de um ciclo diminui o grau de cada vértice comum com C em duas unidades, e como o grau de cada vértice é par por hipótese, segue que ao menos um das componentes conexas de H tem um vértice comum com C e todos os vértices de grau par. O grafo H pode ser desconexo; nesse caso, considere $H' \subset H$ a maior componente conexa de H com essa última propriedade. Como H' tem menos de n arestas, vale a hipótese de indução, e podemos afirmar que existe uma trilha fechada nas arestas H' . Juntando as arestas dessa trilha com as arestas de C , obtemos uma trilha fechada em G , de comprimento maior que C . No entanto, isso é absurdo, uma vez que C foi escolhida como o circuito de maior comprimento em G . Dessa forma, é obrigatório que C tenha comprimento n , e o teorema está provado.

□

Chama-se *caminho hamiltoniano* de um grafo G a um caminho que passa por todos os vértices de G (podendo passar mais de uma vez por alguma aresta). Um ciclo é *hamiltoniano* se passa por todos os vértices do grafo; por fim, um grafo G é chamado *hamiltoniano* se contém um ciclo hamiltoniano.

O problema apresentado na questão do ENEM apresentada na Introdução consiste em verificar se existe ou não um caminho hamiltoniano no grafo apresentado na Figura 4, uma vez que é permitido repetir arestas, mas não passar duas vezes pelo mesmo vértice. A resposta é afirmativa, já que o caminho $\{K, L, G, I, J, H, F\}$ é hamiltoniano.

Outro problema muito conhecido é o de um jogo de lógica chamado *Icosian* (do grego *icosi*, vinte). Consiste em um grafo que representa uma visão plana de um dodecaedro regular, no qual os vértices estão destacados. Há vinte peças, numeradas de 1 a 20, e o objetivo é colocar essas peças nos vértices do grafo, formando um caminho de modo que peças com números consecutivos sejam conectadas por uma aresta e não se possa passar mais de uma vez por um mesmo vértice. O par $\{1, 20\}$ também deve estar conectado por uma aresta, formando assim um ciclo hamiltoniano. As Figuras 1.12 e 1.13 a seguir mostram, respectivamente, o jogo e sua respectiva solução.

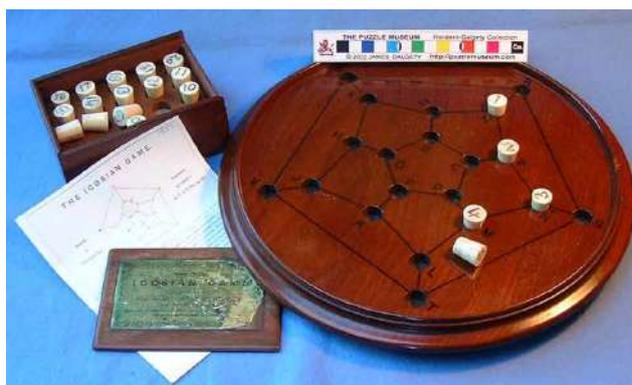


Figura 1.12: O *Icosian*.

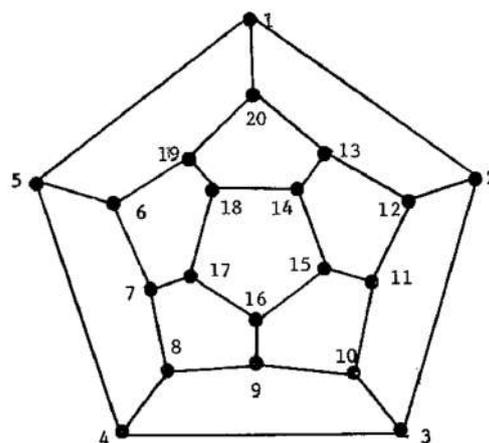


Figura 1.13: Uma solução do *Icosian*.

Capítulo 2

Grafos e Algoritmos

No atual currículo do Ensino Médio não há muitos conteúdos que enfatizem o raciocínio recursivo. No primeiro ano do Ensino Médio, pode-se enfatizar a definição de sequências usando recursões, mais notadamente as progressões aritméticas, progressões geométricas e a sequência de Fibonacci. Obviamente, existem diversos problemas de Matemática aplicada e Lógica que se resolvem com raciocínio recursivos e treinar isso com os alunos desde o início do Ensino Médio (ou até durante o Ensino Fundamental) é essencial para tornar esse raciocínio mais natural e a solução de problemas, mais simples. Os resultados e teoremas expostos nesse capítulo se baseiam no que é apresentado sobre esse assunto principalmente nas referências [1] e [3].

Pode-se aliar a esse tipo de raciocínio o de analisar, recursivamente, caminhos que minimizem custos, distâncias, ligações de dados, entre outras situações. Com a ajuda de programas simples de computador pode-se criar rotinas que analisem os custos até que aquele caminho mínimo seja finalmente encontrado. A Teoria dos Grafos é uma grande aliada nesses processos, e para isso, definimos alguns conceitos iniciais, como o de árvore geradora e de grafo valorado.

2.1 Árvores Geradoras

Dado um grafo G , chamamos de *árvore geradora* (ou *árvore de extensão*) de G a um subconjunto de arestas que forma uma árvore que contenha todos os vértices de G . Um mesmo grafo pode conter várias árvores geradoras, e todas possuem a propriedade de manter o grafo completamente conectado em uma única componente.

Abaixo, um grafo G e duas possíveis árvores geradoras.

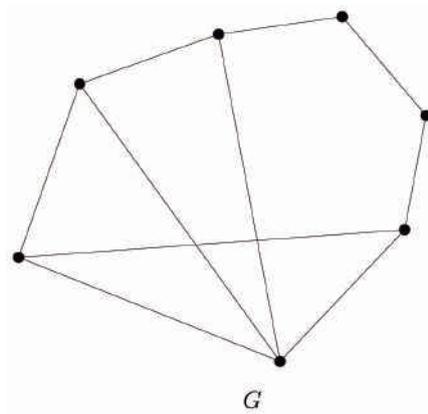


Figura 2.1: Grafo G .

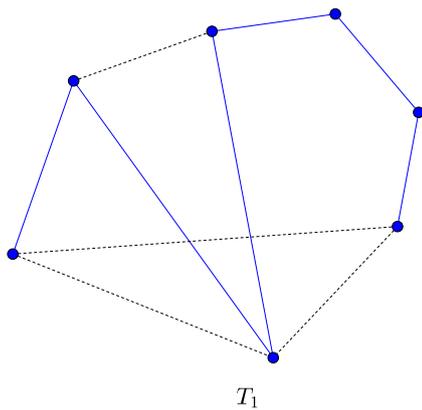


Figura 2.2: Árvore geradora T_1 de G .

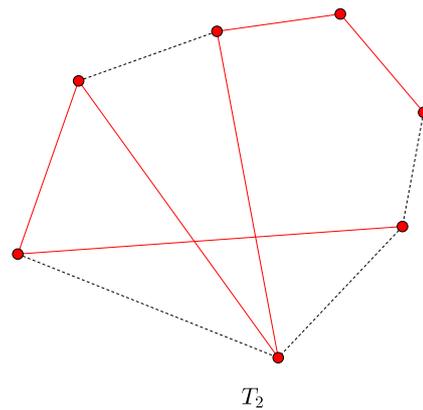


Figura 2.3: Árvore geradora T_2 de G .

2.2 Grafo Valorado

Seja G um grafo conexo qualquer, cujo conjunto das arestas é A . Chamamos de *peso* a uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ que associa cada aresta do grafo a um número real não-negativo. O conjunto do grafo em combinação com o peso é o que chamamos *grafo valorado*.

Em muitas situações cotidianas envolvendo grafos, é conveniente associar um peso a cada aresta, representando um custo de transporte de um vértice a outro ou a distância de um vértice a outro. Além disso, em muitas dessas situações, buscamos caminhos dentro do grafo que nos permitam realizar certa operação com peso mínimo.

Abaixo, exemplo de grafo valorado, em que os pesos representam as distâncias, em metros, entre as localidades representadas nos vértices.

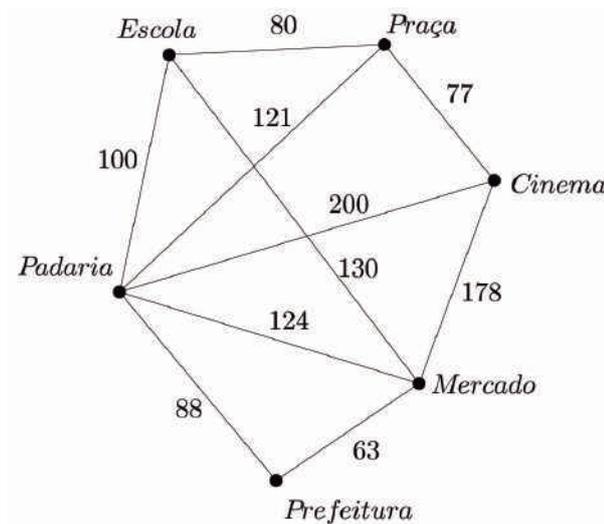


Figura 2.4: Grafo valorado de uma cidade.

2.3 Análise de Fluxo a Custo Mínimo

Em uma das mais usadas aplicações da Teoria dos Grafos, o objetivo é encontrar um caminho que conecte certos vértices de uma rede (da qual o grafo é representação) de modo a minimizar o somatório dos pesos das arestas percorridas. Dependendo do objetivo, podemos estar interessados em encontrar caminhos que passem por todos os vértices, ou apenas caminhos que leve um ponto inicial a um final de modo que o custo total do percurso seja o menor possível.

Nesse contexto, alguns algoritmos são de grande ajuda. Dado o seu caráter recursivo, podem ser facilmente programados em um computador, e constituem uma etapa essencial na análise de fluxo de mercadorias de uma empresa, por exemplo. Os algoritmos que serão abordados nessa seção são três: o de Prim, o de Kruskal e o de Dijkstra.

- O *algoritmo de Prim* consiste em encontrar uma árvore geradora tentando sempre usar arestas de peso mínimo;
- O *algoritmo de Kruskal* começa com a aresta de peso mínimo e, passo a passo, vai coletando as outras arestas de menor peso de modo a não formar ciclos e percorrer todos os vértices;
- O *algoritmo de Dijkstra* consiste em encontrar um caminho de peso mínimo entre dois vértices, atualizando o peso de cada vértice a cada escolha, e sempre elegendo o de peso acumulado mínimo.

Veremos a seguir como utilizar cada algoritmo.

2.3.1 O Algoritmo de Prim

O *algoritmo de Prim*, também chamado de *algoritmo guloso* (em inglês, *greedy algorithm*) tem como objetivo encontrar um caminho que passe por todos os vértices de um grafo valorado, sem formar ciclos e sempre utilizando arestas de menor peso possível. É talvez a primeira tentativa heurística a se fazer, em busca de uma árvore geradora com custo total mínimo. A desvantagem desse algoritmo é que ao final, seremos obrigados a admitir arestas de valor muito elevado, e portanto esse método não produz resultados tão satisfatórios (daí o nome “guloso”). Vamos ilustrar a aplicação desse algoritmo com um exemplo.

Uma empresa deseja abastecer todas as sete filiais que possui em um estado. Sabe-se que quaisquer duas filiais estão conectadas por rodovias ou estradas, mas como as condições das mesmas variam bastante, além das distâncias percorridas serem diferentes, cada percurso tem um custo distinto. A seguinte figura representa as sete filiais, as ligações entre elas e também o custo de transporte, em unidades monetárias.

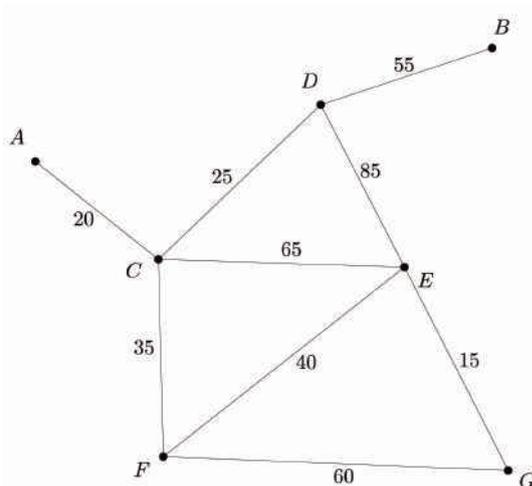


Figura 2.5: Grafo das filiais de uma empresa.

Usando o algoritmo de Prim, iniciamos escolhendo arbitrariamente um vértice, digamos C . Em seguida, selecionamos a aresta AC , de custo 20. Ainda partindo de C ,

escolhemos a aresta CF , de custo 35. Ainda saindo de C , escolhemos a aresta CD de custo 25 e partindo de F , escolhemos a aresta FE , de custo 40. Observe que os valores das arestas estão ficando cada vez mais altos. Por fim, escolhemos as arestas EG , de custo 15 e DB , de custo 55. Encontramos então uma árvore que passa por todos os vértices do grafo, sendo então uma árvore geradora. A sequência de representações a seguir (Figura 2.6) mostra os passos do algoritmo.

Apesar de rápido e relativamente intuitivo, o algoritmo de Prim não é o método mais seguro de encontrar árvores geradoras de menor custo. Resta ainda a dúvida se existe ou não uma árvore distinta da encontrada que possui um custo total menor. Procederemos então ao algoritmo de Kruskal, que ajuda a melhor encontrar uma árvore com essas características.

2.3.2 O Algoritmo de Kruskal

Tentaremos atacar o problema da árvore geradora de custo mínimo de outra forma. O *algoritmo de Kruskal* possui uma sequência de passos recursivos, a saber:

1. Encontre a aresta de peso mínimo e a selecione.
2. Entre as arestas não selecionadas que não formam ciclo com as já selecionadas, determine a de menor peso e a selecione.
3. Se o conjunto de arestas marcadas formar uma árvore geradora do grafo, pare o processo. Caso contrário, repita o passo 2.

Usaremos o algoritmo de Kruskal para determinar a árvore geradora de custo mínimo no problema das sete filiais (Figura 2.5).

Iniciamos escolhendo a aresta de menor custo, EG , com custo 15. Como a segunda aresta de menor custo, AC , não forma ciclo com EG , é a próxima a ser escolhida. Em seguida, escolhemos a aresta CD , e logo após, CF e EF . A próxima aresta de menor custo é DB , que não forma ciclo com nenhuma outra. Não poderíamos escolher EC ou

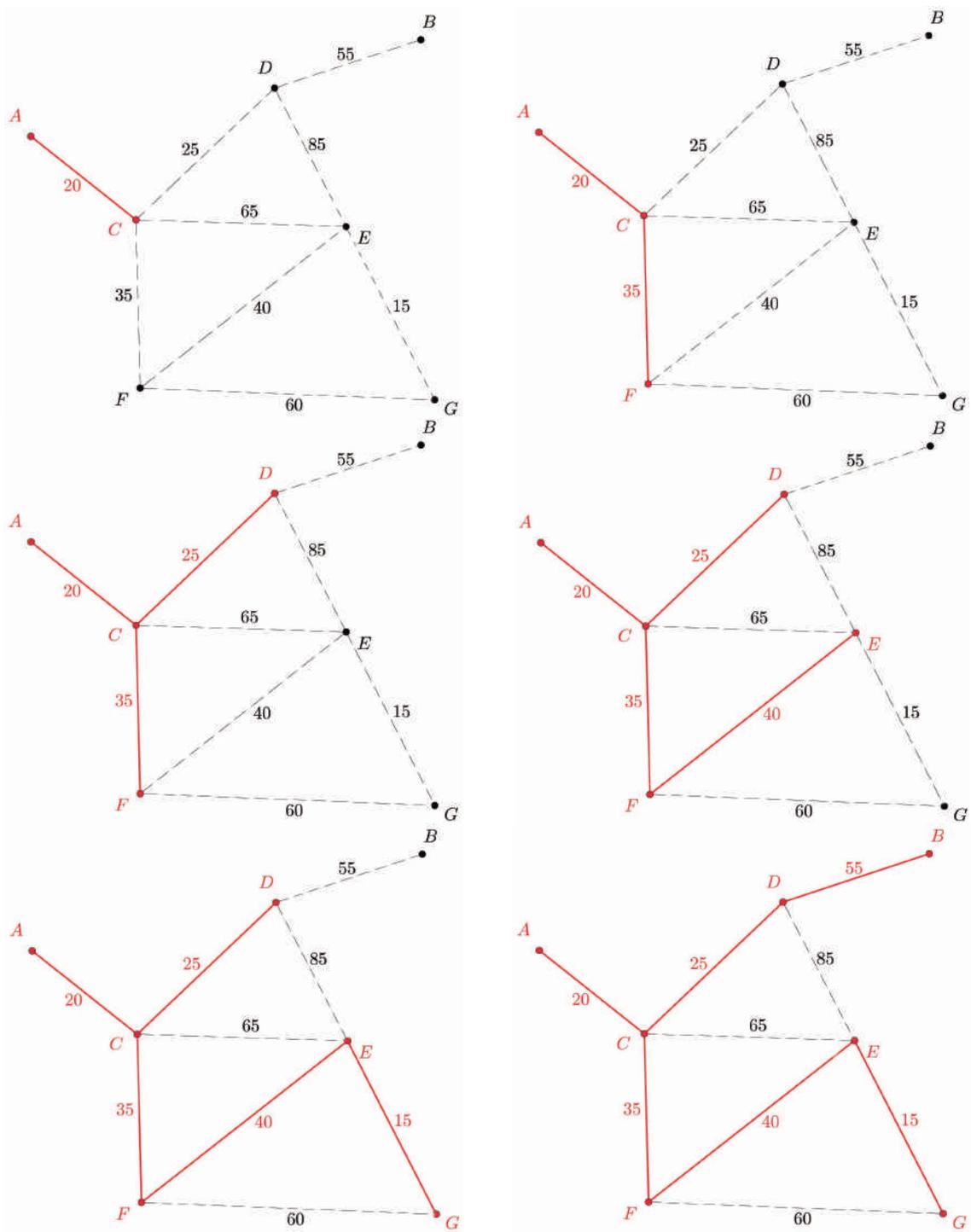


Figura 2.6: Passos do algoritmo de Prim.

FG , já que formariam ciclo com as arestas já selecionadas. Logo, a árvore geradora de custo mínimo tem peso total $15 + 40 + 35 + 20 + 25 + 55 = 190$. A seguinte sequência de representações (Figura 2.7) mostra a aplicação dos passos do algoritmo.

Teorema 2.3.1. *O algoritmo de Kruskal sempre determina a árvore geradora de peso mínimo.*

Demonstração.

Seja G um grafo valorado e conexo. Seja ainda T uma árvore geradora de G , obtida a partir dos passos do algoritmo de Kruskal. Suponhamos que T não seja a árvore geradora de peso mínimo de G , implicando que existe T' , árvore geradora de G , que não possui todas as arestas em comum com T , mas que possui peso total menor que T . Suponhamos que as arestas de T sejam numeradas, na ordem em que forem acrescentadas, por ordem crescente de peso, como $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, e que T' coincida com T pelo número máximo de arestas possível, sem que ambas sejam iguais. Isto é, existe $1 \leq k \leq n - 1$ tal que T' contenha as arestas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, mas não contenha a aresta a_{k+1} .

Ora, como T' é uma árvore geradora de G , então o acréscimo da aresta a_{k+1} gera um ciclo, digamos C , de modo que $C = T' + a_{k+1}$. Sendo T também uma árvore geradora de G , então não contém ciclos; dessa forma, o ciclo C deve conter uma aresta a' que não pertence a T . Retirando a aresta a' de C , o ciclo deixa de existir e o grafo restante, $T' + a_{k+1} - a'$ é uma árvore geradora de G que contém as arestas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$. Além disso, como a aresta a_{k+1} foi escolhida preferencialmente a a' enquanto aplicávamos os passos do Algoritmo de Kruskal (uma vez que $a' \notin T$) então o peso de a_{k+1} é menor ou igual ao peso de a' . Desse modo, a árvore geradora $T' + a_{k+1} - a'$ tem peso menor ou igual ao peso de T' e contém as arestas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$, contradizendo a minimalidade de T' .

Desse modo, segue que T é a árvore geradora de peso mínimo de G .

□

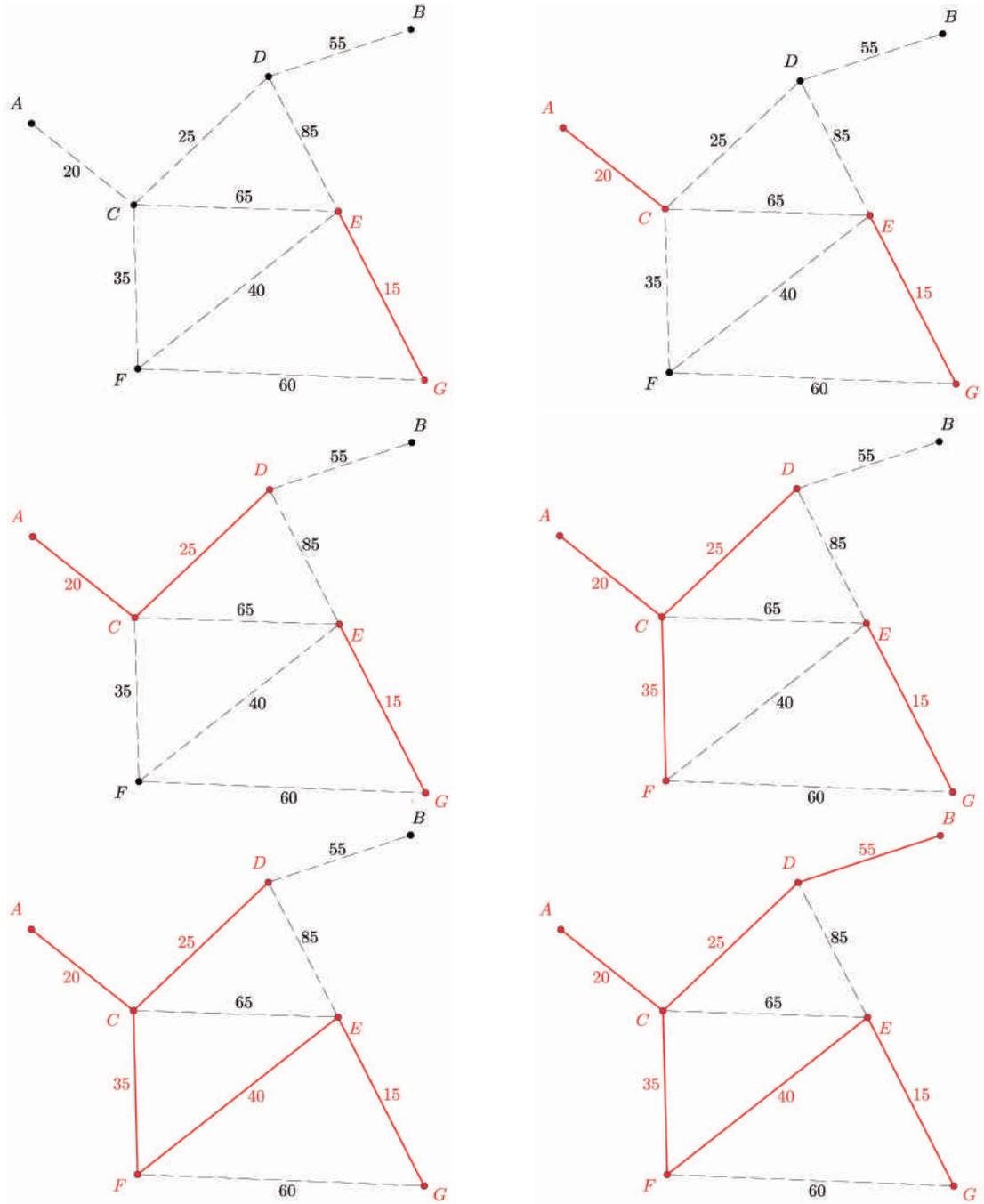


Figura 2.7: Passos do algoritmo de Kruskal.

2.3.3 O Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra tem um conjunto de passos que permite encontrar um caminho de menor custo entre dois vértices de um grafo valorado. Não é, portanto, necessário que o caminho seja hamiltoniano, apesar de continuar sendo uma árvore. Há, dessa forma, sempre um vértice de início e um vértice final, conectados por diversos vértices intermediários. Os passos do algoritmo são os seguintes.

1. Selecione o vértice de início e atribua ao mesmo o peso 0; aos outros vértices, ainda não atingidos, atribua o peso ∞ .
2. A partir do vértice de origem, calcule os pesos dos vértices adjacentes ao mesmo, somando o peso do vértice de início e da aresta que os liga; selecione, nessa segunda etapa, o vértice de menor peso.
3. Caso o vértice de menor peso selecionado seja o vértice final, encerre o processo; caso contrário, considere esse novo vértice como origem e repita o passo 2.

Um problema que pode ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra é o seguinte: Marcos deseja ir de sua casa ao cinema, conforme o “mapa” a seguir, em que as distâncias entre as localidades estão indicadas sobre os segmentos de reta que as ligam. Qual é o caminho de menor tamanho entre a casa de Marcos e o cinema?

Iniciamos o processo atribuindo peso 0 (zero) à casa de Marcos. A todos os outros vértices atribuímos peso ∞ (Figura 2.9).

Vamos agora efetuar as ligações entre a casa de Marcos e os vértices adjacentes e determinar seus respectivos pesos. Para isso, somamos os pesos das arestas com o peso do vértice de origem. Logo, os pesos atualizados dos vértices são os mostrados na Figura 2.10.

Com isso, percebemos que o caminho de menor peso é pela delegacia (uma vez que $5 < 10 < 16 < \infty$). Agora, ligaremos a delegacia aos seus vértices adjacentes,

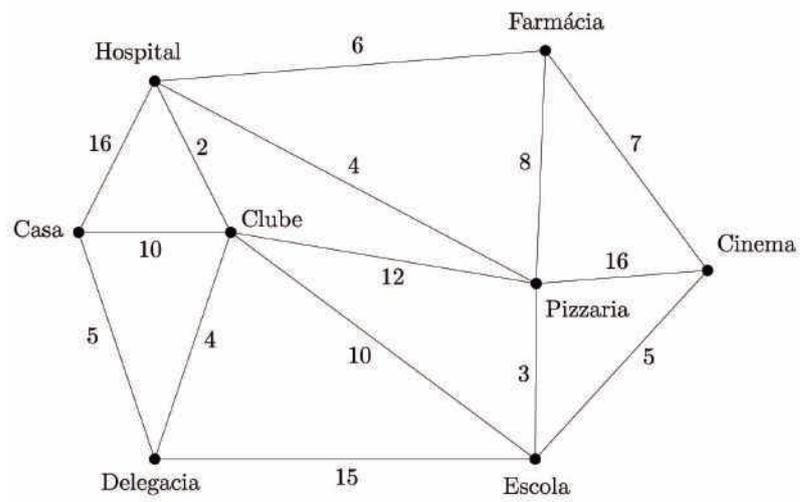


Figura 2.8: “Mapa” da cidade.

atualizando os pesos desses vértices à medida em que as ligações são feitas (Figura 2.12).

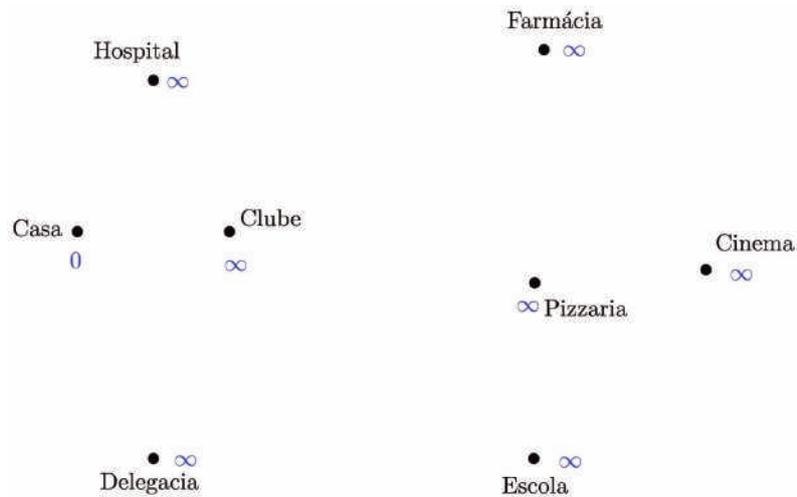


Figura 2.9: Passo 1.

Assim vemos que o caminho mais curto passa pelo clube. Ligando o clube aos seus vértices adjacentes, obtemos a Figura 2.13, e percebemos que o próximo passo é passar pelo hospital. Do hospital, vamos para a pizzaria (Figura 2.14). Da pizzaria vamos para a escola (Figura 2.15), e por fim, chegamos ao cinema (Figura 2.16). O caminho de comprimento mais curto da casa de Marcos ao cinema passa portanto pela delegacia, clube, hospital, pizzaria e escola e tem comprimento 23.

Essa é uma maneira rápida e intuitiva de encontrar o caminho mais curto entre dois pontos, que não envolve nada além de Matemática básica e pode ser aplicada a todas as séries do Ensino Médio. O raciocínio lógico é um tema recorrente em problemas de Matemática, do mais simples ao mais complexo; resolver problemas como os da tomada de decisões expressas nesse capítulo é um exercício muito importante para treinar essa habilidade.

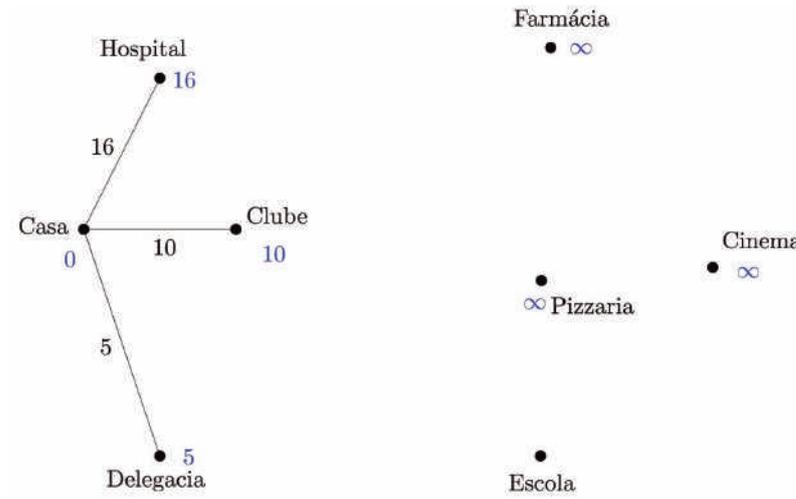


Figura 2.10: Passo 2.

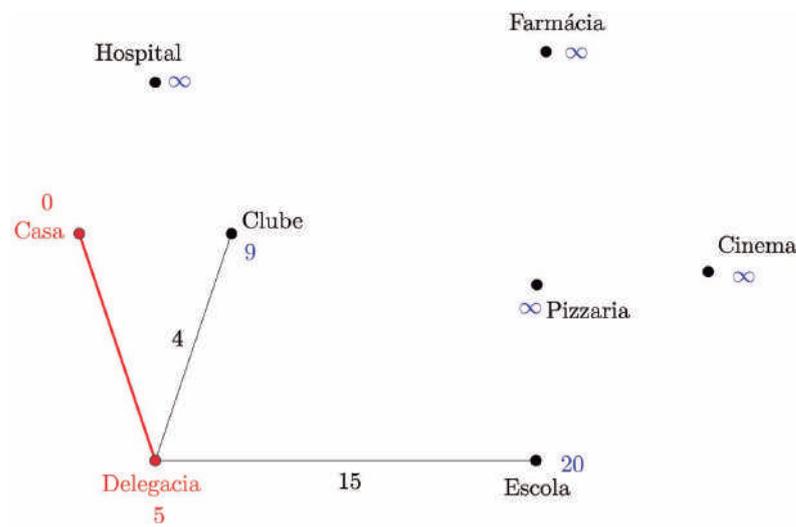


Figura 2.11: Passo 3.

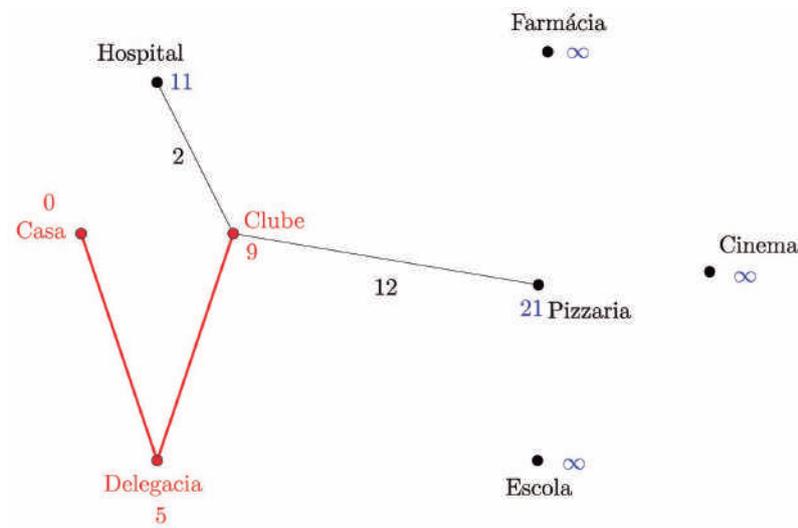


Figura 2.12: Passo 4.

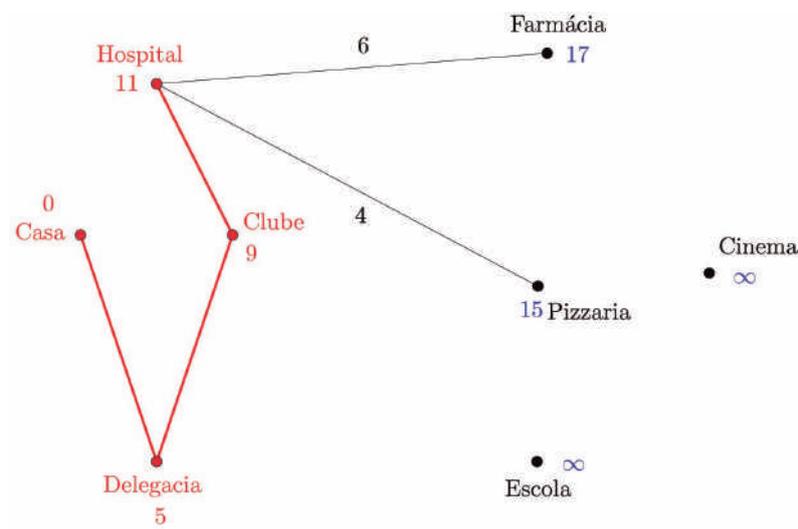


Figura 2.13: Passo 5.

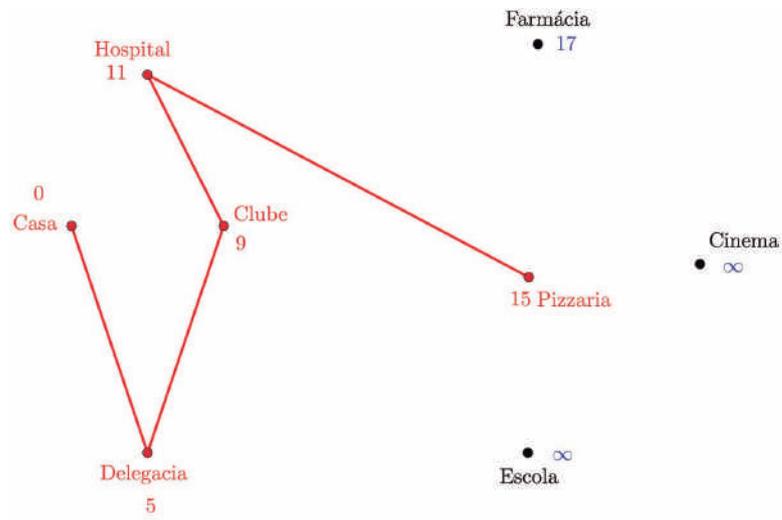


Figura 2.14: Passo 6.

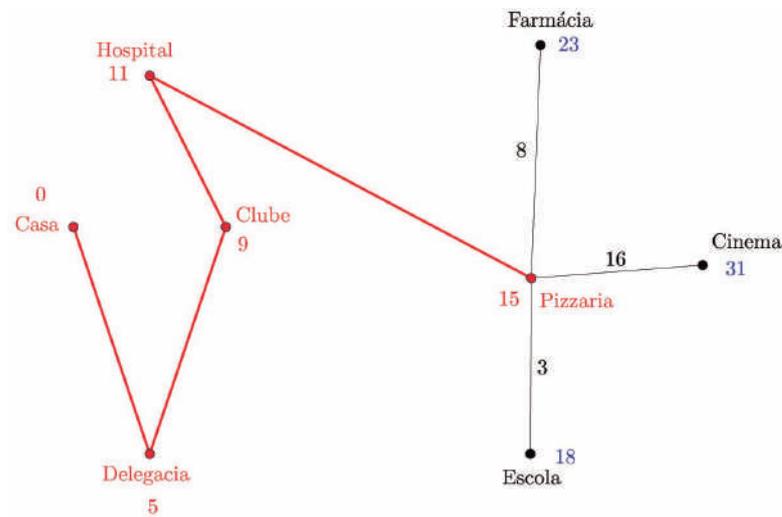


Figura 2.15: Passo 7.

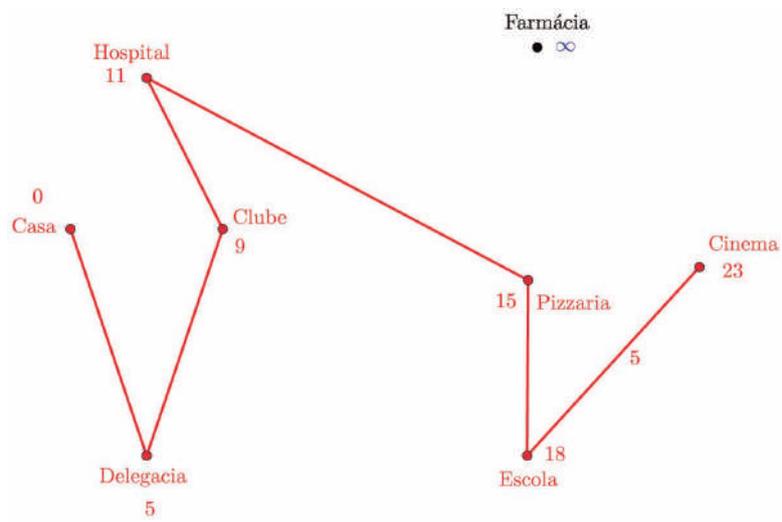


Figura 2.16: Passo 8.

Capítulo 3

Grafos e Matrizes

Nesse capítulo, dois elementos aparentemente disjuntos da Matemática (grafos e matrizes) são colocados lado a lado. Principalmente quando se utilizam gráficos em computação, a representação visual de vértices conectados por arestas não faz muito sentido; é mais prático para um programador expressar grafos por meio de algumas matrizes específicas. Além da computação, a conexão entre grafos e matrizes surge na Biologia, na Taxonomia, na Química e em muitas outras áreas do conhecimento, e será utilizada em atividades visando principalmente alunos do 2º ano do Ensino Médio. Para esse capítulo, as referências que tratam desse tema com maior profundidade são [1], [3], [5] e [6].

O conteúdo de matrizes é bastante criticado pela sua aparente falta de aplicações; o uso de grafos vem justamente dar uma aplicação interessante a esses elementos. Além de fornecer uma forma diferente de enxergar certas matrizes, é bastante útil visualizar as operações com matrizes, principalmente a multiplicação de matrizes, como formas distintas de se chegar a certo vértice de um grafo. Para ilustrar essas aplicações, definem-se as matrizes de incidência e adjacência.

3.1 Matrizes de Adjacência

Seja G um grafo com vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Chamamos *Matriz de Adjacência* de G à matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

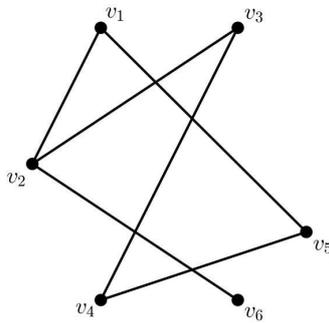


Figura 3.1: Grafo qualquer.

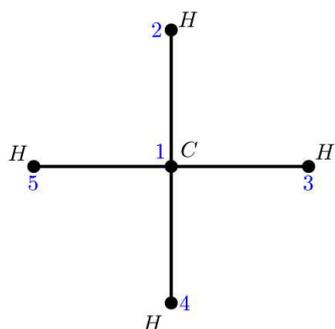
Por exemplo, a matriz de adjacência do grafo da Figura 3.1 acima é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À exceção dos digrafos, como será mostrado no problema resolvido na página 45, uma matriz de adjacência é sempre simétrica (igual à sua transposta), por definição. Nos grafos simples, nos quais não há laços, a diagonal principal da matriz de adjacência é sempre composta por zeros.

Observe ainda que um mesmo grafo pode possuir mais de uma matriz de adjacência, bastando, para isso, reordenar seus vértices. Além disso, se A_1 e A_2 são matrizes de adjacência de um mesmo grafo, então sempre existe uma permutação dos vértices que quando aplicada nas linhas e colunas de A_1 , resulta em A_2 .

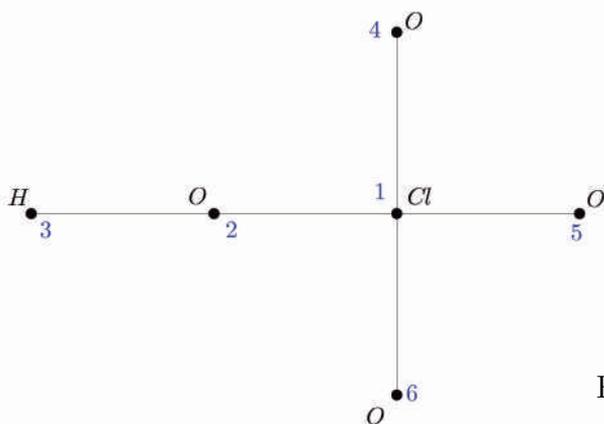
Em Química, as chamadas *fórmulas estruturais* de moléculas são um exemplo interessante de grafos. Representando cada átomo como um vértice e cada ligação química como aresta, podemos construir um grafo que represente satisfatoriamente a molécula em questão. Numerando os vértices de uma maneira pré-estabelecida, a matriz de adjacência dessa molécula também pode ser estudada, trazendo diversos resultados interessantes. A seguir, algumas moléculas e suas respectivas representações como grafos e matrizes de incidência.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.3: Matriz de adjacência do CH_4 .

Figura 3.2: Grafo representativo da molécula de metano (CH_4).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.5: Matriz de adjacência do $HClO_4$.

Figura 3.4: Grafo representativo da molécula de ácido perclórico ($HClO_4$).

Agora, alguns resultados importantes sobre matrizes de adjacência.

Teorema 3.1.1. *Em um grafo simples de n arestas, o número máximo de matrizes de adjacência distintas é $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

Demonstração.

Esse é um exercício simples de Análise Combinatória. Se o grafo é simples, significa que toda a diagonal principal da matriz de adjacência será composta por zeros. Além disso, como a matriz de adjacência é, por definição, uma matriz simétrica, basta analisar os elementos que se localizam acima da diagonal principal. Esses elementos são em número de $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Em cada um desses elementos, há duas possibilidades de valor: 0 ou 1. Logo, pelo princípio multiplicativo, o total de matrizes de adjacência será

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ vezes}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

□

O próximo teorema é muito importante em problemas que envolvem fluxo de tráfego ou análise de transmissão de sinais eletromagnéticos entre diferentes receptores.

Teorema 3.1.2. *Seja G um grafo de vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Para cada $k \in \mathbb{N}$, o elemento b_{ij} da matriz $B = A^k$ representa o número de caminhos que vão do vértice v_i ao vértice v_j de G que usam exatamente k arestas.*

Demonstração.

A prova é por indução sobre k .

Para $k = 1$, temos $B = A$, e nesse caso o resultado é válido, uma vez que $a_{ij} = 1$ se há um caminho de comprimento 1 (ou seja, uma aresta) entre v_i e v_j e $a_{ij} = 0$ quando há um caminho de comprimento 0 entre v_i e v_j (isto é, não há arestas ligando v_i e v_j).

Suponhamos agora que o resultado vale $B' = A^{k-1}$, isto é, o elemento b'_{ij} representa exatamente o número de caminhos de tamanho $k-1$ entre os vértices v_i e v_j . Agora, cada caminho de tamanho k entre v_i e v_j pode ser dividido em duas partes:

um caminho de tamanho $k - 1$ que liga v_i a certo vértice v_m somado à aresta que conecta v_m a v_j . O total de caminhos de tamanho k de v_i a v_j é então igual ao número de caminhos de tamanho $k - 1$ de v_i a v_m , que são em número de $\sum_m b'_{im}$. Agora, sabemos que o valor do elemento $a_{mj} \in A$ diz se existe ou não uma aresta que liga v_m a v_j , de sorte que $a_{mj} = 1$ se tal aresta existe e $a_{mj} = 0$ se não existe. Logo, se for possível combinar um caminho de tamanho $k - 1$ com a aresta $v_m v_j$, o elemento b'_{ij} será multiplicado por 1; caso não exista uma aresta conectando v_m a v_j , esse elemento será multiplicado por 0. Por fim, usando a hipótese de indução (de que b'_{ij} representa o número de caminhos de tamanho $k - 1$ entre v_i e v_m), a soma acima pode ser reescrita como

$$\sum_m b'_{im} = \sum_m b'_{im} a_{mj} = b_{ij},$$

e portanto, o elemento b_{ij} da matriz $B = A^k$ representa o número de caminhos entre v_i e v_j que usam exatamente k arestas. O resultado está provado.

□

Uma aplicação interessante é o problema a seguir, adaptado de [6], e que pode facilmente ser aplicado a alunos de Ensino Médio. Nesse trabalho, será adotado o símbolo \triangle para indicar o final da solução de um problema.

Problema. Uma rede de comunicação tem cinco estações com transmissores de potências distintas. Na matriz A abaixo, sabe-se que $a_{ij} = 1$ significa que a estação i pode enviar sinal diretamente para a estação j , e $a_{ij} = 0$ significa que o sinal da estação i não alcança a estação j .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Explique o fato de a diagonal principal da matriz A ser composta apenas por elementos nulos.

- (b) Se A é a matriz de adjacência de um grafo cujo vértices são as estações, faça uma representação visual desse grafo.
- (c) Calcule a matriz $B = A^2$. Qual o significado do elemento $b_{14} = 3$?
- (d) Calcule a matriz $C = A + A^2$. Qual o significado do elemento $c_{15} = 2$?
- (e) Se a matriz A fosse simétrica, o que isso significaria?

Solução.

- (a) A diagonal principal contendo apenas elementos nulo indica que uma estação não pode transmitir diretamente a si própria.
- (b) Como há cinco estações, há exatamente cinco vértices no grafo. Cada elemento da matriz A igual a 1 será representado por uma aresta. Dessa forma, um grafo possível seria

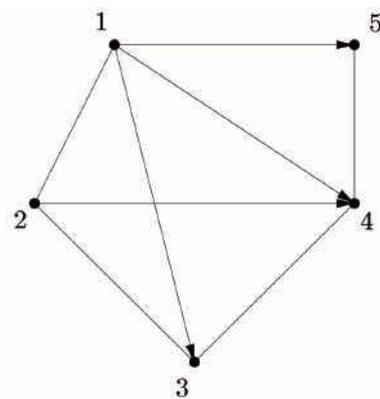


Figura 3.6: Locais de Transmissão.

As setas indicam o sentido de transmissão entre as estações. Se duas estações podem transmitir entre si reciprocamente, então a ligação foi simbolizada por um único segmento de reta. Grafos cujas arestas possuam alguma orientação são chamados *grafos direcionados*, ou *digrafos*.

- (c) Calcule a matriz $B = A^2$. Qual o significado do elemento $b_{14} = 3$?

Temos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O elemento $b_{14} = 3$ indica que há três caminhos de tamanho 2 ligando as estações 4 e 1. Para descobrir quais são esses caminhos, basta expressar o elemento b_{14} como o produto dos elementos da 1ª linha pela 4ª coluna de A e analisar os elementos não-nulos. Assim:

$$b_{14} = (0 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 3.$$

Logo, pode-se transmitir da estação 1 à 4 por meio dos caminhos de tamanho 2: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ e $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4$.

- (d) Calcule a matriz $C = A + A^2$. Qual o significado do elemento $c_{15} = 2$?

Ao somar as matrizes A e A^2 , estaremos encontrando de quantos modos distintos podemos transmitir da estação 1 para a 5 por caminhos de tamanho 1 ou 2.

Temos

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O elemento $c_{15} = 2$ indica que podemos transmitir para a estação 1 para a 5 de duas formas: diretamente, pela ligação $1 \rightarrow 5$ ou retransmitindo por meio da estação 4, por um caminho de tamanho 2 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$).

- (e) Se a matriz A fosse simétrica, o que isso significaria?

Se A fosse simétrica, então toda estação que consegue transmitir para uma segunda estação também consegue receber sinal da segunda estação, e vice-versa.

△

O mesmo problema pode ser adaptado para outras situações: suponha uma empresa de transportes que possua cinco pontos de carga e descarga numa região e que os caminhões das empresas possam deslocar-se pela região ligando esses pontos, de modo que os elementos da matriz A indiquem se existe uma estrada que liga os pontos i e j , com $a_{ij} = 1$ significando a existência de uma estrada e $a_{ij} = 0$ indicando a não-existência. Um caminhão deve fazer uma entrega fazendo escala em, no máximo, mais um ponto diferente do ponto de partida e do de chegada. Quantos são os percursos possíveis?

Se considerarmos a resolução do problema anterior, esse problema pode ser facilmente resolvido analisando quais os elementos não-nulos da matriz $A + A^2$.

3.2 Matrizes de Incidência

Outro tipo de matriz associados ao um grafo é a chamada *matriz de incidência*, que representa a relação entre vértices e arestas de um grafo.

Seja G um grafo com vértices v_1, v_2, \dots, v_n e arestas a_1, a_2, \dots, a_k . Chama-se *Matriz de Incidência* do grafo G à matriz $W = (w_{ij})_{n \times k}$, definida por

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } a_j \text{ é incidente em } v_i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como exemplo, considere o grafo de vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 , e arestas $a_1 = v_1v_2$, $a_2 = v_1v_3$, $a_3 = v_3v_4$, $a_4 = v_4v_5$, $a_5 = v_2v_5$ e $a_6 = v_1v_5$. Sua matriz de incidência é

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que em um grafo simples, a matriz de incidência sempre possui apenas dois elementos iguais a 1 em cada coluna e todos os demais iguais a zero. Além disso, em qualquer matriz de incidência, temos que vale a relação $d(v_i) = \sum_{\ell=1}^k w_{i\ell}$.

Nos digrafos, a matriz de incidência tem uma definição um pouco diferente, dependendo se a aresta orientada a_j tem origem ou extremidade no vértice v_j .

Seja G um digrafo com vértices v_1, v_2, \dots, v_n e arestas orientadas a_1, a_2, \dots, a_k . Chama-se *Matriz de Incidência* desse digrafo à matriz $W = (w_{ij})_{n \times k}$, definida por

$$w_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se a aresta } a_j \text{ tem origem em } v_i, \\ -1, & \text{se a aresta } a_j \text{ tem extremidade em } v_i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como exemplo, considere o digrafo a seguir e sua matriz de incidência W ao lado.

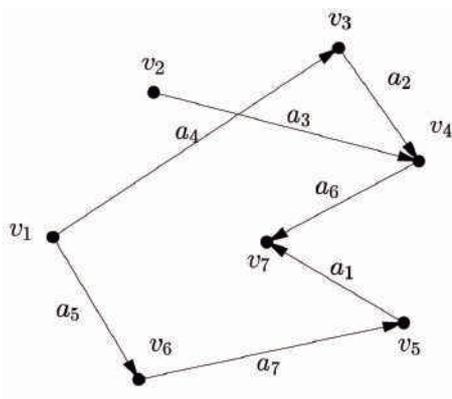


Figura 3.7: Um digrafo.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.8: Matriz de incidência do digrafo ao lado.

3.3 Armazenamento de dados

Matrizes são especialmente importantes no contexto da computação moderna, uma vez que são usadas para armazenar de maneira rápida qualquer quantidade de dados. No entanto, é sempre uma grande preocupação o fato de que a construção de matrizes, bem como as operações com as mesmas, tomem muito espaço de memória ou ainda, demorem muito tempo para serem realizadas. É interessante, portanto, encontrar um ótimo de armazenamento, que não elimine informações importantes e que não consuma muito espaço de armazenamento.

Pensando em um grafo, já foi mostrado que o mesmo pode ser representado por uma matriz de adjacência cujos elementos são os números 0 e 1, que em computação são chamados comumente de *bits*. O Teorema 3.1.1 mostra que para armazenar um grafo qualquer em forma de bits, por meio da sua matriz de adjacência, consome no máximo $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ bits. Não há confirmação, no entanto, que essa quantidade de informação seja a menor possível.

Para facilitar a análise, vamos considerar os grafos conexos mais simples: as árvores. Para isso, consideremos a árvore da figura a seguir.

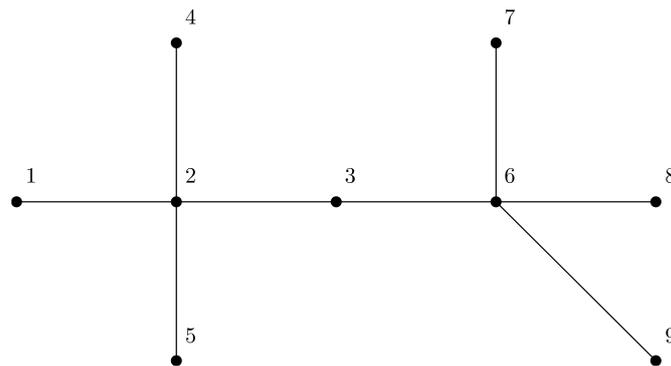


Figura 3.9: Árvore rotulada.

Uma vez que a cada vértice foi associado um “nome”, na forma de números naturais de 1 a 9, chamamos este grafo de *árvore rotulada*. A matriz de adjacência

dessa árvore é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que pode parecer uma maneira bastante dispendiosa de armazenar um grafo tão simples. Na verdade, como o Teorema 3.1.1 nos diz, basta armazenar os elementos dessa matriz localizados abaixo da diagonal principal, uma vez que ela é simétrica e a diagonal principal é formada por zeros. Numa árvore de n vértices, novamente, o gasto é de no máximo $\frac{n^2-n}{2}$ bits.

Caso escolhamos armazenar a árvore da Figura 3.9 listando, em cada coluna de uma matriz M os vértices que são conectados por uma aresta qualquer, teremos a representação a seguir.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Parece ser uma maneira extremamente econômica de se escrever a árvore mostrada, mas não podemos esquecer que agora foi necessário escrever os números de 1 a 9 na matriz, ao invés dos bits 0 e 1. Para armazenar em um computador uma árvore por meio de suas arestas, como na matriz M , será necessário escrever o rótulo de cada vértice em bits, o que significa usar o código binário.

Teorema 3.3.1. *Para representar um número n na base 2, são necessários, no máximo, $(\log_2 n) + 1$ bits.*

Demonstração.

Com b bits, podemos representar todos os números de 0 a 2^{b-1} . Dessa forma, se $n = 2^{b-1}$, temos que $b - 1 = \log_2 n$, donde $b = (\log_2 n) + 1$. Se tomarmos m com $0 < m < 2^{n-1}$, então $\log_2 m < \log_2 n$, uma vez que a função logarítmica de base 2 é

crescente.

□

Em geral, pode-se afirmar que é necessário usar *cerca de* $\log_2 n$ bits (adicionando 1 ou subtraindo 1 para certos casos) para representar o número n . Dessa forma, uma matriz com o formato de M teria no máximo $2n \cdot [(\log_2 n) + 1]$ elementos.

Para armazenar árvores rotuladas com um número muito grande de vértices, é natural perguntar qual dos dois métodos seria mais satisfatório em termos de uso de bits; basta então analisar o que ocorre com as funções $2n \cdot [(\log_2 n) + 1]$ e $\frac{n^2-n}{2}$, quando n cresce arbitrariamente.

Teorema 3.3.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \cdot [(\log_2 x) + 1]}{\frac{x^2-x}{2}} = 0.$$

Demonstração.

Aplicamos a regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \cdot [(\log_2 x) + 1]}{\frac{x^2-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (\log_2 x) + 1}{\frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x \cdot \ln(2)}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\ln(2)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

□

Dessa forma, para uma árvore com um número muito grande de vértices, a segunda representação consome menos espaço de memória, de modo que mesmo se escrevermos todos os n vértices na forma de bits, estaremos sempre ocupando menos espaço para armazenar a matriz M que a matriz de adjacência A .

Capítulo 4

Grafos e o Teorema de Euler para os poliedros

Ainda no 2º ano do Ensino Médio, é comum o estudo da geometria espacial. Entre muitos resultados e teoremas importantes, um que se destaca é a relação de Euler para os poliedros convexos, que apesar de sua simplicidade, causa certo estranhamento quando vista pela primeira vez.

A relação de Euler estabelece que, em um poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces, vale a expressão $V + F = A + 2$. O objetivo desse capítulo é estudar uma fórmula similar existente para certos tipos de grafos, e sua relação direta com a relação já conhecida para os poliedros, oferecendo assim uma nova forma de explicar porque a famosa relação é verdadeira.

Outro objeto de estudo desse capítulo são os poliedros regulares, conhecidos desde a Antiguidade, como evidencia seu uso na obra *Timeu* de Platão (427–347 a.C.) para representar os quatro elementos da natureza (fogo, terra, ar e água) e o universo. Mostraremos como a relação de Euler, aliada a outros teoremas importantes, pode ser utilizada para mostrar que há apenas cinco desses poliedros. As referências que tratam desse tema muito bem são [1], [2], [7] e [8].

4.1 Grafos Planares

Um grafo G é chamado *planar* se pode ser desenhado num plano, de modo que seja conexo e suas arestas não se intersectem em quaisquer pontos, a não ser nos vértices que são comuns a elas.

Abaixo, o grafo dodecaédrico (Figura 4.1), presente no *Icosian* (Figura 1.12), que é um exemplo de um grafo planar, e o chamado *grafo de Petersen* (Figura 4.2), um grafo não planar.

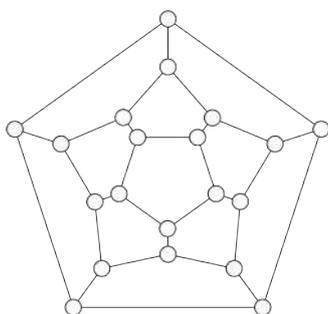


Figura 4.1: Grafo dodecaédrico.

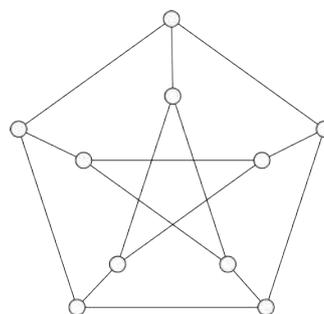


Figura 4.2: Grafo de Petersen.

Para facilitar o entendimento, trataremos um grafo planar como um mapa: cada região plana limitada pelas arestas do grafo serão chamadas países (ou *faces*); como o grafo é conexo, exatamente uma dessas faces é infinita, à qual chamaremos *oceano*, e os demais países são regiões finitas.

Observe que os grafos K_1 , K_2 e K_3 são planares, uma vez que são formados por 1, 2 e 3 vértices, respectivamente (Figura 4.3). O grafo K_4 também é planar, mas sua representação como na Figura 4.4 não deixa tão clara essa propriedade. Se adaptarmos K_4 representando-o como na Figura 4.5, fica mais fácil perceber que de fato trata-se de um grafo planar.

O grafo K_5 (Figura 4.6) não é planar, mas para mostrar esse fato, precisamos de um teorema mais complexo (o mesmo vale para o grafo de Petersen (Figura 4.2)). O seguinte teorema, devido a Euler, é uma fórmula muito útil (e bastante familiar ao caso dos poliedros) e que relaciona todos esses elementos.

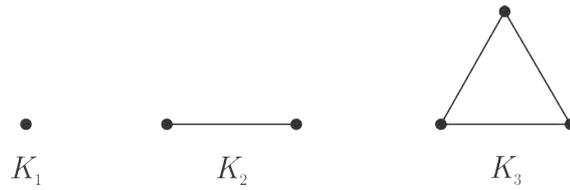


Figura 4.3: Grafos planares K_1 , K_2 e K_3 .

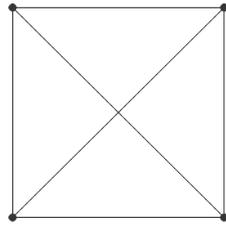


Figura 4.4: O grafo K_4 .

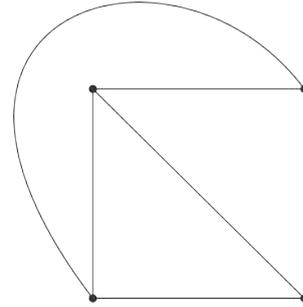


Figura 4.5: K_4 “adaptado”.

Teorema 4.1.1 (Euler). *Em um grafo planar G , se v representa o número de vértices, f o número de países e a o número de arestas, então $v + f = a + 2$.*

Demonstração.

A demonstração segue por indução completa sobre o número de arestas.

Se $a = 0$, o grafo é K_1 , formado por apenas um vértice, nenhuma aresta e um país (o oceano). Nesse caso,

$$v + f = 1 + 1 = 2 = 0 + 2 = a + 2.$$

Suponha agora que a relação valha para todos os grafos planares com número de arestas de 0 a $n - 1$ e mostraremos sua validade para um grafo G de n arestas.

Ora, se o grafo G é uma árvore e $a = n$, então $v = n + 1$. Além disso, como G só determina uma região plana, segue que $f = 1$. Logo, nesse caso,

$$v + f = (n + 1) + 1 = n + 2 = a + 2,$$

e o teorema vale.

Se G não é uma árvore, então deve conter ao menos um ciclo, digamos C . Sendo a uma aresta de C , sabemos que sua remoção quebra o ciclo, e mais que isso, faz com que os dois países que eram separados por essa aresta se combinam em um. Logo, o grafo $G - a$ possui uma aresta a menos que G , uma região a menos e o mesmo número de vértices. Como $|A(G)| = n$, temos $|A(G - a)| = n - 1$, valendo então a hipótese de indução para $G - a$, de modo que

$$v + (f - 1) = (n - 1) + 2 \Rightarrow v + f = n + 2 \Rightarrow v + f = a + 2.$$

Isso completa a indução e demonstra o teorema.

□

Vamos usar esse teorema para mostrar que os grafos K_5 (Figuras 4.6) e $K_{3,3}$ (Figura 4.7) (grafo bipartido completo com vértices em dois conjuntos de 3 elementos) não são planares. Nas duas demonstrações a seguir, consideremos que o símbolo $\lceil x \rceil$ represente o menor inteiro maior ou igual a x .

Teorema 4.1.2. *O grafo completo de 5 vértices, K_5 (Figura 4.6), não é planar.*

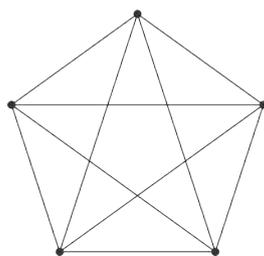


Figura 4.6: K_5 .

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que K_5 é planar. Desse modo, para ele vale a relação de Euler, com $v = 5$ e $a = 10$. Daí.

$$v + f = a + 2 \Rightarrow 5 + f = 10 + 2 \Rightarrow f = 7.$$

Dessa forma, o grafo deve possuir 7 países.

Por outro lado, em qualquer grafo planar G , cada país deve ser limitado por no mínimo 3 arestas, de modo que o número total de arestas é no mínimo $3f$. Assim, deve haver no mínimo $\lceil \frac{3f}{2} \rceil$ arestas distintas, uma vez que cada aresta está associada a dois países.

No caso de K_5 , deveria haver no mínimo $\lceil \frac{3 \cdot 7}{2} \rceil = 11$ arestas, o que é absurdo. Logo, temos que K_5 não é planar.

□

O grafo de Petersen (Figura 4.11) pode ser transformado no grafo K_5 , se fizermos coincidir os vértices internos no centro do pentágono mais externo, de modo que o mesmo não é planar.

Teorema 4.1.3. *O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ (Figura 4.7) não é planar.*

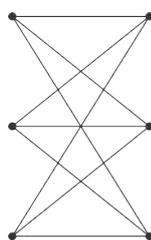


Figura 4.7: $K_{3,3}$.

Demonstração.

O grafo $K_{3,3}$ é formado por dois subconjuntos V_1 e V_2 , cada um com 3 vértices. Suponha, por absurdo, que $K_{3,3}$ é um grafo planar. Desse modo, $K_{3,3}$ deve obedecer à Relação de Euler, com $v = 6$ e $a = 9$. Daí

$$v + f = a + 2 \Rightarrow 6 + f = 9 + 2 \Rightarrow f = 5.$$

No caso do grafo $K_{3,3}$, cada ciclo tem comprimento mínimo de 4, uma vez que se um ciclo tivesse comprimento ímpar, deveria haver ao menos dois pontos pertencentes

a um mesmo subconjunto, V_1 ou V_2 , conectados, o que não é possível, pelo fato de o grafo ser bipartido.

Assim, o total de arestas é, no mínimo, $4f$. Desse modo, deve haver, ao menos, $\lceil \frac{4 \cdot 5}{2} \rceil = 10$ arestas, mas isso é absurdo, uma vez que $K_{3,3}$ possui 9 arestas.

Daí, $K_{3,3}$ não é planar.

□

Um problema de lógica bastante conhecido é resolvido através do teorema 4.1.3 anterior. A figura a seguir mostra três casas, as quais devem ser conectadas a três serviços (gás, água e energia elétrica). É possível fazer essas conexões por meio de tubulações que estejam num mesmo plano e não se cruzem?

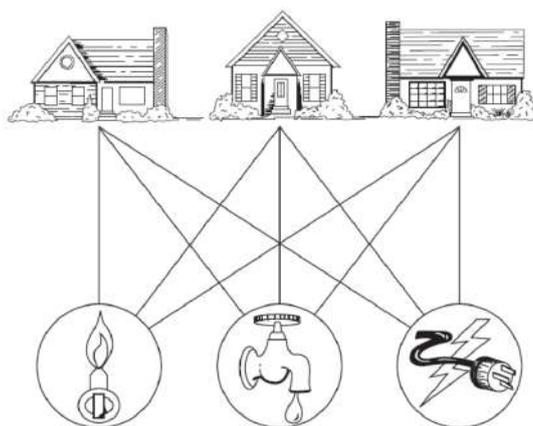


Figura 4.8: Três casas e três serviços.

Podemos ver que esse problema pode ser reescrito em termos de grafos como “É possível ligar todos os vértices do grafo bipartido completo $K_{3,3}$ sem que suas arestas se cruzem?”. A resposta é evidentemente não, pois caso isso fosse possível, o grafo $K_{3,3}$ seria planar, contrariando o teorema 4.1.3. Assim, não é possível fazer as ligações entre os serviços e as casas nas condições descritas.

Teorema 4.1.4. *Se um grafo G é planar, então G tem pelo menos um vértice de grau menor ou igual a 5.*

Demonstração.

Se $v \leq 6$, o resultado é imediato. Se $v > 6$, vamos supor que todo vértice de G possua grau maior que 5.

Como cada país é limitado por no mínimo 3 arestas, então temos que o número a de arestas é tal que $2a \geq 3f$. Da relação de Euler, temos $f = 2 + a - v$. Daí,

$$3f \leq 2a \Rightarrow 3(2 + a - v) \leq 2a \Rightarrow a \leq 3v - 6.$$

Além disso, pelo teorema de contagem dupla,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|a| = 2a \leq 2(3v - 6) = 6v - 12,$$

de modo que a soma de todos os graus dos vértices do grafo G é menor ou igual a $6v - 12$.

Se todos os vértices tivessem grau maior que 5, então teríamos

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6v \Rightarrow 6v \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq 6v - 12,$$

o que é absurdo.

Logo, ao menos um dos vértices deve ter vértice de grau menor que 5.

□

4.2 Poliedros Regulares

Agora estamos preparados para analisar a Relação de Euler para os poliedros convexos. Em primeiro lugar, vamos associar, a cada poliedro convexo, um grafo planar com a mesma quantidade de vértices do poliedro.

Removendo uma face e deformando as restantes, chegamos a um grafo planar, em que a face retirada foi substituída pelo oceano. Dessa forma, a quantidade de faces

e arestas do grafo planar também coincide com as mesmas quantidades presentes no poliedro convexo. Um exemplo desse processo está mostrado a seguir.

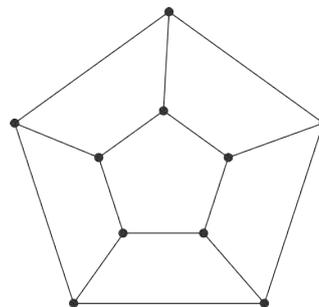
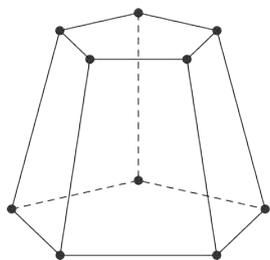


Figura 4.9: Um poliedro convexo P . Figura 4.10: A representação de P como grafo planar.

O poliedro P da Figura 4.9 é um tronco de pirâmide de bases pentagonais. Na representação como grafo planar, retiramos a maior face pentagonal e “encolhemos” as outras faces, de modo a ficarem contidas no que era o interior desse pentágono maior. A falta do pentágono maior foi substituída pela presença do oceano, e a quantidade de arestas se manteve.

Observando esse tipo de correspondência, podemos enunciar o teorema de Euler para os poliedros convexos.

Teorema 4.2.1 (Euler). *Em um poliedro P com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação*

$$V + F = A + 2.$$

Demonstração.

Esse teorema é uma consequência direta do Teorema de Euler para grafos planares, observada a correspondência acima descrita.

□

A seguir, um teorema bastante útil.

Teorema 4.2.2. *Seja P um poliedro convexo e \mathcal{F} a face de P com o menor número de arestas. Sendo e o número de arestas de \mathcal{F} , temos $3 \leq e \leq 5$.*

Demonstração.

Consideremos inicialmente que P possui F faces, A arestas e V vértices, e que G seja o grafo planar associado a P .

Como toda face é limitada por no mínimo três arestas, temos que $e \geq 3$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideraremos V_k como o número de vértices dos quais partem exatamente k arestas, e F_k o número de faces limitadas por k arestas. Observemos que se $k < 3$, então $V_k = F_k = 0$, pois, como já foi observado, cada face deve ser limitada por no mínimo três arestas.

Seja então $k \geq 3$. Nessa situação, como toda aresta se liga a dois vértices e também é comum a duas faces,

$$\sum_k k \cdot V_k = \sum_k k \cdot F_k = 2A.$$

Suponhamos, por absurdo, que cada face de P é limitada por seis ou mais arestas. Dessa forma, temos

$$\sum_k k \cdot F_k \geq \sum_k 6 \cdot F_k \Rightarrow 2A \geq 6 \cdot \sum_k F_k = 6F \Rightarrow 2A \geq 6F,$$

donde $A \geq 3F$, ou ainda, $F \leq \frac{1}{3}A$.

Por outro lado, como cada vértice tem grau mínimo de 3, temos

$$\sum_k k \cdot V_k \geq 3V \Rightarrow 2A \geq 3V,$$

donde concluímos que $V \leq \frac{2}{3}A$.

Da relação de Euler, temos $A = V + F - 2$, e utilizando as desigualdades obtidas, vem

$$A = V + F - 2 \leq \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A - 2 \Rightarrow A \leq A - 2,$$

o que é uma contradição.

Logo, deve haver uma face de P com no máximo cinco arestas. Sendo essa face \mathcal{F} , temos que $e \leq 5$, de modo que $3 \leq e \leq 5$.

□

Procederemos agora para um problema clássico: a determinação do número de poliedros regulares. Dizemos que um poliedro é *regular* se possui as seguintes características:

1. Todas as faces são polígonos regulares (*i.e.*, possuem ângulos congruentes entre si e lados congruentes entre si) com mesmo número de lados;
2. De cada vértice, parte o mesmo número de arestas (*i.e.*, todos os vértices têm mesmo grau);

Afirma-se, em geral sem muito rigor, que há apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Esse fato será demonstrado a seguir, mas por hora, vamos oferecer as representações desses poliedros regulares na forma de grafos planares.

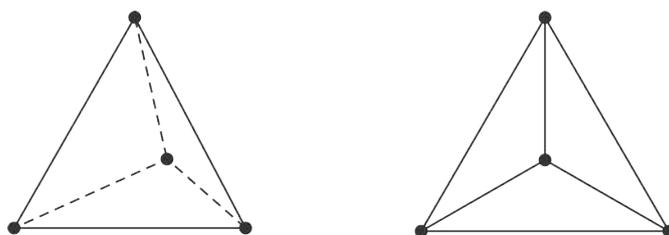


Figura 4.11: Tetraedro regular.

Teorema 4.2.3. *Existem exatamente cinco poliedros regulares.*

Demonstração.

Seja P um poliedro regular com A arestas, F faces e V vértices. Seja ainda G o grafo planar associado a P .

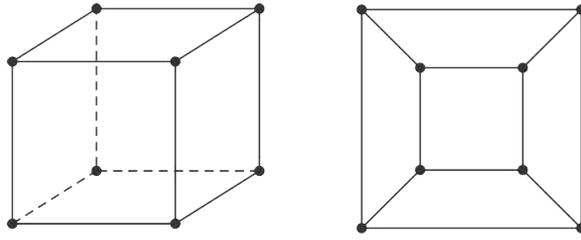


Figura 4.12: Hexaedro regular (cubo).

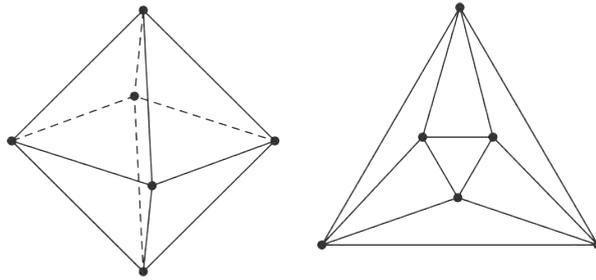


Figura 4.13: Octaedro regular.

Sendo P regular, cada face desse poliedro possui o mesmo número de arestas, que representaremos por n . O teorema 4.2.2 garante que $3 \leq n \leq 5$. Além disso, como cada aresta de P corresponde a uma única aresta de G , então todos os vértices de G devem ter o mesmo grau, digamos g , com $g \geq 3$.

Utilizando os mesmos argumentos usados na demonstração do teorema 4.2.2, concluímos que $g \cdot V = 2A$ e $n \cdot F = 2A$ (ou seja, $gV = nF$).

Do teorema de Euler, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 2 &= V + F - A \\
 8 &= 4V + 4F - 4A \\
 &= 4V - 2A + 4F - 2A \\
 &= 4V - gV + 4F - nF \\
 &= V(4 - g) + F(4 - n).
 \end{aligned}$$

Observaremos agora as possibilidades para V e F , levando em consideração as

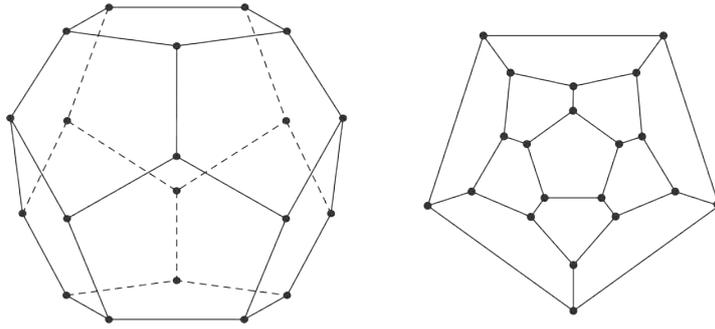


Figura 4.14: Dodecaedro regular.

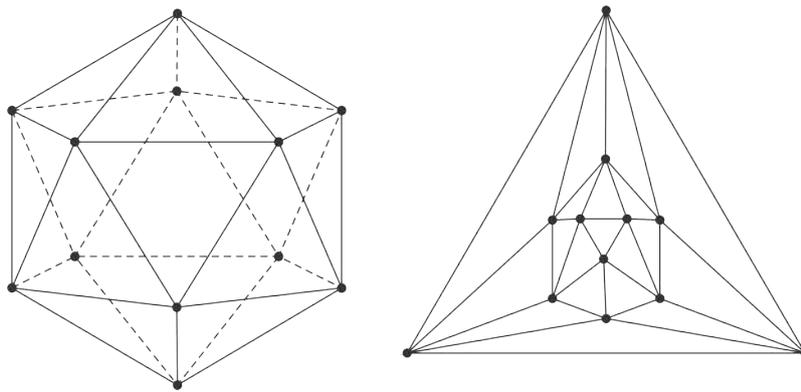


Figura 4.15: Icosaedro regular.

limitações de g e n (i.e., $g \geq 3$ e $3 \leq n \leq 5$).

Buscamos então soluções para o sistema linear

$$\begin{cases} 8 = V(4 - g) + F(4 - n) \\ gV = nF \end{cases},$$

que deve ser combinado com o fato de que $V > 0$ e $F > 0$.

O caso $g = 4$ e $n = 4$ nos leva a um sistema impossível, e $g = 4$ combinado com $n = 5$ leva a valores negativos de F e V , o mesmo podendo ser dito de $g = 5$, $n = 4$ e $g = 5$, $n = 5$. Por fim, se $g > 5$ e $3 \leq n \leq 5$, todos os sistemas encontrados serão impossíveis ou terão soluções negativas.

Essa análise nos leva então a apenas cinco casos:

1. $g = 3$ e $n = 3$. Nesse caso, teremos $3V = 3F$ e $8 = V + F$, donde $V = F = 4$.

Assim, o poliedro P é um tetraedro regular.

2. $g = 3$ e $n = 4$. Nesse caso, teremos $3V = 4F$ e $8 = V$, donde $V = 8$ e $F = 6$.

Assim, o poliedro P é um hexaedro regular (cubo).

3. $g = 3$ e $n = 5$. Nesse caso, teremos $3V = 5F$ e $8 = V - F$, donde $V = 20$ e

$F = 12$. Assim, o poliedro P é um dodecaedro regular.

4. $g = 4$ e $n = 3$. Nesse caso, $4V = 3F$ e $8 = F$, donde $V = 6$ e $F = 8$. Assim, o poliedro P é um octaedro regular.

5. $g = 5$ e $n = 3$. Nesse caso, temos $5V = 3F$ e $8 = F - V$, donde $V = 12$ e $F = 20$.

Assim, o poliedro P é um icosaedro regular.

Desse modo, existem exatamente cinco poliedros regulares.

□

Capítulo 5

Grafos e Análise Combinatória

A Análise Combinatória, estudada em geral no 2º ou no 3º ano do Ensino Médio, é também um conteúdo que, apesar de ter diversas aplicações práticas, gera nos alunos certo estranhamento. Fórmulas de arranjos, permutações e combinações confundem-se com problemas em que o raciocínio lógico é essencial, mas que por muitas vezes perdem-se em meio à falta de visualização que as mesmas fórmulas causam.

Grafos são muito utilizados como auxiliares em problemas de contagem. O objetivo desse capítulo é mostrar justamente a facilidade que a representação por meio de grafos fornece a esses problemas, além de trazer para a Análise Combinatória o auxílio de resultados e teoremas de outros conteúdos da Matemática do Ensino Médio, como a Geometria Plana. Surge então uma abordagem diferente que pode estimular mais os alunos a estudarem e resolverem problemas de contagem, além de tornar esse tipo de problema, tão comum em situações cotidianas, algo mais interessante e mais fácil. As principais referências desse capítulo são [3], [5], [1], [4] e [9].

Um problema clássico de Análise Combinatória está descrito a seguir. Obviamente sua solução não depende necessariamente do uso de um grafo, mas essa representação deixa as relações mais simples de serem analisadas e geram uma visualização geométrica muito interessante.

5.1 Comissões e grafos completos

Problema 1. Em um congresso, há 13 comissões todas com igual número de professores. Cada professor pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os professores participam. Quantos professores participaram desse congresso? Quantos professores participam de cada comissão?

Solução. Um problema de contagem como esse pode parecer difícil à primeira vista, mas uma análise por meio de grafos pode resolvê-lo rapidamente. Imaginemos que cada comissão seja um vértice de um grafo e as arestas desse grafo são os professores, uma vez que cada professor está relacionado a duas comissões. Além disso, como cada duas comissões possuem um professor em comum, todos os vértices estão conectados, formando um grafo completo. Dessa forma, o problema se resume ao cálculo do número de arestas do grafo completo K_{13} . Pensando no grafo como um polígono de 13 lados, basta somar a quantidade de lados ao número de diagonais, que é $\frac{13 \cdot (13 - 3)}{2} = 65$. Dessa forma, o número de professores no congresso era $13 + 65 = 78$.

Para encontrar a quantidade de professores em cada comissão, lembremos que de cada vértice do grafo K_{13} partem 12 segmentos, de modo que há exatamente 12 professores em cada comissão.

△

Observe-se que a representação geométrica do problema elimina uma potencial resolução extensa e confusa. É muito mais simples contar lados e diagonais de um polígono, por meio de fórmulas simples e conhecidas, que usar um argumento de contagem (calcular $\binom{13}{2}$, por exemplo) que pode parecer estranho e não-espontâneo a um estudante, apesar de não ser um cálculo extenso.

Obviamente, esse problema pode facilmente ser usado para explorar outros resultados geométricos, inclusive a demonstração combinatória do número de diagonais

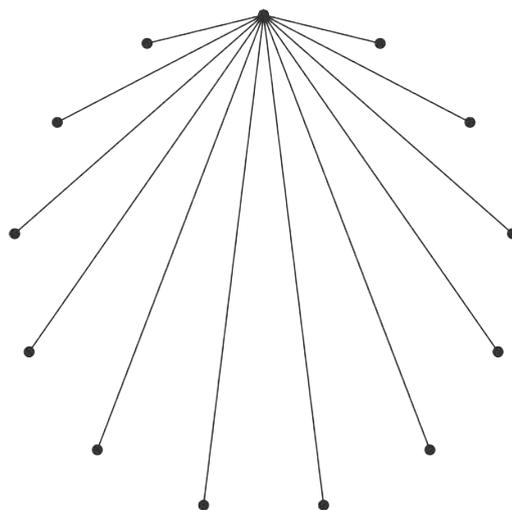


Figura 5.1: 13 “comissões” e seus respectivos “professores”.

de um polígono qualquer.

5.2 Conhecidos numa reunião e o Teorema de Ramsey

Problema 2. Dadas 6 pessoas numa reunião, demonstre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente. (*Suponha que a relação de conhecer é simétrica, isto é, se a conhece b , então b conhece a*).

Solução. Considere cada pessoa como vértice de um grafo. Caso duas pessoas se conheçam, conectaremos esses vértices por uma aresta. Fixando uma das pessoas, é correto afirmar que ela conhece ao menos três pessoas, ou não conhece ao menos três pessoas. Suponhamos que essa pessoa conhece pelo menos três outras pessoas. Se duas dessas três pessoas se conhecem, ficarão conectadas por uma aresta, e fechar-se um ciclo: daí, há três pessoas que se conhecem mutuamente. Por outro lado, se

quaisquer duas pessoas dentre os três selecionados não se conhecem, aí teremos um grupo de três pessoas que não se conhecem mutuamente. Desse modo, fica provado que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

△

Como podemos representar as pessoas presentes na reunião por meio de um grafo, pode-se também representar as relações entre elas podem ser representadas por dois tipos de arestas: uma aresta será pintada de vermelho (e tracejada) se duas pessoas não se conhecem, e será pintada de azul se duas pessoas se conhecem. Assim, duas representações possíveis para a solução descrita seriam as seguintes figuras.

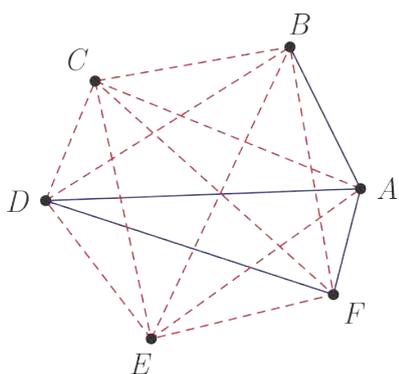


Figura 5.2: A , D e F se conhecem.

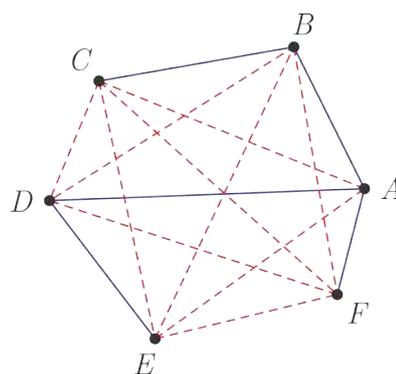


Figura 5.3: B , D e F não se conhecem.

Nas Figuras 5.2 e 5.3, o participante A conhece os participantes B , D e F . Na Figura 5.2, os participantes D e F também conhecem-se, de modo que fica formado um único ciclo com arestas todas azuis; na Figura 5.3, os participantes B , D e F não se conhecem, de modo que um ciclo com arestas todas vermelhas é automaticamente formado, e não há ciclos com arestas todas azuis.

Dessa forma, o problema pode ser escrito em termos de grafos pelo seguinte enunciado: *Em um grafo completo com 6 vértices, ao pintar as arestas com duas cores distintas, há pelo menos um subgrafo completo de 3 vértices com arestas todas da mesma cor.*

Esse resultado pode ser generalizado no belo *Teorema de Ramsey*, um dos mais famosos da Análise Combinatória.

Uma das formas de deixar esse problema mais abrangente é o apresentado a seguir.

Teorema 5.2.1. *Para quaisquer p e q inteiros positivos, existe um número inteiro V tal que numa reunião com V pessoas, existem exatamente p que se conhecem mutuamente ou q que se desconhecem mutuamente.*

Representaremos o menor V com essa propriedade por $R(p, q)$, conhecido como **número de Ramsey associado a p e q .**

Demonstração.

A prova é por indução finita sobre $p + q$. Começamos observando alguns casos mais simples.

Inicialmente, devemos perceber que $R(p, q) = R(q, p)$, $\forall p, q \geq 1$, de modo que esse número é simétrico em relação a p e q . De fato, não importa qual dos dois números representa a quantidade de pessoas que se conhecem ou se desconhecem.

Por outro lado, definimos que $R(p, 1) = R(1, q) = 1$, $\forall p, q \geq 1$. Isso pode ser fixado para que não haja contradições com a definição de $R(p, q)$: numa reunião com um único participante, é sempre verdade que esse participante desconhece qualquer número de pessoas. Como conhecer ou desconhecer são ações inteiramente simétricas, vem que $R(p, 1) = R(1, q) = 1$.

Temos ainda que $R(p, 2) = p$, $\forall p \geq 1$. De fato, numa reunião com p participantes, é sempre verdade que todos se conhecem ou que há dois que não se conhecem.

Provaremos a existência de $R(p, q)$, $\forall p, q \geq 1$, por meio da desigualdade

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

A análise dos casos mais simples acima serve como base da indução que usaremos para provar a desigualdade. Como hipótese de indução, suponhamos que existam $R(p-1, q)$ e $R(p, q-1)$, e consideremos uma reunião com $V = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ pessoas.

Se escolhermos uma dessas pessoas para analisar, temos que essa pessoa conhece no máximo $R(p-1, q)$ pessoas ou desconhece no máximo $R(p, q-1)$, pois se isso não for verdade, seu número de conhecidos seria no máximo $R(p-1, q) - 1$ e o número de pessoas que não conhece seria no máximo $R(p, q-1) - 1$ pessoas, fazendo com que a reunião tenha no máximo $R(p-1, q) + R(p, q-1) - 2 = V - 2$ pessoas além da pessoa escolhida, o que é absurdo.

Suponhamos então, sem perda de generalidade, que a pessoa escolhida conheça no máximo $R(p-1, q)$ outros participantes da reunião. Nesse grupo de $R(p-1, q)$ pessoas, ou existem q que não se conhecem ou $p-1$ que se conhecem. No primeiro caso, a demonstração está completa, e no segundo caso, se unirmos ao conjunto dos $p-1$ conhecidos a pessoa escolhida, teremos então um grupo de p pessoas que se conhecem mutuamente, e a demonstração também se completa nesse caso. Para $R(p, q-1)$ desconhecidos da pessoa escolhida, a demonstração é análoga.

Desse modo, fica demonstrado que $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$, $\forall p, q \geq 1$. Desse modo, se tomarmos $V = R(p, q)$, sempre será válido que numa reunião com V pessoas há exatamente p que se conhecem ou q que não se conhecem. Claramente isso também vale para $V > R(p, q)$, bastando, para isso, restringir a análise para um grupo com $R(p, q)$ pessoas.

□

Esse problema generalizado da análise de conhecidos numa reunião nada mais é que uma adaptação do *Teorema de Ramsey para grafos bicolores* (grafos cujas arestas podem ser coloridas com no máximo duas cores), cujo enunciado é

Teorema 5.2.2 (Teorema de Ramsey para grafos bicolores). *Dados p e q inteiros positivos, sempre existe um número natural V tal que qualquer grafo bicolor de V ou mais vértices contém um subgrafo completo K_p ou K_q monocromático. O menor número V com essa propriedade é $R(p, q)$.*

Demonstração.

Segue diretamente da demonstração do Teorema 5.2.1, considerando que “conhecer

exatamente p participantes” signifique formar um grafo completo K_p e “não conhecer exatamente q pessoas” signifique formar um grafo completo K_q .

□

Desse modo, além de evidenciar que $R(3, 3) = 6$, conseguimos demonstrar um teorema famoso da Análise Combinatória de maneira mais fácil por meio de um problema mais fácil de visualizar, que é o objetivo desse capítulo.

5.3 Casais dançantes e emparelhamentos em grafos

Problema 3. Numa festa, há exatamente 22 pessoas, sendo 11 rapazes e 11 moças. Nem todos os participantes dessa festa se conhecem, mas cada rapaz conhece exatamente três moças e cada moça conhece exatamente três rapazes. Pergunta-se: é possível agrupar todos os rapazes e moças em casais para dançar, de modo que os dois integrantes do casal se conheçam?

Solução. Considere o conjunto dos rapazes como sendo $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$ e o das moças como sendo $Y = \{L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V\}$. Como o fato de dois rapazes se conhecerem ou duas moças se conhecerem não faz diferença nenhuma nesse problema, podemos imaginar os conjuntos X e Y como os conjuntos de vértices disjuntos de um grafo bipartido. As arestas, nesse caso, indicarão o fato de um rapaz e uma moça se conhecerem. A Figura 5.4 a seguir seria uma representação possível para o grafo bipartido mencionado.

Um trabalho de análise muito minucioso permite encontrar uma forma de organizar os casais de modo que todos se conheçam. Uma possível representação para isso seria o conjunto de arestas destacado nas Figuras 5.5 e 5.6 a seguir. A resposta ao problema é, portanto, sim.

△

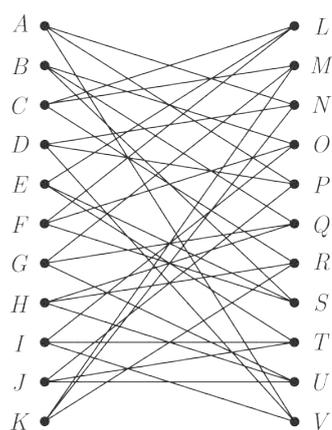


Figura 5.4: Grafo bipartido dos homens e mulheres da festa.

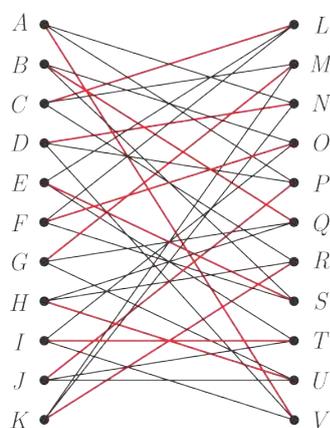


Figura 5.5: Possíveis casais de dança.

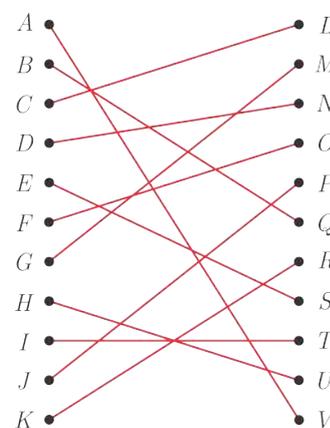


Figura 5.6: Casais destacados.

No entanto, essa forma de separar o grupo de rapazes e moças não é a única possível; além disso, apesar da representação em forma de grafo mostrar de forma explícitas as relações entre os elementos de X e Y , representar todas essas arestas toma tempo e deixa a solução mais difícil de ser encontrada. Finalmente, mesmo representando todas as arestas, é muito complicado e cansativo analisar cada caso e buscar um agrupamento de rapazes e moças em que todos participem com um conhecido, e uma única vez, já que o enunciado do problema apenas pede para determinar se tal arranjo é ou não possível.

Um teorema mais abrangente da Teoria dos Grafos traz a resposta de maneira mais fácil e eficiente, definindo, é claro, alguns conceitos auxiliares.

Em um grafo bipartido, chamamos *emparelhamento* a um conjunto de arestas que não há mais de uma aresta incidente em cada vértice. Dizemos ainda que um emparelhamento é *perfeito* se abrange todos os vértices do grafo bipartido.

Teorema 5.3.1. *Seja G grafo bipartido, cujos subconjuntos de vértices disjuntos são X e Y . Se cada vértice de G tem mesmo grau $g > 1$, então $|X| = |Y|$.*

Demonstração.

Com efeito, de fosse $|X| \neq |Y|$, então algum deles teria mais vértices que o outro. Digamos que $|X| > |Y|$. Pelo teorema da contagem dupla (Teorema 1.1.1), temos que

$$2|A| = \sum_{v \in G} d(v) = |X| \cdot g + |Y| \cdot g < 2|X|g,$$

donde $|A| < |X|g$, o que é absurdo.

□

O seguinte teorema, em geral atribuído ao matemático britânico Philip Hall (1904–1982), dá a solução geral para o problema do festa que estamos analisando.

Teorema 5.3.2 (Hall). *Numa festa em que há h homens e $m \geq h$ mulheres, em que cada homem conhece ao menos uma mulher, e cada mulher, ao menos um homem, é possível montar casais para dançar em que os dois elementos do par se conhecem se, e somente se, cada conjunto de n homens conhece um total de n mulheres.*

Demonstração.

A demonstração é por indução sobre o número de homens. Observe que pode ocorrer a situação em que alguma das mulheres não sejam escolhidas como par de dança, mas isso não invalida o enunciado do teorema. Chamaremos *condição de Hall* à hipótese de que cada conjunto de n homens conhece um total de n mulheres.

Se $h = 1$, a condição de Hall é satisfeita, pois basta que o único homem escolha seu par. Suponhamos, como hipótese de indução, que a condição de Hall valha para todo número de homens menor que h . Consideremos, então, os seguintes casos.

1. Todo conjunto de n homens tem pelo menos $n + 1$ mulheres conhecidas. Nesse caso, escolhemos um homem e o juntamos a uma de suas conhecidas, formando um par de dança. Sobram, então, $m - 1$ mulheres para $h - 1$ homens. Seleccionando um conjunto S com n homens quaisquer dentre os $h - 1$ restantes, sendo $n \leq h - 1$, cada um desses homens tinha ao menos $n + 1$ conhecidas. Como apenas uma mulher foi escolhida, cada um dos n homens tem, no máximo, uma conhecida a menos, fazendo com que os homens do conjunto S tenham, no total, pelo menos n conhecidas. Vale para S a condição de Hall, e portanto, aplicando a hipótese de indução, é possível escolher um par para os $h - 1$ homens restantes.

2. Ao menos um conjunto S de n homens tem exatamente n conhecidas. Suponha que exista um conjunto S com essa configuração. Como $n < h$, vale a condição de Hall, e podemos formar exatamente n casais para dançar. Sobraram então $h - n$ homens e $m - n$ mulheres. Devemos verificar que a condição de Hall vale para esse novo conjunto de homens e mulheres. Caso a condição não fosse válida, existiria um subconjunto S' com k homens que possuem menos de k pretendentes. Consideramos agora o conjunto $S \cup S'$, que possui $n + k$ homens e $n + k$ mulheres, mas pela configuração de S' , esses $n + k$ homens teriam, no total, menos de $n + k$ conhecidas, o que entra em contradição com o fato de que o conjunto S original satisfazia a condição de Hall. Logo, a condição deve valer para o conjunto de $h - n$ homens e $m - n$ mulheres, de modo que é possível formar casais para dança com essas pessoas.

Portanto, é possível montar casais para dança que satisfazem a condição de Hall, em qualquer festa com h homens e $m \geq h$ mulheres.

□

Esse teorema pode ser reescrito de maneira formal como um resultado bastante forte para grafos bipartidos. Para isso, representaremos como $\mathcal{V}(C)$ a *vizinhança* de um conjunto C de vértices de um grafo G , isto é o conjunto de todos os vértices adjacentes

a cada vértice pertencente a C .

Teorema 5.3.3 (Teorema de Hall para grafos bipartidos). *Seja G um grafo bipartido com subconjuntos disjuntos X e Y . Existe um emparelhamento completo de X em Y se, e somente se $|\mathcal{V}(S)| \geq |S|$, para todo $S \subset X$.*

Demonstração.

Como a condição $|\mathcal{V}(S)| \geq |S|$ é equivalente à condição de Hall no teorema 5.3.2, basta adaptar a demonstração do teorema de Hall, fazendo X representar o conjunto de homens e Y , o conjunto de mulheres.

□

Caso o conjunto de homens tenha a mesma quantidade de elementos que o conjunto de mulheres, como era no nosso problema motivador, o resultado do teorema de Hall ainda é válido, como será demonstrado a seguir.

Teorema 5.3.4. *Seja G um grafo bipartido cujos subconjuntos disjuntos sejam X e Y , com $|X| \leq |Y|$. Se todos os vértices de um mesmo subconjunto possuem mesmo grau, então é possível realizar um emparelhamento completo dos vértices de X nos vértices de Y .*

Demonstração.

Seja δ_1 o grau de cada vértice de X e δ_2 o grau de cada vértice de Y . Dessa forma, temos que G possui um total de arestas igual a $|A| = |X| \cdot \delta_1 = |Y| \cdot \delta_2$. Como $|X| \leq |Y|$, temos $|Y| \cdot \delta_2 = |X| \cdot \delta_1 \leq |Y| \cdot \delta_1 \Rightarrow \delta_2 \leq \delta_1$.

Consideraremos um subconjunto $S \subset X$. O número de arestas que partem de S é $|S| \cdot \delta_1$. Na vizinhança $\mathcal{V}(S)$ de S , chegam, no máximo, $|\mathcal{V}(S)| \cdot \delta_2$. Daí, temos

$$|S| \cdot \delta_1 \leq |\mathcal{V}(S)| \cdot \delta_2 \Rightarrow |S| \cdot \delta_2 \leq |\mathcal{V}(S)| \cdot \delta_2 \Rightarrow |S| \leq |\mathcal{V}(S)|.$$

Logo, S satisfaz à condição do teorema 5.3.3, e o resultado segue.

□

Por fim, vemos então que o problema motivador que inicia o capítulo é um caso particular do teorema 5.3.4, com $|X| = |Y| = 11$.

Índice Remissivo

- Árvore, 18
 - geradora, 26
 - rotulada, 50
- Algoritmo
 - de Dijkstra, 28, 34
 - de Kruskal, 28, 30
 - de Prim, 28, 29
- Aresta, 15
- Caminho, 17, 22
 - hamiltoniano, 24
- Ciclo, 17, 22
 - hamiltoniano, 24
- Circuito, 22
- Emparelhamento, 74
 - perfeito, 74
- Floresta, 18
- Grafo, 15
 - bipartido, 20
 - bipartido completo, 21
 - completo, 17
 - conexo, 18
 - direcionado (digrafo), 46
 - euleriano, 22
 - hamiltoniano, 24
 - planar, 54
 - semieuleriano, 22
 - simples, 17
 - valorado, 27
- Grau
 - de um vértice, 16
 - maximal, 16
 - minimal, 16
- Laço, 16
- Matriz
 - de adjacência, 42
 - de incidência, 48
- Multigrafo, 16
- Número de Ramsey, 70
- Países
 - de um grafo planar, 54
- Passeio, 22
- Poliedro Regular, 62
- Ponte, 19
- Pseudografo, 16
- Trilha, 22
- Vértice, 15

Referências Bibliográficas

- [1] HARRIS, J. M.; HIRST, J. L.; MOSSINGHOFF, M. J. *Combinatorics and graph theory*. New York: Springer, 2008. v. 2.
- [2] LUCCHESI, C. L. *Introdução à teoria dos grafos*. [S.l.]: IMPA, 1979.
- [3] JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. *Programa de Iniciação Científica da OBMEP*, 2009.
- [4] PINHEIRO, R. et al. Poti—material didático. 2012.
- [5] SANTOS, J. P. d. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. Rio de Janeiro: Ed. Ciencia Moderna, 2007.
- [6] BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. 3.. ed. São Paulo: Harper & Row, 1980.
- [7] LOVASZ, L.; PELIKAN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática discreta*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.
- [8] LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 12, p. 36–42, 1988.
- [9] FOMIM, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos matemáticos: A experiência russa*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.