

**MODELO BIDIMENSIONAL CONTÍNUO-DESCONTÍNUO DE FALHA PARA  
MATERIAIS *QUASI-FRÁGEIS* EM MODO I E MODO MISTO**

**JOSÉ FABIANO ARAÚJO MOREIRA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELO BIDIMENSIONAL CONTÍNUO-DESCONTÍNUO DE  
FALHA PARA MATERIAIS *QUASI-FRÁGEIS* EM MODO I E MODO  
MISTO**

**JOSÉ FABIANO ARAÚJO MOREIRA**

**ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-05A/16**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELO BIDIMENSIONAL CONTÍNUO-DESCONTÍNUO DE  
FALHA PARA MATERIAIS *QUASI-FRÁGEIS* EM MODO I E MODO  
MISTO**

**JOSÉ FABIANO ARAÚJO MOREIRA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC-UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. José Alexander Araújo, PhD. (ENM-UnB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. Sérgio Persival Baroncini Proença, DSc. (EESC-USP)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA/DF, 29 DE MARÇO DE 2016.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

MOREIRA, JOSÉ FABIANO ARAÚJO

Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais *quasi*-frágeis em modo I e modo misto [Distrito Federal] 2016.

xx, 92p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2016).  
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Mecânica do Dano Contínuo

2.Modelo de Zona Coesiva

3.Materiais *quasi*-frágeis

4.Propagação de trincas

5. MEFG

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Mestre)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MOREIRA, J. F. A. (2016). Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais *quasi*-frágeis em modo I e modo misto. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-05A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 92p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: José Fabiano Araújo Moreira.

TÍTULO: Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais *quasi*-frágeis em modo I e modo misto.

GRAU: Mestre

ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

José Fabiano Araújo Moreira  
QR 510 CJ 03 Casa 08, Samambaia Sul.  
72.603-312 Brasília – DF – Brasil.  
fabianomoreira91@gmail.com

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Francisco Evangelista Junior, pela orientação objetiva, segura e competente, e por continuamente auxiliar-me na busca do conhecimento.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil que de alguma forma contribuíram com a minha formação e com esta pesquisa.

Aos amigos Gelson Alves e Guilherme Paiva, pela amizade, pelo incentivo e pela ajuda imprescindível concedida na redação desta dissertação.

Aos amigos conquistados neste período de mestrado: Álvaro Martins, Aurélio Caetano, Almério Dutra, Bruno Emídio, Carlos Mariano, Eduardo Pains, Elvis Santana, Fabiano Campos, Gabriel Costa, Henrique Guglielme, Iago Almeida, Jéssica Borges, Jéssica Souza, Marcus Mendes, Nelson Afanador, Renato Maia, Thalles Farias, Tiago Oliveira, Carlos Uchôa, Vicente Geraldo, Welington Vital e Yadian Menéndez.

Aos meus queridos pais Assis e Teresinha, que dedicaram suas vidas exclusivamente à educação dos filhos, pela doação e apoio incondicionais.

Aos meus tios Francisco Araújo e Ermelina Araújo e primos Francisco Wesley, Guilherme Araújo, Helton Neto, Maria Herlane, Rosilane Moreira, Wallace Vicente e Wéllio Cristino por toda a ajuda e pelo acolhimento concedidos.

A toda a minha família.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A Deus, por estar sempre presente em minha vida, zelando por mim e mostrando-me o melhor caminho a seguir.

Aos meus pais Francisco de Assis Moreira e Teresinha Vicente de Araújo Moreira pelo apoio, incentivo e compreensão. A vocês que são a minha base e motivação eu dedico.

## RESUMO

### MODELO BIDIMENSIONAL CONTÍNUO-DESCONTÍNUO DE FALHA PARA MATERIAIS *QUASI-FRÁGEIS* EM MODO I E MODO MISTO

Autor: José Fabiano Araújo Moreira

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Março de 2016

Esta dissertação teve como objetivo formular e implementar um modelo de dano contínuo e um modelo de dano contínuo-descontínuo (com transição para fratura) para os modos I e misto (I+II) de abertura de trinca, por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados, capaz de prever falhas em estruturas de materiais *quasi-frágeis*. Portanto, a mais importante contribuição desta pesquisa foi a criação de um modelo capaz de simular numericamente a resistência de membros estruturais sob falhas em modo misto de maneira eficiente e com objetividade de malha, baseado em uma lei de evolução de dano que utiliza apenas parâmetros físicos, que podem ser obtidos por meio de ensaios de resistência e fratura, sem a necessidade de calibração adicional do modelo. A validação do mesmo se deu por intermédio da comparação com resultados experimentais para vários tipos de ensaios e diferentes materiais e modos de falha. Os ensaios simulados com o modelo foram: flexão em três pontos em viga com entalhe central, flexão em quatro pontos em viga sem entalhe, estrutura com duplo entalhe e cisalhamento em quatro pontos em viga com entalhe central. Os resultados obtidos comprovaram a eficiência e acurácia do modelo na previsão do comportamento de ruptura de diferentes materiais cimentícios com e sem a incorporação de fibras, submetidos a falhas em modo I e em modo misto. Ademais, o modelo consegue fornecer resultados com uma precisão equivalente à de outros modelos encontrados na literatura, porém utilizando um número bem reduzido de elementos na malha.

**Palavras chave:** Mecânica do Dano Contínuo, Modelo de Zona Coesiva, Materiais *quasi-frágeis*, Propagação de trincas, MEFG.

## ABSTRACT

### TWO-DIMENSIONAL MODEL CONTINUOUS-DISCONTINUOUS OF FAILURE FOR *QUASI-BRITTLE* MATERIALS FOR MODE I AND MIXED

Author: José Fabiano Araújo Moreira

Supervisor: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasilia, March 2016

*This research aims to formulate and implement a continuous and continuous-discontinuous (with transition to fracture) damage model for the crack opening mode I and mixed (I + II) in the framework of the Generalized Finite Element Method, able to predict failures in quasi-brittle materials. Therefore, the most important contribution of this research is the creation of a model capable of simulating numerically the resistance of structural members under mixed mode failures efficiently and with mesh objectivity. This model is based on a damage evolution law using only physical parameters, which can be obtained through fracture and resistance tests without the need of further calibration. Comparison with experimental results for various types of tests, materials and different failure modes were performed to assess the accuracy and efficiency. The tests simulated with the model were: three point bending in a single edge notch beam, four points bending unnotched, double-edge-notched specimen and single edge notched beam in anti-symmetric four-point-shear loading. The results obtained herein confirmed the efficiency and accuracy of the model in predicting rupture behavior of different cementitious materials, with or without the incorporation of fibers, subjected to mode I and mixed mode failure. Moreover, the model can provide results with equivalent accuracy to others in the literature using fewer elements in the mesh.*

**Keywords:** *Continuum Damage Mechanic, Cohesive Zone Model, Quasi-brittle materials, Crack propagation, GFEM.*

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>xii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES .....</b>	<b>xvii</b>
<b>1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 - OBJETIVOS .....</b>	<b>3</b>
1.1.1 - Objetivo geral .....	3
1.1.2 - Objetivos específicos .....	4
<b>1.2 - ORGANIZAÇÃO .....</b>	<b>4</b>
<b>2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1 - MODELAGEM CONTÍNUA DE FALHA .....</b>	<b>6</b>
2.1.1 - Conceitos da Mecânica do Dano Contínuo .....	6
2.1.2 - Modelos de dano para materiais <i>quasi</i> -frágeis .....	9
2.1.3 - Questões de modelagem computacional usando CDM .....	10
2.1.4 - Abordagens atuais para o crescimento do dano na CDM .....	11
<b>2.2 - MODELAGEM DESCONTÍNUA DE FALHA .....</b>	<b>13</b>
2.2.1 - Conceitos básicos da Mecânica da Fratura .....	13
2.2.2 - Modelos de fratura para materiais <i>quasi</i> -frágeis .....	14
2.2.3 - Limitações da modelagem descontínua de materiais .....	17
2.2.4 - Abordagens atuais para a idealização do crescimento da trinca .....	18
<b>2.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS .....</b>	<b>19</b>
2.3.1 - Cinemática do salto de deslocamento .....	19
2.3.2 - A partição da unidade e os elementos finitos .....	20
2.3.3 - Funções de enriquecimento .....	22
2.3.4 - Discretização das equações de equilíbrio .....	23
<b>3 - FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO .....</b>	<b>26</b>

<b>3.1 - FORMULAÇÃO DO MODELO DE DANO PROPOSTO.....</b>	<b>26</b>
3.1.1 - Variável de controle do dano.....	26
3.1.2 - Critério de início do dano .....	28
3.1.3 - Lei de evolução do dano.....	29
3.1.4 - Lei de evolução do dano para modo I.....	30
3.1.5 - Regularização da lei de dano pela energia de fratura para a malha de elementos finitos.....	34
3.1.6 - Identificação das propriedades de dano através de ensaios de laboratório .....	34
<b>3.2 - ESTRATÉGIA NÃO-LINEAR PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....</b>	<b>36</b>
<b>3.3 - DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	<b>39</b>
<b>4 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I.....</b>	<b>42</b>
4.1 - VIGA COM ENTALHE: FLEXÃO EM TRÊS PONTOS, <i>THREE POINT BENDING</i> (TPB) .....	42
4.1.1 - Validação com resultados experimentais de Roesler <i>et al.</i> (2007a) para materiais cimentícios convencionais .....	42
4.1.1 - Validação com resultados experimentais de Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013) para materiais cimentícios reciclados e com adição de fibra.....	62
4.2 - VIGA SEM ENTALHE: FLEXÃO EM QUATRO PONTOS, <i>FOUR POINT BENDING</i> (FPB) .....	65
4.2.1 - Análise da evolução e distribuição de dano .....	68
<b>5 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO: MODO I + II..</b>	<b>71</b>
5.1 - ESTRUTURA COM DUPLO ENTALHE: <i>DOUBLE EDGE NOTCH</i> (DEN) 71	
5.2 - VIGA COM ENTALHE: CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS, <i>FOUR POINT SHEAR</i> (FPS).....	75
<b>6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.</b>	<b>81</b>
6.1 - CONCLUSÕES .....	81

<b>6.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>82</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>84</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Ensaio de laboratório para a identificação dos parâmetros do material.....	35
Tabela 4.1 – Dimensões do ensaio de flexão em três pontos. ....	43
Tabela 4.2 – Parâmetros de fratura para a lei bilinear, Gaedicke e Roesler (2010). ....	43
Tabela 4.3 – Comparação do número de elementos das malhas de Gaedicke e Roesler (2010) com o número de elementos das malhas utilizadas. ....	45
Tabela 4.4 – Carga Máxima, Pmax (kN), encontrada nas simulações numéricas e nos resultados experimentais para as vigas TPB.....	47
Tabela 4.5 – Parâmetros de fratura para as leis bilinear e trilinear encontrados em Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013).....	62
Tabela 4.6 – Pmax encontrado nas simulações numéricas e nos resultados experimentais de Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013).....	64
Tabela 4.7 – Parâmetros de material e de fratura utilizados nas simulações numéricas FPB. ....	66
Tabela 4.8 – Correção dos valores Pmax através do MOR.....	68
Tabela 5.1 – Pmax das curvas Pn-CTOD da Figura 5.3 (valores em kN). ....	73
Tabela 5.2 – Pmax das curvas P-CMSD da Figura 5.11 (valores em kN). ....	77

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Elemento de um sólido danificado (adaptada de Lemaitre e Desmorat, 2004): (a) elemento de volume representativo (EVR) de uma superfície do corpo; (b) operador de dano escalar (estado isotrópico). .....	7
Figura 2.2 – Curva força-deslocamento em uma barra carregada axialmente para três tamanhos de malha (adaptada de Driemeier <i>et al.</i> , 2005). .....	11
Figura 2.3 – Modos de fratura: (a) Modo I: tração pura; (b) Modo II: cisalhamento; (c) Modo III: torção, rasgamento.....	13
Figura 1.1 – Imagem do ensaio de tensão compacta no material <i>quasi</i> -frágil ECC em modo I: (a) imagem aproximada do entalhe no momento em que a carga atinge 80% da carga máxima; (b) ensaio após a ruptura (adaptada de Kabele e Horii, 1997). .....	14
Figura 2.4 – Idealização do Modelo de Zona Coesiva com a respectiva lei constitutiva de amolecimento ( $\sigma$ - $w$ ) de acordo com Hillerborg <i>et al.</i> (1976). .....	15
Figura 2.5 – Curvas de amolecimento; (a) intrínseco e (b) extrínseco (Roesler <i>et al.</i> , 2007a; Park <i>et al.</i> , 2009). .....	16
Figura 2.6 – Elemento de interface na montagem do caminho da trinca (adaptada de Ansys, 2009).....	17
Figura 2.7 – Corpo V cortado pela descontinuidade $S_d$ (Simone, 2007).....	20
Figura 2.8 – Funções de forma do MEEG (adaptada de Pereira <i>et al.</i> , 2008). .....	23
Figura 3.1 – Definição de $\epsilon_{d0}$ pelo ensaio de tração. ....	28
Figura 3.2 – (a) Comportamento de amolecimento para o material PCC e o FRC descrito por experimentos de fratura em modo I, e (b) modelo de dano correspondente (adaptada de Evangelista Jr. <i>et al.</i> , 2013). .....	31
Figura 3.3 – (a) Configuração do ensaio SEM(B) e (b) carregamento e descarregamento conforme TPFM (Evangelista Jr. <i>et al.</i> , 2013). .....	35
Figura 3.4 – Esquema iterativo para o Método Secante (adaptada de Proença, 2008). .....	38
Figura 3.5 – Propagação da trinca e processo de enriquecimento dos nós.....	39
Figura 3.6 – Determinação da direção de propagação da trinca (adaptada de Simone, 2003). .....	40
Figura 3.7 – Esquema de integração de um elemento atravessado por uma descontinuidade: (a) Wells e Sluys (2001) e (b) adotado nesta pesquisa. As cruces indicam pontos de integração no meio contínuo e as cruces com círculo indicam os pontos de integração para as tensões na descontinuidade. ....	41

Figura 4.1 – Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos.....	42
Figura 4.2 – Malhas de elementos finitos utilizadas para as vigas TPB de alturas (a) 63 mm; (b) 150 mm e (c) 250 mm. Desenhos fora de escala. ....	44
Figura 4.3 – Comparação das curvas P-CMOD experimentais e das simulações de Gaedicke e Roesler (2010) com os resultados numéricos obtidos para a viga TPB de alturas (a) 63 mm; (b) 150 mm e (c) 250 mm.....	46
Figura 4.4 – Malha de elementos finitos regular com diferentes refinamentos e o dano ao final da simulação para a viga TPB 150.....	48
Figura 4.5 – Curva P-CMOD para simulações com diferentes malhas (he é o tamanho típico do elemento na seção central da viga) para a viga TPB 150.....	49
Figura 4.6 – Malha de elementos finitos regular (917 elementos) e irregular (1325 elementos) e o dano ao final da simulação para a viga TPB 150.....	49
Figura 4.7 – Curva P-CMOD para simulações com malha regular (917 elementos) e malha irregular (1325 elementos) para a viga TPB 150.....	50
Figura 4.8 – Efeito da malha de elementos finitos na curva P-CMOD para a viga TPB 150. ....	50
Figura 4.9 – Curva P-CMOD com pontos de interesse para a viga TBP 150 utilizando $\epsilon_{eqMA}$ . ....	52
Figura 4.10 – Distribuição de tensão no ligamento da viga TPB 150, utilizando $\epsilon_{eqMA}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2. ....	52
Figura 4.11 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150, utilizando $\epsilon_{eqMA}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2. ....	54
Figura 4.12 – Evolução de dano na malha de elementos finitos da viga TPB 150 usando $\epsilon_{eqMA}$ . ....	55
Figura 4.13 – Propagação da trinca na viga TPB 150 utilizando $\epsilon_{eqMA}$ . ....	55
Figura 4.14 – Curva P-CMOD com pontos de interesse para a viga TPB 150 usando $\epsilon_{eqVM}$ . ....	56
Figura 4.15 – Distribuição de tensão no ligamento da viga TPB 150, utilizando $\epsilon_{eqVM}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2. ....	56
Figura 4.16 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150, utilizando $\epsilon_{eqVM}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2. ....	58
Figura 4.17 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150 usando $\epsilon_{eqVM}$ . ....	59
Figura 4.18 – Propagação da trinca na viga TPB 150 utilizando $\epsilon_{eqVM}$ .....	59

Figura 4.19 – (a) Número de iterações por passo de deslocamento para o caso contínuo e (b) número de iterações acumulada.....	60
Figura 4.20 – (a) Número de iterações por passo de deslocamento para o caso contínuo-descontínuo e (b) número de iterações acumulada.....	60
Figura 4.21 – Efeito do <i>kink point</i> na curva P-CMOD para as deformações equivalentes de (a) Mazars $\epsilon_{eqMA}$ e (b) von Mises $\epsilon_{eqVM}$ .....	61
Figura 4.22 – Comparação das curvas P-CMOD experimental e de Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013) com os resultados numéricos obtidos para a viga RCA.....	63
Figura 4.23 – Comparação das curvas P-CMOD experimentais e de Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013) com os resultados numéricos obtidos para a viga RCAFRC para deformação equivalente de (a) von Mises ( $\epsilon_{eqVM}$ ) e (b) Mazars ( $\epsilon_{eqMA}$ ). .....	63
Figura 4.24 – Modelo do ensaio FPB para o cálculo do MOR. ....	65
Figura 4.25 – Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos contendo 780 elementos utilizada nas simulações numéricas do ensaio FPB. ....	66
Figura 4.26 – Resultados obtidos para as curvas P –Deflexão (a) VCA e (b) FRAP. ....	67
Figura 4.27 – Comparação dos valores de Pmax experimentais corrigidos com os resultados numéricos para os materiais VCA e FRAP. ....	67
Figura 4.28 – Curva P – Deflexão e pontos de interesse para o concreto VCA.....	69
Figura 4.29 – Distribuição de dano nos pontos de interesse A e B e ao final da simulação. ....	70
Figura 4.30 – Propagação da trinca utilizando (a) $\epsilon_{eqVM}$ e (b) $\epsilon_{eqMA}$ . ....	70
Figura 5.1 – Geometria e condições de contorno do ensaio DEN (espessura = 50 mm)...	71
Figura 5.2 – Malhas de elementos finitos utilizadas no ensaio DEN com (a) 566 elementos e (b) 1008 elementos.....	72
Figura 5.3 – Resultados do ensaio DEN, curva Pn-CTOD. ....	73
Figura 5.4 – Resultados do ensaio de modo misto, curva Ps- $\delta_s$ . ....	73
Figura 5.5 – Distribuição final de dano .....	74
Figura 5.6 – (a) Mapa de fissuras experimental (adaptada de Nooru-Mohamed, 1992); sobreposição das fissuras do experimental sobre o caminho do dano para (b) Malha A e (c) Malha B. ....	74
Figura 5.7 – Deformada das malhas de elementos finitos.....	75
Figura 5.8 – Geometria e condições de contorno do ensaio de cisalhamento em quatro pontos (espessura = 100 mm, todas as dimensões em mm).....	76

Figura 5.9 – Discretização da viga com 7308 elementos e $h_e = 1$ mm de Simone <i>et al.</i> (2003). .....	76
Figura 5.10 – Discretização da viga com 761 elementos e $h_e = 3,3$ mm. ....	77
Figura 5.11 – Comparação das curvas Força-CMSD obtidas com os resultados experimentais de Schlangen (1993) e numéricos de Simone <i>et al.</i> (2003). ....	78
Figura 5.12 – Distribuição final de dano para o modelo (a) contínuo e (b) contínuo-descontínuo. ....	79
Figura 5.13 – Propagação da trinca: (a) experimental (adaptada de Schlangen, 1993); (b) simulação e (c) sobreposição da simulação sobre experimental. ....	79
Figura 5.14 – Malha de elementos finitos deformada. ....	80

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

$\mathbf{a}, a_i$	Graus de liberdade padrão;
$A^e$	Área do elemento finito;
$A_F$	Área de fratura
$\mathbf{B}$	Matriz com as derivadas das funções de forma;
$\mathbf{B}_\gamma$	$\mathbf{L}(\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma)$ ;
$\mathbf{b}, b_{ij}$	Graus de liberdade adicionais;
$\mathbf{C}$	Tensor elástico de quarta ordem;
$\mathbf{C}_0$	Tensor elástico de quarta ordem não danificado;
$D$	Variável escalar de dano;
$D_i$	Valor do dano no ponto de integração $i$ ;
$D_{crit}$	Dano crítico para o qual ocorre a propagação da trinca;
$E$	Módulo de elasticidade;
$\mathbf{F}$	Vetor de forças externas globais;
$\mathbf{f}_{ext}$	Vetor de forças externas;
$\mathbf{f}_{int}$	Vetor de forças internas;
$f_t$	Resistência à tração;
$G$	Taxa de liberação de energia ( <i>Energy Release Rate</i> );
$G_c$	Taxa de liberação de energia crítica;
$G_F$	Energia de fratura total;
$G_f$	Energia de fratura inicial;
$G_{PCC}$	Energia de fratura total para materiais convencionais;
$G_{FRC}$	Energia de fratura total para materiais com adição de fibras;
$h_e$	Tamanho típico dos elementos da malha de elementos finitos;
$I_{\varepsilon 1}$	Primeiro invariante do tensor de deformações;
$J$	Integral $J$ ;
$J_{\varepsilon 2}$	Segundo invariante do tensor de deformações;
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez genérica;
$K$	Fator de intensidade de tensão;
$K_C$	Fator de intensidade de tensão crítico;
$K_{IC}$	Fator de intensidade de tensão crítico em modo I;
$k$	Razão entre as resistências a compressão e a tração;

$L$	Matriz que contém os operadores diferenciais;
$l$	Comprimento da zona de processo não-linear
$l_b$	Comprimento das fibras;
$l_c$	Comprimento característico;
$L^e$	Comprimento do elemento finito;
$N_i, N$	Funções de forma do MEF;
$N_\gamma$	Matriz com os termos da base adicional;
$n$	Vetor normal;
$n_d$	Vetor normal à descontinuidade $S_d$ apontando para $V^+$ ;
$P$	Força aplicada;
$R$	Vetor resíduo gerado pelo processo iterativo;
$\ R\ $	Módulo de $R$ ;
$r^{ct}$	Distancia da ponta da trinca;
$r_i$	Vetor na direção do ponto de integração $i$ ;
$\ r_i\ $	Módulo de $r_i$ ;
$r_{s_d}$	Direção de propagação da trinca;
$S$	Contorno do corpo $V$ ;
$S_d$	Descontinuidade que corta o corpo $V$ ;
$S_t$	Região de aplicação das condições de contorno de força distribuída;
$S_u$	Região de aplicação das condições de contorno de deslocamento;
$t$	Variável de tempo;
$t$	Vetor de forças agindo na descontinuidade $S_d$ ;
$\bar{t}$	Vetor de forças aplicadas;
$TOL$	Tolerância adotada para convergência entre iterações pelo Método Secante;
$tr(\cdot)$	Traço;
$U$	Vetor de deslocamentos externos globais;
$u$	Campo de deslocamento;
$\bar{u}$	Deslocamentos prescritos;
$\hat{u}$	Função contínua no domínio $V$ ;
$[[u]]$	Salto de deslocamentos na descontinuidade $S_d$ ;
$V$	Domínio de um determinado corpo;
$V^e$	Volume do elemento finito;
$V^+$	Parte do corpo $V$ onde a função Heaviside vale 1;

$V^-$	Parte do corpo $V$ onde a função Heaviside vale 0;
$\mathbf{v}$	Vetor de referência paralelo ao plano da área $\delta S$ ;
$w$	Deslocamento de abertura de trinca;
$w_i$	Peso associado ao ponto de integração $i$ ;
$w_{banda}$	Região de largura finita chamada de banda.
$x$	Coordenada cartesiana;

### Símbolos gregos

$\gamma_j$	Base adicional de $m$ termos;
$\delta_a, \delta_a$	Graus de liberdade regulares e adicionais do MEFM, respectivamente;
$\delta S$	Área total de uma seção no EVR;
$\delta \tilde{S}$	Área equivalente;
$\delta S_d$	Área danificada da seção $\delta S$ ;
$\delta_{S_d}$	Distribuição delta de Dirac;
$\mathcal{H}$	Função Heaviside;
$\mathcal{H}_{S_d}$	Função Heaviside centrada na descontinuidade $S_d$ ;
$\sigma$	Tensor de tensões;
$\sigma'$	Tensor de tensões equivalente;
$\varepsilon$	Tensor de deformações;
$\varepsilon$	Deformações principais;
$\varepsilon_{d0}$	Valor inicial de deformação crítica;
$\varepsilon_{eq}$	Variável de controle do dano (deformação equivalente);
$\varepsilon_{eq}^{MA}$	Deformação equivalente de Mazars;
$\varepsilon_{eq}^{max}$	Deformação equivalente máxima;
$\varepsilon_{eq}^{VM}$	Deformação equivalente de von Mises modificado;
$\nu$	Coefficiente de Poisson;
$\varphi_i(x)$	Funções de interpolação;
$\varphi_i^k(x)$	Funções de partição da unidade de ordem $k$ ;
$\Phi_F$	Energia específica;
$\Psi$	Ponto de mudança de direção das leis de dano ( <i>kink point</i> );
$\otimes$	Produto de Kronecker.

## **Abreviaturas**

CBM	<i>Crack Band Model;</i>
CDM	<i>Continuum Damage Mechanics;</i>
CZM	<i>Cohesive Zone Models;</i>
CTOD	<i>Crack Tip Opening Displacement;</i>
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement;</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement;</i>
DEN	<i>Double Edge Notched;</i>
ECC	<i>Engineered Cementitious Composite;</i>
EDM	<i>Embedded Discontinuities Methods;</i>
EVR	Elemento de Volume Representativo;
FPB	<i>Four Point Bending;</i>
FPS	<i>Four Point Shear;</i>
FPZ	<i>Fracture Process Zone;</i>
FRC	<i>Fiber Reinforced Concrete;</i>
LEFM	<i>Linear Elastic Fracture Mechanics;</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos;
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados;
PCC	<i>Portland Cement Concrete;</i>
SCM	<i>Smearred Crack Model;</i>
SEM(B)	<i>Single Edge Notched Beam;</i>
TPB	<i>Three Point Bending;</i>
TPFM	<i>Two Parameter Fracture Model;</i>
XFEM	<i>Extended Finite Element Methods.</i>

# 1 - INTRODUÇÃO

Uma das maiores preocupações da engenharia têm sido entender e controlar o processo de ruptura ou falha em materiais e estruturas a fim de evitar eventos catastróficos. As mais modernas tecnologias da engenharia têm permitido a modelagem de falhas a fim de minimizar a ocorrência de catástrofes, bem como desenvolver novos materiais e elementos estruturais. Entender o comportamento dos materiais *quasi*-frágeis tem sido um desafio para a engenharia, uma vez que o mesmo apresenta um tipo de ruptura, na qual pequenas deformações plásticas ocorrem após o limite elástico e em última análise, eventualmente, levam a uma falha súbita (Shah *et al.*, 1995). Um tipo de material *quasi*-frágil, para o qual o estudo dos mecanismos de falha é de importante relevância científica, é o concreto, uma vez que o mesmo é o material mais utilizado pela engenharia no mundo, sendo empregado em vários sistemas estruturais, tais como residências, prédios, instalações industriais, aeroportos, pontes e pavimentos.

Nos materiais *quasi*-frágeis há uma zona de processo de dano/fratura, *Fracture Process Zone* (FPZ), à frente da macrotrinca. O tamanho dessa FPZ é grande em comparação com o tamanho da trinca e com o tamanho característico da estrutura. Observações realizadas indicam que a largura da FPZ varia, da ordem de centímetros a ordem de metros, dependendo de fatores como carregamento, propriedades de fratura, geometria e resistência. A maior parte dessa zona é caracterizada por um comportamento não-linear causado principalmente por deformações inelásticas. Materiais cimentícios com incorporação de fibras são um exemplo de material com uma grande zona de processo que apresenta uma distribuição considerável de microfissuras espalhados ao redor da ponta da trinca. Este Dano/FPZ presente em materiais *quasi*-frágeis é amplamente estudada na literatura pela Mecânica da Fratura e pela Mecânica do Contínuo.

A Mecânica da Fratura lida com descontinuidades causadas pela formação e crescimento de uma macrotrinca. Uma idealização muito comum na Mecânica da Fratura são os Modelos de Zona Coesiva, *Cohesive Zone Models* (CZM), inicialmente introduzido por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), para abordar as singularidades de ponta de trinca. Nestes modelos, todas as não linearidades estão localizadas numa zona coesiva à frente da ponta da trinca que é associada com a FPZ. No CZM, ambas as zonas das microtrincas e macrotrincas são

idealizadas como uma linha (no caso de análises bidimensionais) ou superfície (no caso tridimensional) à frente da trinca livre de tensões.

A Mecânica do Contínuo também tem sido usada para descrever o comportamento de dissipação de materiais induzido pela iniciação e desenvolvimento de microtrincas em torno de uma macrotrinca. Os modelos de fissuras distribuídas, *Smearred Crack Model* (SCM), e fissuras em banda, *Crack Band Model* (CBM), são exemplos de abordagens que utilizam curvas tensão-deformação de testes de fratura para modelar fissuras distribuídas em uma certa região localizada ou modelar fissuras em banda no material (Bazant e Oh, 1983). Outra abordagem baseada na Mecânica do Contínuo é a Mecânica do Dano Contínuo, *Continuum Damage Mechanics* (CDM), que considera estados variáveis relacionados com a direção do carregamento (por exemplo,  $\sigma$  e  $\epsilon$ ) para descrever os processos irreversíveis tais como o estado de danificação, endurecimento e amolecimento (Lemaitre e Chaboche, 1990). O amolecimento é manifestado através da perda da resistência ou rigidez do material. A principal vantagem da CDM é que seus modelos são formulados para elementos contínuos e não é necessário a inserção de nenhum elemento especial a priori nem posteriormente. Em termos da implementação numérica, modelos de degradação do contínuo têm a vantagem de não requererem técnicas de discretização especiais a fim de traçar a propagação da trinca discreta. A representação contínua dessa trinca simplesmente segue a evolução do dano na região contínua. Além disso, esses modelos são adequados para carregamento multiaxiais comumente encontrados em problemas reais.

A principal desvantagem dos modelos de dano é a não convergência dos resultados numéricos sobre refinamento de malha. Esta desvantagem é muitas vezes referenciada na literatura como não objetividade da resposta numérica (Bazant e Planas, 1998). Além disso, é reportada uma transferência de tensões não realísticas entre elementos completamente danificados devido à incapacidade do modelo de campo contínuo em representar a descontinuidade (Simoni *et al.*, 2003). A primeira desvantagem citada pode ser superada através de uma técnica de regularização baseada em variáveis de dano não-locais (Cabot e Bazant, 1987; Bazant e Jirásek, 2002), campos de gradientes mais elevados (Peerlings *et al.*, 1996) ou normalização usando energia de fratura (Rots *et al.*, 1985; Carpinteri *et al.*, 1997). É importante salientar que as duas primeiras técnicas são custosas numericamente. A segunda desvantagem está relacionada com a limitação inerente e essencial da CDM em não

ser capaz de simular a zona livre de tração induzida por uma macrotrinca, como permitido pelos modelos da Mecânica da Fratura.

Diante das considerações feitas, pode ser concluído que uma abordagem descontínua, através da mecânica da fratura, pode descrever melhor a propagação da trinca, porém não captura adequadamente os mecanismos que conduzem à coalescência da mesma nas fases iniciais. No entanto, uma abordagem contínua através da mecânica do dano, pode descrever com mais acurácia esses estágios iniciais. Isto naturalmente leva a uma ideia de uma descrição contínua-descontínua integrada de falha em que a degradação ocorra inicialmente na FPZ descrita pela CDM (regularizada) e, em seguida, se tenha o crescimento da descontinuidade, descrito pela Mecânica da Fratura, quando o estado de dano atinge um valor limite a ser relatado para a localização da trinca discreta (Peerling *et al.*, 2001). Essa técnica faz uso das vantagens de métodos desenvolvidos recentemente para a propagação de trinca que utilizam o Método da Partição da Unidade, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados e o Método dos Elementos Estendidos. Esses novos métodos numéricos têm mostrado bom potencial em superar as dificuldades da simulação de trincas. Nestes modelos a base de aproximação padrão do método dos elementos finitos pode ser enriquecida localmente com funções especiais que podem aproximar descontinuidades ou campos singulares. Portanto, eles tem a capacidade de simular arbitrariamente a propagação de trinca sem que a mesma ocorra em regiões pré-definidas ou ao longo das fronteiras dos elementos (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2001; Mariani e Perego, 2003; Kim e Duarte, 2015).

## **1.1 - OBJETIVOS**

### **1.1.1 - Objetivo geral**

A presente pesquisa tem como objetivo geral formular e implementar um modelo de dano contínuo e um modelo de dano contínuo-descontínuo (com transição para fratura) para os modos I e misto (I+II) de abertura de trincas, utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados, para a predição de falhas em estruturas *quasi*-frágeis. A principal contribuição da dissertação é o desenvolvimento de um modelo capaz de simular a resistência de membros estruturais sob falhas em modo misto de maneira eficiente e com objetividade de malha. Os modelos são baseados em uma lei de evolução de dano com parâmetros físicos obtidos em ensaios de resistência e fratura sem a necessidade de calibração adicional dos parâmetros do modelo.

### **1.1.2 - Objetivos específicos**

Os objetivos específicos são:

- Apresentar uma estratégia contínua aliada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados, denominada de estratégia contínua-descontínua, que visa a propagação da trinca independentemente da malha de elementos finitos;
- Verificar a capacidade do modelo em reproduzir o comportamento e a capacidade (carga máxima) estrutural dos ensaios simulados numericamente;
- Validar a lei bilinear coesiva obtida em modo I de fratura e sua aplicação para o modelo de dano contínuo tanto em modo I como em modo misto de falha;
- Validar os modelos através da comparação com resultados experimentais retirados de trabalhos respeitadas na literatura;
- Verificar a eficiência da regularização da energia de fratura proposta para superar o problema da não objetividade da malha de elementos finitos;
- Analisar a influência que alguns parâmetros de fratura utilizados no modelo têm na resposta estrutural predita pela simulação numérica;
- Verificar a capacidade da estratégia utilizada para a resolução e convergência do sistema de equações;
- Comparar os resultados numéricos obtidos com outros resultados numéricos da literatura a fim de verificar a eficiência do modelo com relação ao número de elementos utilizado nas malhas; e
- Comparar, para o caso de modo I, os resultados obtidos para as deformações equivalentes utilizadas no cálculo da variável de controle de dano.

## **1.2 - ORGANIZAÇÃO**

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica da Mecânica do Dano Contínuo, Mecânica da Fratura e do Método dos

Elementos Finitos Generalizados. O capítulo 3 traz a formulação e implementação do modelo de dano contínuo e contínuo-descontínuo. O capítulo 4 apresenta os resultados para os ensaios em modo I de fratura. O capítulo 5 mostra os resultados para os ensaios em modo misto (I+II). Por fim o capítulo 6 traz as principais considerações e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo descreve inicialmente a modelagem contínua de falha baseada na Mecânica do Dano Contínuo. Alguns conceitos básicos da teoria, bem como uma revisão dos modelos de dano aplicados na predição de falhas em materiais *quasi*-frágeis são apresentados, por fim, são descritas algumas questões sobre a modelagem computacional usando a Mecânica do Dano Contínuo e as abordagens existentes para superá-las. Em seguida, assim como é feito para a modelagem contínua de falha, descreve-se a modelagem descontínua de falha baseada na Mecânica da Fratura Linear Elástica. A última seção traz uma formulação simplificada do Método dos Elementos Finitos Generalizados utilizado para descrever o caminho da trinca nas simulações numéricas realizadas nesta pesquisa.

### 2.1 - MODELAGEM CONTÍNUA DE FALHA

A modelagem contínua de falha faz uso da Mecânica do Contínuo para descrever a perda de rigidez ou qualquer outro fenômeno dissipativo nos materiais, tais como microtrincamento ou deformações plásticas. Portanto, o microtrincamento do material é representado como uma região contínua que tem uma redução de sua capacidade de suporte de carga. Esta abordagem é nomeada Mecânica do Dano Contínuo, *Continuum Damage Mechanics* (CDM), e é descrita a seguir.

#### 2.1.1 - Conceitos da Mecânica do Dano Contínuo

A teoria do dano, originalmente proposta por Kachanov (1958), caracteriza o microtrincamento como um processo que precede a falha macroscópica do material. Mais tarde Lemaitre e Chaboche (1990) formalizaram a teoria da mecânica do dano com princípios termodinâmicos. A ideia geral é que, a partir do histórico de restrições e distorções sobre um determinado volume de uma estrutura, leis de evolução pudessem caracterizar o dano de forma progressiva, isto é, partindo de microtrincamentos até o desenvolvimento e surgimento de uma macrotinca. A seguir se introduz brevemente os principais conceitos da mecânica do dano isotrópico (variável escalar) utilizados neste trabalho.

Para representar o dano no material, considere o corpo sólido danificado mostrado na Figura 2.1(a). Um elemento de volume representativo (EVR), que represente a heterogeneidade presente no sólido é selecionado conforme mostra a figura. Seja  $\delta S$  a área total de uma dada

superfície dentro do EVR com normal  $\mathbf{n}$  e um dado vetor de referência  $\mathbf{v}$ . Dentro de  $\delta S$ , a parcela da área  $\delta S_D$  corresponde aos vazios e/ou descontinuidades geométricas, ver Figura 2.1(a). O dano local  $D$  do EVR na direção  $\mathbf{n}$  é dado por:

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (2.1)$$

A variável  $D$  é igual a 0 para um material intacto ou sem a presença de dano, 1 para um material totalmente danificado e entre  $0 < D < 1$  para qualquer outro estado de dano intermediário.

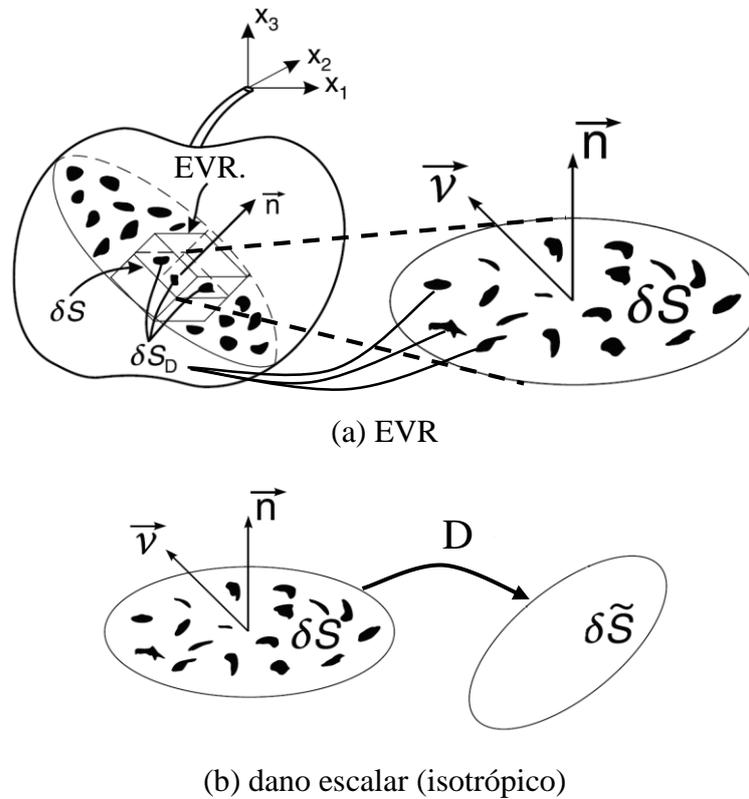


Figura 2.1 – Elemento de um sólido danificado (adaptada de Lemaitre e Desmorat, 2004): (a) elemento de volume representativo (EVR) de uma superfície do corpo; (b) operador de dano escalar (estado isotrópico).

A hipótese de isotropia assume que o dano cria microtrincas distribuídas uniformemente em todas as direções. Neste caso, o valor da variável  $D$  não depende da direção  $\mathbf{n}$ . Portanto, o escalar  $D$  caracteriza plenamente o estado do dano no sólido. Além disso,  $D$  é um operador transformando a atual área  $\delta S$  em uma área equivalente menor e contínua  $\delta \tilde{S} = \delta S - \delta S_D$ , como mostrado na Figura 2.1(b), assim:

$$\delta\tilde{S} = (1 - D)\delta S \quad (2.2)$$

Na mecânica do dano, o conceito de tensão efetiva  $\sigma'$  foi introduzido por Rabotnov (1969) e é definido como:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (2.3)$$

Em que  $\sigma$  é o tensor de tensões para o material não danificado e  $\sigma'$  é o tensor para o material danificado. Rabonov (1969) assumiu que qualquer comportamento de um material danificado é descrito pelo comportamento do material intacto, no qual a tensão do material não danificado é substituída pela tensão efetiva.

Estendendo a discussão acima para o comportamento elástico de um material danificado, onde a variável escalar caracterizada pelo dano escalar isotrópico  $D$  resulta numa mudança (perda) no tensor de rigidez elástica, tem-se:

$$\sigma' = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Assim:

$$\sigma = (1 - D)\mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações, e  $\mathbf{C}_0$  é o tensor elástico de quarta ordem. Equivalência de deformação entre o estado danificado e não danificado é assumida para a equação anterior. Outras derivações assumindo a equivalência de tensões ou energia podem ser encontradas em (Lemaitre e Chaboche, 1990; Lemaitre, 1992; Proença, 2008).

A variável de dano  $D$  pode seguir uma lei de evolução baseada num critério de deformação (Mazars, 1984; Vree *et al.*, 1995), energia, ou tensão. O modelo escalar proposto por Mazars (1984) descreve a fratura do concreto em modo I ou Modo Misto (Modo I e II) usando um critério de tensão ou deformação para a lei de evolução do dano. Maiores detalhes são descritos mais adiante no Capítulo 3

### 2.1.2 - Modelos de dano para materiais *quasi-frágeis*

A literatura contém uma grande variedade de modelos baseados na CDM, desde modelos mais simples que usam apenas uma variável escalar de dano, até modelos mais sofisticados que usam um tensor de dano de segunda e quarta ordem, (Simo e Ju, 1987; Krajcinovic, 1989; Lemaitre, 1992; Oliver, 1995) têm sido usados. Ortiz (1985), por exemplo, usou um tensor de conformidade completo de quarta ordem que é equivalente a 21 variáveis escalares de dano. Este tipo de tensor juntamente com um tensor de deformação plástica (equivalente a 6 variáveis escalares de dano) tiveram como objetivo descrever o comportamento de amolecimento de materiais *quasi-frágeis* como o concreto. Embora estes modelos mais complexos consigam reproduzir melhor o comportamento de amolecimento de materiais *quasi-frágeis*, eles requerem um grande número de variáveis, sendo que muitas das quais não possuem significado físico ou requerem testes complicados, com carregamentos multiaxiais, para serem obtidas. Alguns modelos contínuos de dano também foram desenvolvidos para materiais dependentes de taxas. Os estudos de Schapery *et al.* (1975a,b,c; 1981; 1999) descrevem leis de evolução de dano para materiais viscoelásticos. Recentemente, Chehab *et al.* (2003) e Kim e Chehab (2004) desenvolveram um modelo de dano viscoelastoplástico para materiais de concreto asfáltico. O concreto também tem sido modelado com modelos de dano plástico, os trabalhos de Willam *et al.* (1987), Pamin e de Borst (1999), Comi e Perego (2001) Benvenuti *et al.*, (2002) e Comi *et al.* (2007) são citados como exemplos.

Mazars desenvolveu um conjunto de modelos (1984, 1986, 1990) que usa apenas uma variável escalar de dano para descrever o processo de danificação do concreto submetido a tensão e/ou compressão. O modelo consegue descrever a evolução do comportamento do dano sob condições de carregamento específicos, tais como carregamento proporcionalmente crescente. Uma vez que esse tipo de carregamento é o mais comumente adotado para a maioria das estruturas, esse tipo de modelo tem sido usado em muitos problemas bidimensionais da engenharia. (Mazars, 1984; Bazant *et al.*, 1984; Perego, 1989; Mazars *et al.*, 1990; La Borderie *et al.*, 1991; Alvares, 1993; Simone *et al.*, 2002; Barros *et al.*, 2002; Choinska, 2006; Proença e Torres, 2008). Recentemente, Proença e Torres (2008) usaram o modelo de Mazars em análises não lineares juntamente com o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) em problemas 3D.

Uma das grandes vantagens é que o modelo de Mazars usa um pequeno número de variáveis, todas com significado físico e determinadas a partir de ensaios simples (tensão e compressão uniaxial). Também há o fato de que suas suposições são baseadas em comportamentos do concreto bem conhecidos na literatura e que podem ser consideradas para o estado triaxial de tensões em estruturas de concreto. O dano é modelado através de microtrincas distribuídas uniformemente representando a falha do concreto quando submetido ao Modo I ou Modo Misto (I+II).

### **2.1.3 - Questões de modelagem computacional usando CDM**

Uma característica comum dos modelos CDM é a não convergência com grande refinamento de malha. A resposta é dependente da malha utilizada e o resultado global diverge com um maior refinamento da malha levando a respostas mais rígidas. Essa característica é reportada na literatura como “não-objetividade” do modelo (Crisfield, 1984; Belytschko e Bazant, 1986; Perego, 1989; Oliver, 1989; Álvares, 1993, Bazant e Planas, 1998). A razão para a perda de objetividade é o fato de que a zona de localização (ou banda de localização) evolui continuamente em forma de arco para uma largura nula que é a condição de uma evolução discreta de fratura. Conforme a malha é refinada, a zona de dissipação do dano tende a ser mais estreita e se localizar em apenas alguns elementos, redistribuindo as tensões ao redor, enquanto os elementos vizinhos são descarregados. A energia total dissipada, portanto, decresce para malhas finas e converge para zero conforme o tamanho do elemento diminui. A Figura 2.2 mostra um exemplo de não-objetividade da curva força-deslocamento para uma barra carregada axialmente baseado nos estudos de Driemeier *et al.* (2005).

Um grupo de alternativas para evitar o problema acima citado é o uso de técnicas de regularização baseada em variáveis de dano não-locais (Pijaudier-Cabot e Bazant, 1987; Bazant e Jirásek, 2002), campos de gradientes mais elevados (Peerlings *et al.* 1996) ou normalização feita especificando uma dissipação da energia por unidade de comprimento na zona de dano (Rots *et al.*, 1985; Carpinteri *et al.*, 1997). Assim, a dissipação da energia é forçada a ser independente da malha usada. Essas alternativas previnem uma localização da dissipação da energia em regiões localizadas (em um elemento ou apenas em alguns deles).

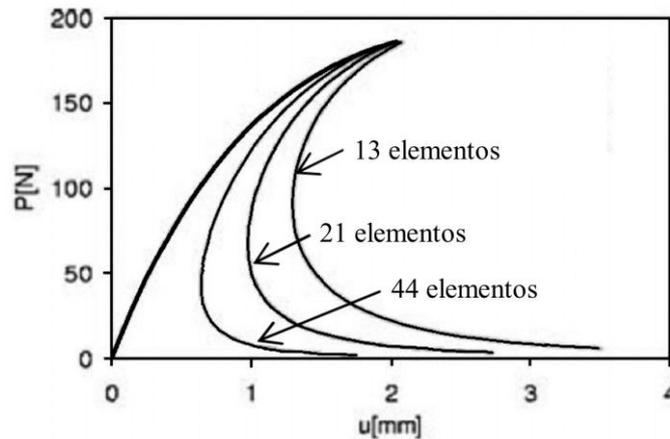


Figura 2.2 – Curva força-deslocamento em uma barra carregada axialmente para três tamanhos de malha (adaptada de Driemeier *et al.*, 2005).

#### 2.1.4 - Abordagens atuais para o crescimento do dano na CDM

Um forma de resolver o problema da não-objetividade da CDM relativa à dependência da dissipação de energia sobre o refinamento da malha utilizada é o Modelo de Trinca em Banda, *Crack Band Model* (CBM). O CBM foi desenvolvido inicialmente por Bazant *et al.* (1976) e aperfeiçoado por Bazant e Cedolin (1979, 1983) e Bazant e Oh (1983). De acordo com o modelo, a relação tensão-deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para a curva de amolecimento está associada com uma região de largura finita chamada de banda ( $w_{banda}$ ) que se assume ser uma propriedade do material. Assim, uma função da deformação de fratura pode ser relacionada com uma função do deslocamento de abertura de trinca (Bazant e Oh 1983). Uma vez que o processo de dissipação é associado com uma largura finita do material, o problema da localização espúria do processo de amolecimento não fica condicionado a uma região estreita do modelo estrutural. Outra vantagem é que a curva ( $\sigma - \varepsilon$ ) no CBM pode ser equiparada com a curva ( $\sigma - w$ ). Esta é a razão pela qual resultados computacionais usando CBM e CZM são numericamente equivalentes (Elices e Planas, 1989, Leibengood *et al.*, 1986).

Oliver (1989) encontrou resultados similares, porém mais genéricos e podendo ser aplicados em qualquer representação contínua de problemas de localização, como propagação de trinca. A energia dissipada dentro de uma banda contornada por duas linhas singulares paralelas entre si e com deslocamentos contínuos, porém com gradiente de deslocamento descontínuo, foi analisada. Uma expressão para o comprimento característico ( $l_c$ ) foi

definida como a razão entre a energia dissipada por unidade de superfície de área (energia de fratura,  $G_F$ ) e a energia por unidade de volume (energia específica,  $\Phi_F$ ):

$$\Phi_F = \frac{G_F}{l_c} \quad (2.6)$$

A Equação (2.6) relaciona as duas energias mostrando que a normalização de  $G_F$  através do comprimento característico  $l_c$  é igual à energia específica considerada na evolução do dano evoluindo dentro do volume. Com isso, Oliver (1989) mostrou que, através do uso de  $l_c$  para atribuir a quantidade de energia em cada ponto da trinca, objetividade, convergência e insensibilidade à malha podem ser alcançadas. O comprimento característico definido por Oliver (1989) é a largura de banda de trinca ( $l_c = w_{banda}$ ) proposta por Bazant e Oh (1983). Bazant e Pijaudier-Cabot (1989) identificaram esse comprimento como sendo uma propriedade fundamental de materiais *quasi*-frágeis e propuseram um método de teste para quantificá-lo através da comparação das duas energia presentes na Equação (2.6). Bazant e Pijaudier-Cabot (1989) também apresentam uma estimativa para o valor de  $l_c$  baseado em resultados experimentais através da Equação (2.7):

$$l_c \approx 3d_a \quad (2.7)$$

em que  $d_a$  é o tamanho máximo do agregado no material. Este valor foi consistente com resultados anteriores no qual  $l_c$  foi novamente calculado em análises de elementos finitos empregando o CBM e testes de fratura de amostras de várias geometrias, tamanhos, diferentes misturas (Bazant e Oh, 1983; Bazant e Pijaudier-Cabot, 1989; Bazant e Planas, 1998).

É importante notar que a largura de banda ( $w_{banda}$ ), ou comprimento característico ( $l_c$ ), é diferente do comprimento da zona de processo não-linear ( $l$ ) proposta por Irwin (1958) e também chamada de comprimento característico por Hilleborg *et al.* (1976) dado pela Equação (2.8).

$$l = \frac{EG_F}{f_t} \quad (2.8)$$

com  $E$  sendo o módulo de elasticidade e  $f_t$  a resistência à tração do material.

## 2.2 - MODELAGEM DESCONTÍNUA DE FALHA

A modelagem descontínua de falhas faz uso da mecânica da fratura para modelar e prever a propagação de trincas em materiais. A mecânica da fratura emprega conceitos baseados em tensões (ou energia) para modelar a falha mecânica de corpos a partir de fissuras discretas já presentes no corpo em consideração.

### 2.2.1 - Conceitos básicos da Mecânica da Fratura

Usando a Teoria da Elasticidade para estudar a concentração de tensões em um painel linear elástico semi-infinito com uma abertura elíptica em 1913, Inglis iniciou as abordagens baseadas em tensões da teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica, *Linear Elastic Fracture Mechanics* (LEFM). Alguns anos mais tarde, em 1920, Griffith abordou problemas similares mostrando que o campo de tensões cresce de forma inversamente proporcional à uma distância ( $r^{ct}$ ) da ponta da trinca ( $\sigma = 1/r^{ct}$ ). Foi então estabelecido o conceito de Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) que é um fator escalar, função da geometria e do carregamento do problema que indica a magnitude do campo de tensões na ponta da trinca. Por causa das singularidades do campo de tensões na ponta da trinca e complexidade matemática, Griffith propôs uma abordagem baseada em energia para a LEFM. Em seguida, Irwin (1975) expressou a energia necessária para abrir uma trinca de área unitária, chamando-a de *Energy Release Rate* ou taxa de liberação de energia ( $G$ ). A teoria é válida para materiais elástico lineares que apresentam qualquer um dos modos de abertura de trinca indicados na Figura 2.3 a seguir:

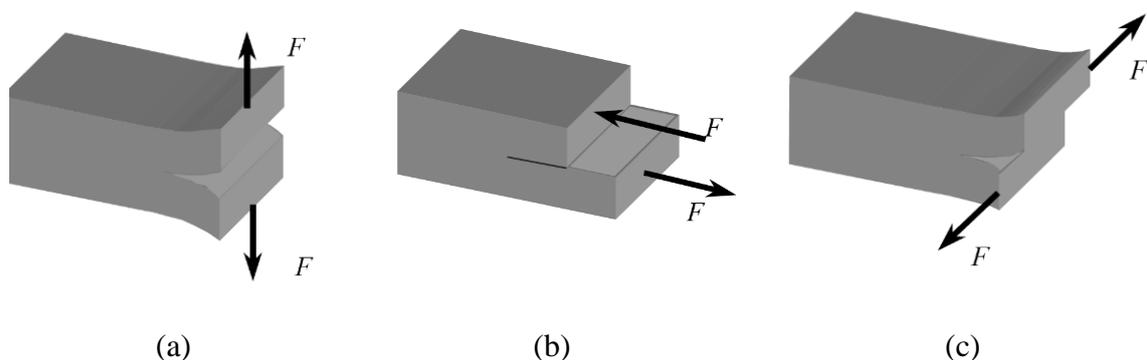


Figura 2.3 – Modos de fratura: (a) Modo I: tração pura; (b) Modo II: cisalhamento; (c) Modo III: torção, rasgamento.

## 2.2.2 - Modelos de fratura para materiais *quasi*-frágeis

Na abordagem descontínua, a trinca é modelada explicitamente como uma fissura discreta no material. A Figura 2.4 mostra um ensaio de tensão compacta em um material *quasi*-frágil de cimento compósito, *Engineered Cementitious Composite* (ECC). A Figura 2.4(a) mostra uma imagem aproximada da FPZ circuncidando a macrotrinca no instante em que a carga atinge 80% do seu valor máximo. A Figura 2.4(b) mostra o resultado final do ensaio, após a ruptura ser verificada. A zona difusa de microtrincas em torno da macrotrinca existe durante a propagação da trinca e depois da falha do material. Os primeiros modelos computacionais a usar a LEFM assumiram uma FPZ que era pequena quando comparada com o tamanho da trinca.

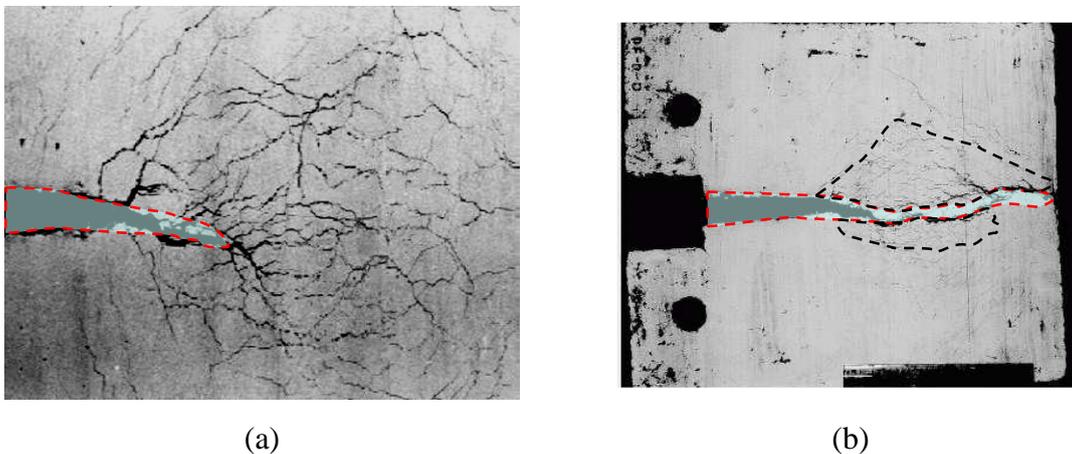


Figura 2.4 – Imagem do ensaio de tensão compacta no material *quasi*-frágil ECC em modo I: (a) imagem aproximada do entalhe no momento em que a carga atinge 80% da carga máxima; (b) ensaio após a ruptura (adaptada de Kabele e Horii, 1997).

Os primeiros trabalhos usaram as quantidades críticas da LEFM tais como o fator de intensidade de tensão crítico ( $K_c$ ) e/ou a taxa de dissipação de energia crítica ( $G_c$ ) para definir a direção e a magnitude de propagação da trinca (Ngo e Schordelis, 1967; Ingraffea, 1977; Blaauwendraad e Grootenboer, 1981, Wawrzynek e Ingraffea, 1991; Reich *et al.*, 1994; Bittencourt *et al.*, 1996). A principal limitação da LEFM para o caso de materiais *quasi*-frágeis é que a mesma não pode ser aplicada para a zona não elástica que existe em torno da ponta da trinca. Uma alternativa para modelar materiais com uma zona de processo de fratura não lineares ou plásticas tem sido a Mecânica da Fratura Não-Linear Elástica ou a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica. Combinações de critérios tais como Integral  $J$  (Hutchinson, 1968; Rice e Rosegren, 1968) e Deslocamento de Abertura de Boca de Trinca, *Crack Tip Opening Displacement* – CTOD, (Wells, 1963) também têm sido usados.

Atualmente, a modelagem de propagação de trincas discretas é realizada principalmente com o Modelo de Zona Coesiva. Esse modelo foi introduzido por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960) a fim de tratar as singularidades de tensões existentes na ponta da trinca. Nessa idealização, todas as não linearidades ocorrem em uma zona coesiva localizada na frente da ponta de trinca, o modelo está associado com a zona de processo físico de fratura em materiais *quasi*-frágeis. O modelo de zona coesiva tem sido utilizado em programas de elementos finitos através de elementos especiais, chamados de elementos de interface, que têm seu comportamento condicionado a uma lei coesiva de falha ( $\sigma - w$ ) para materiais com amolecimento coesivo definida através do comportamento do material. A Figura 2.5 descreve como o processo de falha é descrito através de uma lei de amolecimento segundo o modelo de zona coesiva.

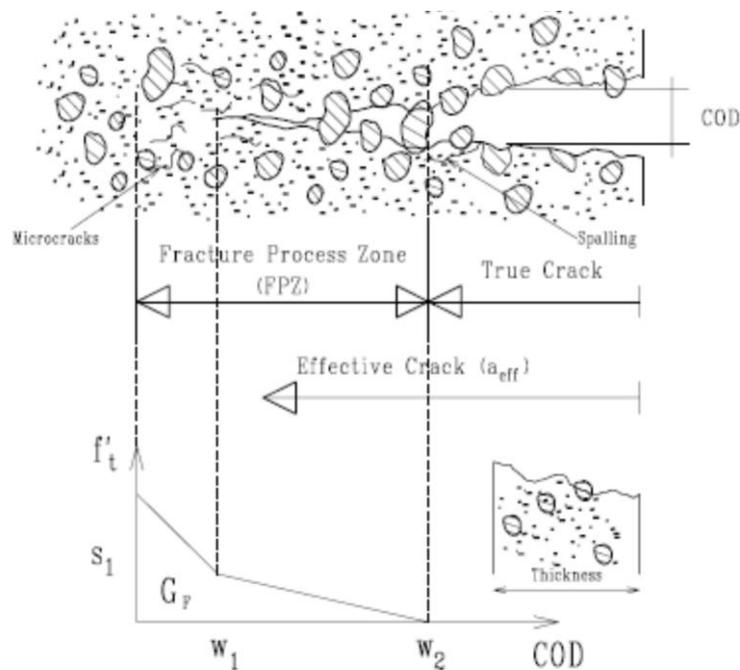


Figura 2.5 – Idealização do Modelo de Zona Coesiva com a respectiva lei constitutiva de amolecimento ( $\sigma - w$ ) de acordo com Hillerborg *et al.* (1976).

Esta idealização do processo de fratura tem sido implementada de duas maneiras: modelos intrínsecos e modelos extrínsecos. O modelo intrínseco tem uma rigidez inicial definida na lei ( $\sigma - w$ ) que vai até o instante em que a resistência à tração ( $f_t$ ) do material é atingida, quando então a resposta de amolecimento do material é ativada (Figura 2.6a). No modelo intrínseco o elemento de interface precisa ser inserido inicialmente no modelo (Needleman, 1987; Tvergaard e Hutchinson, 1992). Já o modelo extrínseco elimina a necessidade da rigidez inicial na lei ( $\sigma - w$ ), e os elementos de interface, juntamente com a lei de

amolecimento (Figura 2.6b), são inseridos uma vez que o material atinge a resistência mecânica à tração do material (Camacho e Ortiz, 1996; Ortiz e Pandolfi, 1999).

Hillerborg *et al.* (1976) aplicaram o conceito do modelo de zona coesiva em conjunto com o método dos elementos finitos para investigar o comportamento de fraturas no concreto, esse procedimento ficou conhecido como Modelo de fissura fictícia de Hillerborg. Desde então, essa metodologia tem sido amplamente utilizada para a simulação de fissuras no concreto (Peterson, 1981; Ingraffea e Saouma, 1985; Cervenka e Saouma, 1985; Carpinteri e Valente, 1989; Larrson e Runesson, 1985; Bittencourt *et al.*, 1992; Xu e Needleman, 1994; Bazant e Planas, 1998; Hanson e Ingraffea, 2002). No campo da modelagem 3D, modelos tridimensionais de fratura em concreto usando o modelo de zona coesiva foram implementados por Bittencourt (1993), Gaedicke e Roesler (2010), Evangelista Jr. *et al.* (2013) e Kim e Duarte (2015).

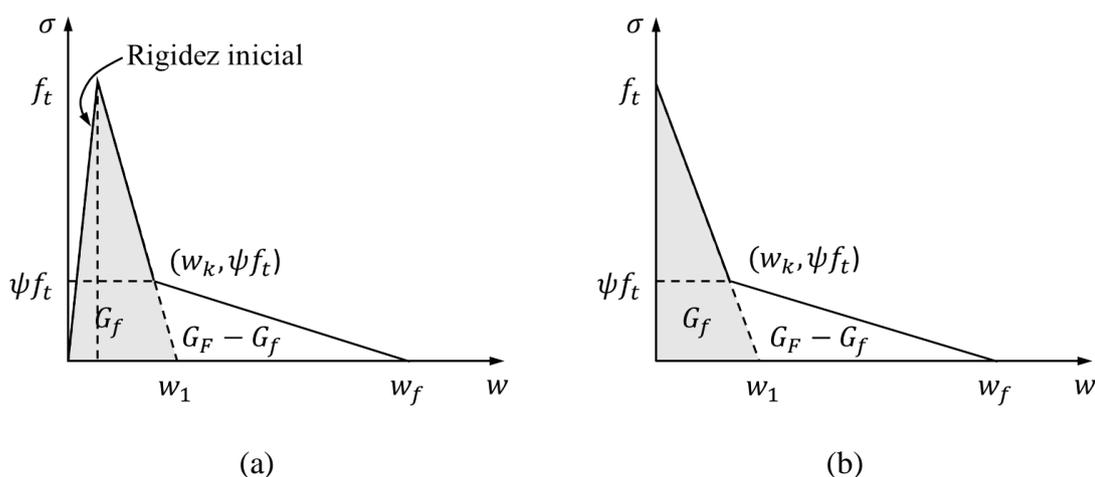


Figura 2.6 – Curvas de amolecimento; (a) intrínseco e (b) extrínseco (Roesler *et al.*, 2007a; Park *et al.*, 2009).

Recentemente, Roesler *et al.* (2007a) e Park *et al.* (2009) propuseram um modelo de zona coesiva com uma curva de amolecimento bilinear para materiais *quasi*-frágeis, essa lei é dependente da energia de fratura inicial ( $G_f$ ), energia de fratura total ( $G_F$ ) e da resistência à tração ( $f_t$ ). A principal vantagem deste modelo é que toda a curva de amolecimento é definida fisicamente por propriedades determinadas a partir de amostras (ensaios experimentais) de fratura e nenhum ajuste de curva é necessário para determinar a curva de resposta das amostras. Esses modelos têm sido usados com sucesso na predição de fraturas em materiais como o concreto submetidos a diferentes condições de contorno (Ioannides *et*

al. 2006; Roesler *et al.*, 2007b, Evangelista Jr. e Roesler, 2009; Gaedicke e Roesler (2010); Gaedicke *et al.*, 2012; Evangelista Jr. *et al.*, 2013).

### 2.2.3 - Limitações da modelagem descontínua de materiais

A principal característica do modelo de zona coesiva descrito na seção anterior é que ele simula a trinca como uma descontinuidade entre elementos. Portanto, a trinca é simulada através do uso de elementos de interface inseridos entre os elementos finitos convencionais. Esta abordagem permite modelar trincas explícitas e evita a transferência de tensões espúrias entre as faces da trinca. Uma desvantagem é que o elemento de interface deve ser inserido ao longo da superfície da trinca para ambos os modelos intrínseco e extrínseco, conforme descrito pela Figura 2.7. Além do mais, é necessário um refinamento significativo da malha nas regiões críticas (zonas de concentração de tensão) a fim de conseguir a convergência do modelo em acordo com o experimental.

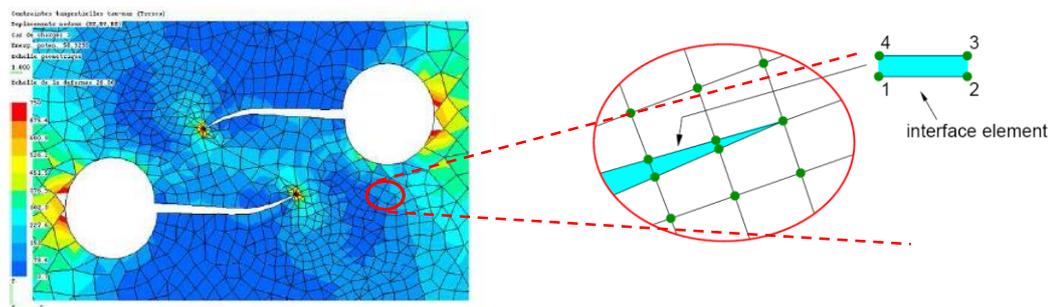


Figura 2.7 – Elemento de interface na montagem do caminho da trinca (adaptada de Ansys, 2009).

No modelo de zona coesiva intrínseco, os elementos de interface têm que ser inseridos inicialmente, o que significa que o caminho da trinca tem que ser conhecido antecipadamente e os elementos devem ser orientados na direção da trinca. Já o modelo de zona coesiva extrínseco não apresenta essas questões, uma vez que o elemento de interface é inserido somente quando algum critério é satisfeito, isto é, quando o nível de tensão no elemento atinge a resistência à coesão. No entanto, modelos extrínsecos requerem uma estrutura de dados topológica especial para lidar com a modificação na topologia da malha causada pela inserção de novos elementos (Zhang *et al.*, 2007). Portanto, o modelo extrínseco aumenta consideravelmente o custo computacional da análise.

#### 2.2.4 - Abordagens atuais para a idealização do crescimento da trinca

Uma forma alternativa de modelagem de descontinuidade é feita através da incorporação direta da trinca na malha de elementos finitos através do uso de funções especiais incorporadas diretamente na formulação de elementos finitos (Belytschko *et al.*, 1988; Dvorkin *et al.*, 1990). Atualmente, esta técnica e modelos são chamados de método de descontinuidade embutida, *Embedded Discontinuities Methods* (EDM). Esses modelos incorporam uma descontinuidade na aproximação do campo de deslocamento através de uma combinação da função Heaviside com as funções de forma padrão dos elementos finitos convencionais, permitindo a propagação da trinca dentro dos elementos (Dvorkin, 1990; Simo *et al.*, 1993; Oliver, 1995; de Borst, 2004). Esta nova abordagem representa um significativo avanço para a simulação do crescimento de trincas, uma vez que elementos de interface ou remalhamento não são necessários.

Uma técnica para incorporar descontinuidades não uniformes em elementos finitos sólidos padrão foi proposta por Manzoli e Shing (2006), mais tarde, Manzoli *et al.* (2013) apresentaram um esquema de rastreamento local-global para o caminho da trinca em sólidos tridimensionais e, mais recentemente, Manzoli *et al.* (2016) propuseram uma nova técnica para modelagem de trincas em materiais *quasi*-frágeis baseada no uso de elementos sólidos de interface, denominada de técnica de fragmentação de malha, que consiste na introdução de um conjunto de elementos de mais baixa ordem, chamado de *high aspect ratio* ou elevada relação de aspecto, entre os elementos regulares da malha para preencher as lacunas muito finas deixadas pelo procedimento de fragmentação da malha.

Os trabalhos de Rots e Blaauwendraad (1989), Wells *et al.*, (2002), Simone *et al.*, (2003), de Bost *et al.*, (2004) e Tejchman e Bobinski (2013) combinaram com sucesso abordagens contínua-descontínua para modelar dano e propagação de trinca em domínios bidimensionais para o concreto. Estes trabalhos fazem uso das vantagens de Métodos de Partição da Unidade, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos, *Extended Finite Element Methods* (XFEM). Estes métodos têm se mostrado promissores em superar dificuldades em simulações de descontinuidades (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2000; Duarte *et al.*, 2001; Mariani e Perego, 2003), inclusive quando usados em conjunto com modelos coesivos (Kim

e Duarte, 2015). Na próxima seção se apresenta de forma simplificada a formulação do MEFG baseada no modelo proposto por Wells e Sluys (2001) e Simone (2007).

### 2.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método numérico usado para modelar descontinuidades dentro de uma malha de elementos finitos padrão. Este método surgiu a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Duarte e Oden (1995), Melenk e Babuška (1996), Duarte e Oden (1996), Babuška e Melenk (1997) e Oden *et al.* (1998). O mesmo se baseia no princípio da partição da unidade e consiste, basicamente, no enriquecimento das funções de forma tradicionais dos elementos finitos com outras funções ditas especiais que representam o comportamento local da solução. Esse enriquecimento gera graus de liberdade extras nos nós do domínio sujeitos ao enriquecimento.

#### 2.3.1 - Cinemática do salto de deslocamento

Para incorporar uma descontinuidade num campo de deslocamento é necessário inicialmente caracterizar as propriedades cinéticas de um sólido cortado por uma descontinuidade. Para tal, considere o corpo  $V$  com contorno  $S$  e cortado por uma descontinuidade  $S_d$  que divide o corpo em dois domínios,  $V^+$  e  $V^-$  ( $V = V^+ + V^-$ ), mostrado na Figura 2.8. O campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  pode ser decomposto em duas partes: uma parte contínua e uma parte descontínua, conforme mostrado na Equação (2.9) a seguir:

$$\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(x, t) + \mathcal{H}_{S_d} [[\mathbf{u}(x, t)]] \quad (2.9)$$

em que  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $[[\mathbf{u}]]$  são funções contínuas no domínio  $V$  e  $\mathcal{H}_{S_d}$  é a função Heaviside centrada na descontinuidade  $S_d$  ( $\mathcal{H}_{S_d} = 1$  se  $x \in V^+$ ,  $\mathcal{H}_{S_d} = 0$  se  $x \in V^-$ ). A descontinuidade é introduzido pela função Heaviside na superfície descontínua  $S_d$  e o valor do salto de deslocamento é dado por  $[[\mathbf{u}]]$ .

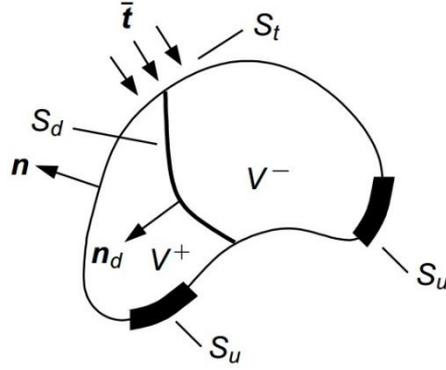


Figura 2.8 – Corpo  $V$  cortado pela descontinuidade  $S_d$  (Simone, 2007).

O campo de deformação pode ser obtido a partir do gradiente do campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ , conforme descrito na Equação (2.10) abaixo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{S_d}(\nabla^s \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) + (\nabla \mathcal{H}_{S_d} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{S_d}(\nabla^s \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta_{S_d}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n}_d)}_{\text{n\~{a}o-limitado}} \end{aligned} \quad (2.10a,b)$$

em que  $\delta_{S_d}$  é a distribuição delta de Dirac centralizada na descontinuidade,  $\mathbf{n}_d$  é o vetor normal unitário da descontinuidade (apontando para  $V^+$ ) e o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker. Todas as deformações são consideradas infinitesimais, portanto, a simbologia  $(\cdot)^s$  indica que somente a parte simétrica dos tensores está sendo considerada.

### 2.3.2 - A partição da unidade e os elementos finitos

Um conjunto de funções de interpolação  $\varphi_i(x)$ , cada qual pertencente a um nó, definidas ao longo de um domínio  $V$  ( $x \in V$ ) formam uma partição da unidade se:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \quad (2.11)$$

em que  $n$  é o número de pontos nodais. Duarte e Oden (1996) mostraram que um campo qualquer pode ser interpolado em termos de valores nodais discretos usando a partição da unidade na forma descrita pela Equação (2.12) a seguir:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^k(x) \left( a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \gamma_j(x) \right) \quad (2.12)$$

onde  $\varphi_i^k$  são funções de partição da unidade de ordem  $k$  (se a função de partição da unidade for polinomial,  $k$  indica a ordem do polinômio),  $a_i$  são os graus de liberdade padrão do nó,  $b_{ij}$  são os graus de liberdade adicionados e  $\gamma_j$  é a base adicional de  $m$  termos. Para se evitar a dependência linear, a ordem de qualquer termo da base adicional deve ser maior que  $k$ .

Considerando uma aproximação no âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), as funções de forma do elemento finito convencional podem ser consideradas como funções de partição da unidade, uma vez que:

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (2.13)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma. Com isso se pode perceber que a interpolação usada no elemento finito convencional, trata-se na verdade de um caso particular da Equação (2.12), pois substituindo  $\varphi_i$  pelas funções de forma e considerando que a base adicional  $\gamma_j$  é vazia, a Equação (2.12) transforma-se na aproximação mostrada na Equação (2.14).

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i^k(x) a_i \quad (2.14)$$

portanto, nada impede que a interpolação do campo de deslocamento seja feita usando os termos da base adicional em conjunto com os termos da base convencional (funções de forma). Em notação de elementos finitos, a aproximação do campo de deslocamento, usando a propriedade da partição da unidade, passa a ser descrita como:

$$\mathbf{u}(x) = \underbrace{\mathbf{N}(x)\mathbf{a}}_{\text{interpolação convencional}} + \underbrace{\mathbf{N}(x)(\mathbf{N}_\gamma(x)\mathbf{b})}_{\text{enriquecimento}} \quad (2.15)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matriz que contém as funções de forma (polinomiais) de ordem  $k$ ,  $\mathbf{a}$  é o vetor com os graus de liberdade regulares,  $\mathbf{N}_\gamma$  é a matriz com os termos da base adicional e  $\mathbf{b}$  é o vetor que contém os graus de liberdade adicionais, cuja quantidade por nó é igual ao número

de termos na base adicional multiplicado pela dimensão espacial. O campo de deformação em termos dos deslocamentos nodais pode ser descrito na Equação (2.16) a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}_\gamma \mathbf{b} \quad (2.16)$$

em que  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{L}(\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma)$  e  $\mathbf{L}$  é a matriz que contém os operadores diferenciais.

### 2.3.3 - Funções de enriquecimento

A escolha das funções de enriquecimento do MEF<sub>G</sub> levam em conta o tipo de análise e problema de valor de contorno que será considerado. A Figura 2.9 mostra exemplos de funções de enriquecimento tais como (a) contínuas e (b) descontínuas. Para o caso de descontinuidade, as funções de enriquecimento podem ser encontradas a partir da cinemática do salto de deslocamento comparando as Equações (2.9) e (2.15). A matriz  $\mathbf{N}$  multiplicada pelos graus de liberdade regulares  $\mathbf{a}$  da Equação (2.15) representam a parte contínua da Equação (2.9) e, da mesma forma, o produto  $\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma$  juntamente com os graus de liberdade adicionais  $\mathbf{b}$  representam a parte descontínua. Assim o termo  $[[\mathbf{u}]]$  pode ser interpolado pelas mesmas funções de forma  $\mathbf{N}$  do elemento finito padrão e a matriz da base adicional  $\mathbf{N}_\gamma$  assume a forma da função Heaviside. Com isso, o campo de deslocamento para um elemento com graus de liberdade extras pode ser interpolado pela Equação (2.17) a seguir:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{N}(x)\mathbf{a} + \mathcal{H}_{S_d}\mathbf{N}(x)\mathbf{b} \quad (2.17)$$

e o salto de deslocamento na descontinuidade  $S_d$  é dado por:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{N}\mathbf{b}|_{S_d} \quad (2.18)$$

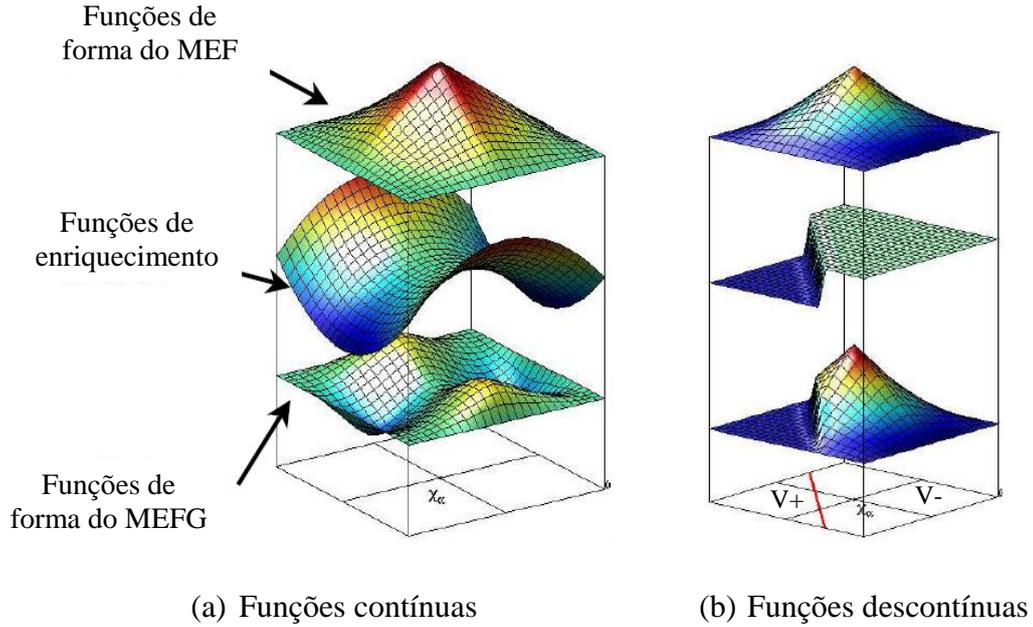


Figura 2.9 – Funções de forma do MEFG (adaptada de Pereira *et al.*, 2008).

### 2.3.4 - Discretização das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio para um corpo  $V$  (Figura 2.8) cortado por uma descontinuidade  $S_d$ , desconsiderando as forças de corpo, podem ser resumidas nas Equações (2.19a-c) a seguir:

$$\begin{aligned}
 \nabla \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \text{ em } V \\
 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \text{ em } S_t \\
 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_d &= \mathbf{t} \text{ em } S_d
 \end{aligned}
 \tag{2.19a-c}$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões de Cauchy,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a superfície do corpo  $V$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  é o vetor de forças aplicadas e  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças agindo na descontinuidade. As condições de contorno essenciais são dadas por:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } S_u
 \tag{2.20}$$

em que  $\bar{\mathbf{u}}$  são os deslocamentos prescritos.

De posse das equações de equilíbrio e condições de contorno, pode-se então aplicar a formulação variacional para encontrar as equações de equilíbrio discretizadas, maiores detalhes da formulação podem ser encontradas em Wells e Sluys (2001).

Para as relações constitutivas, as tensões para o domínio contínuo são expressas em termos dos deslocamentos nodais como mostrado na Equação (2.21) abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{a} + \mathcal{H}\mathbf{B}\mathbf{b}) \quad (2.21)$$

em que  $\mathbf{C}$  é a relação entre as tensões e as deformações. De forma análoga, as tensões na descontinuidade são expressa em termos dos deslocamentos nodais adicionais, conforme Equação (2.22) a seguir:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T}\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (2.22)$$

em que  $\mathbf{T}$  é a relação entre as tensões e os deslocamentos na descontinuidade. Por exemplo, em modelos de zona coesiva, a relação  $\mathbf{T}[\mathbf{u}]$  é descrita por um modelo constitutivo expresso em uma curva de tensão-abertura de trinca (*Traction-displacement*) que permite a simulação da zona de processo aplicando tensões normal ao plano de abertura dependentes do valor de abertura da trinca. No modelo proposto nesta dissertação, esta relação é considerada nula, o que permitiria a descontinuidade ao elemento finito sem a necessidade de uma relação constitutiva que relacione tensões e abertura de fissura. Neste caso a zona de processo é modelada pela evolução da não linearidade devido a danificação do material pelo modelo de dano contínuo, de modo que, quando este atinge um valor crítico ( $D_{cr}$ ), a descontinuidade é inserida no elemento por meio das funções de enriquecimento pertinentes.

O sistema de equações discretizado obtido é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_a \\ \boldsymbol{\delta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext,a} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int,a} \\ \mathbf{f}_{int,b} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

em que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{aa} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV \\
\mathbf{K}_{ab} &= \int_{V^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV \\
\mathbf{K}_{ba} &= \mathbf{K}_{ab}^T = \int_{V^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV \\
\mathbf{K}_{bb} &= \int_{V^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV + \int_{S_d} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} dS \\
\mathbf{f}_{int,a} &= \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad e \quad \mathbf{f}_{ext,a} = \int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \\
\mathbf{f}_{int,b} &= \int_{V^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS
\end{aligned} \tag{2.24a-f}$$

e  $\boldsymbol{\delta}_a$  e  $\boldsymbol{\delta}_b$  são, respectivamente, os graus de liberdade regulares e adicionais da formulação do MEFG. Maiores detalhes podem ser encontrados em Wells e Sluys (2001) e Simone (2007).

### 3 - FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

Este capítulo apresenta a formulação e a implementação do modelo de dano contínuo juntamente com a estratégia contínua-descontínua usando o MEEG descrito na seção 2.3 para a simulação do crescimento arbitrário de trincas 2D em materiais *quasi*-frágeis. A seguir são descritas as hipóteses básicas, restrições e limitações do modelo. Posteriormente, apresenta-se a lei de evolução do dano e, finalmente, propõe-se ensaios experimentais para identificar as propriedades do material a serem utilizadas. Finalmente, a estratégia não-linear utilizada para a solução do sistema de equações é descrita.

#### 3.1 - FORMULAÇÃO DO MODELO DE DANO PROPOSTO

O modelo de dano proposto é aplicado aos materiais *quasi*-frágeis sob condições de carregamento que resultam nos modos I ou misto (I+II) de propagação de trinca.

As hipóteses fundamentais que definem a capacidade e as limitações do modelo são as seguintes:

- O material em processo evolutivo de dano é considerado um meio elástico e não são consideradas deformações plásticas nem deformações inelásticas.
- O dano no material é causado por extensões (deformações positivas  $\varepsilon_i > 0$ ) ao longo das direções principais de tensão, o que significa que rupturas locais começam e se desenvolvem em modo I ou modo misto.
- O dano é representado por uma variável escalar  $D(0 \leq D \leq 1)$ . Devido à natureza escalar de  $D$ , uma condição de dano isotrópico é assumido para o material.

Para formular um modelo de dano termodinamicamente compatível, necessita-se que uma variável de controle de dano, uma superfície para a iniciação de dano e uma lei de evolução do dano sejam descritos (Lemaitre e Chaboche, 1990).

##### 3.1.1 - Variável de controle do dano

O dano é controlado por uma variável de estado que está relacionada com o tensor de deformações por meio de uma deformação equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ ), conforme proposto

originalmente por Mazars (1984). Essa deformação equivalente permite traduzir um estado triaxial de tensão-deformação em uma quantidade escalar. Diferentes pesos podem ser dados às componentes do tensor de deformação na definição de  $\varepsilon_{eq}$ .

Para os casos onde há uma predominância de deformações hidrostáticas e as deformações locais cisalhantes são desprezíveis, a deformação equivalente apresentada por Mazars (1984), aqui denominada  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ , é sugerida pela literatura como uma medida simples e eficiente (Mazars, 1984; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Schlangen, 1993; Geers, 1997; Simone, 2003; Proença e Torres, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011).

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (3.1)$$

com  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)/2$  e  $\varepsilon_i$  a deformação principal na direção  $i$ , note que apenas as deformações principais positivas são consideradas. É importante observar que  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  não consegue capturar efeitos deformacionais causados por tensões/deformações cisalhantes. Desta maneira, esta medida de deformação equivalente só foi considerada no modelo proposto desta dissertação para análises onde tensões de tração são predominantes, ou em modo I de fratura onde apenas as tensões perpendiculares ao plano da fissura são relevantes.

Em situações que os esforços cisalhantes não são desprezíveis na definição do estado deformacional, a deformação equivalente de von Mises modificado ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) se apresenta como uma boa alternativa para a variável de controle de dano (de Vree *et al.*, 1995; Geers, 1997; Simone, 2003; Jirásek e Grassl, 2008; e Hofstetter e Meschke, 2011). Esta deformação é dada na Equação (3.2):

$$\varepsilon_{eq}^{VM} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_{\varepsilon 1} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{\varepsilon 1}^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_{\varepsilon 2}} \quad (3.2)$$

em que  $I_{\varepsilon 1}$  é o primeiro invariante do tensor de deformações (traço do tensor de deformações):

$$I_{\varepsilon 1} = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.3)$$

e  $J_{\varepsilon 2}$  é o segundo invariante do tensor de deformações:

$$J_{\varepsilon 2} = tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{3} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.4)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações;  $k$  é a razão entre as resistências a compressão e a tração, e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Esta definição é chamada de “von Mises modificado” porque sua formulação considera a influência do primeiro invariante, uma vez que a formulação padrão de von Mises se baseia somente no segundo invariante do tensor desviador.

Devido ao fato que  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  leva em conta tanto o primeiro invariante, associado com os componentes hidrostáticos, como o segundo invariante, associado com os componentes desviadores, esta deformação equivalente é capaz de acoplar deformações cisalhantes para a lei de evolução do processo de danificação. Assim,  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  foi considerada no modelo proposto desta dissertação para análises tanto em modo I, como também para o modo misto (I+II), quando todas as componentes são consideradas e o cisalhamento é relevante.

### 3.1.2 - Critério de início do dano

O critério para início e evolução do dano está diretamente relacionado com a deformação equivalente que traduz o estado local de extensão do material. O início do dano ocorre quando a deformação equivalente atinge um valor inicial de deformação crítica ( $\varepsilon_{d0}$ ) correspondente à tensão máxima de um corpo de prova em tração uniaxial, conforme mostrado na Figura 3.1. No entanto, uma vez que é difícil executar ensaios uniaxiais de resistência à tração,  $\varepsilon_{d0}$  pode ser definida como a deformação elástica correspondente à resistência à tração ( $f_t$ ) encontrada através do ensaio de compressão diametral.

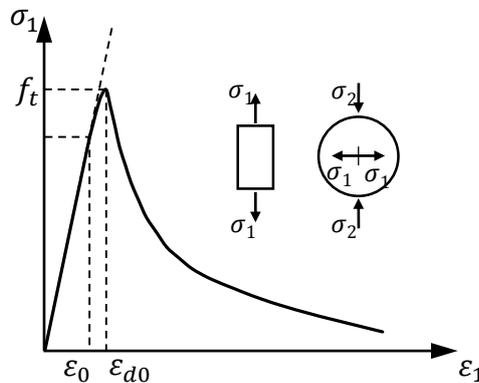


Figura 3.1 – Definição de  $\varepsilon_{d0}$  pelo ensaio de tração.

Em uma forma geral, o critério de dano pode ser dado pela Equação (3.5):

$$f(\varepsilon_{eq}) = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0} \leq 0 \quad (3.5)$$

### 3.1.3 - Lei de evolução do dano

A lei de evolução da variável escalar  $D$ , que atende aos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis (Lemaitre 1985) é representada pela Equação (3.6):

$$\dot{D} = \begin{cases} F(\varepsilon_{eq}) & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ ou } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) > 0 \\ 0 & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ e } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) < 0 \text{ ou } f(\varepsilon_{eq}) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

em que  $F(\varepsilon_{eq})$  é uma função contínua e positiva de  $\varepsilon_{eq}$  que descreve a evolução do dano. Esta função deve respeitar o comportamento experimental do material, ou seja, ela deve permitir a reprodução das curvas experimentais obtidas de ensaios uni, bi e/ou triaxiais.

Considerando um carregamento monotônico crescente até uma deformação equivalente máxima ( $\varepsilon_{eq}^{max}$ ), o valor explícito de  $D$  pode ser obtido através da Equação (3.7).

$$D(\varepsilon_{eq}) = \int_0^{\varepsilon_{eq}^{max}} F(\varepsilon_{eq}) d\varepsilon_{eq} \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) pode ser reescrita na forma das Equações (3.8a) e (3.8b) a seguir:

$$D(\varepsilon_{eq}) = D_0(\varepsilon_{eq}) + D_1(\varepsilon_{eq}) + \dots + D_i(\varepsilon_{eq}) + \dots + D_n(\varepsilon_{eq}) \quad (3.8a,b)$$

$$D_i(\varepsilon_{eq}) = \int_{\varepsilon_{eq_i}}^{\varepsilon_{eq_{i+1}}} F_i(\varepsilon_{eq}) d\varepsilon_{eq} \text{ para } \varepsilon_{eq_i} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{eq_{i+1}}$$

em que  $\varepsilon_{eq_{i+1}} = \varepsilon_{eq_f}$  para  $D_n$ . Esta equação permite que cada função  $D_i(\varepsilon_{eq})$  possa descrever um fenômeno diferente dentro do processo de amolecimento. Cada função é contínua dentro dos respectivos limites da integração, ou seja,  $F_i(\varepsilon_{eq})$  é contínuo no intervalo  $\varepsilon_{eq_i} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{eq_{i+1}}$ .

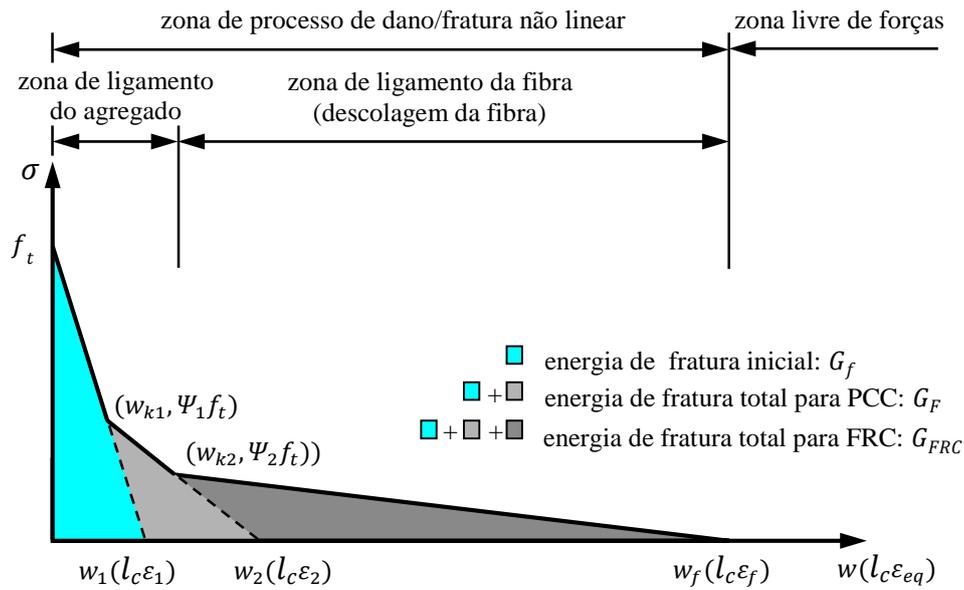
Associando a Equação (3.8) com a equação constitutiva da Equação (3.6) pode ser obtida a energia específica ( $\Phi_F$ ) durante o processo de danificação. Desta forma, o modelo proposto nesta dissertação estabelece que  $\Phi_F$  pode ser relacionada com a energia de fratura  $G_F$  por

meio da Equação (2.6). Seguindo essa equivalência, a relação  $(\sigma - \varepsilon)$  para a curva de amolecimento para o modelo de dano contínuo proposto é agora relacionada com uma região de largura finita, isto é, com um comprimento característico  $l_c$ . Consequentemente, a variável de dano escalar da Equação (3.8) para o material em tração é formulada baseada numa lei de fratura coesiva em modo I, ou seja,  $D(\sigma - w) = D(\sigma - \varepsilon_{eq})$  com  $w = \varepsilon_{eq} l_c$ .

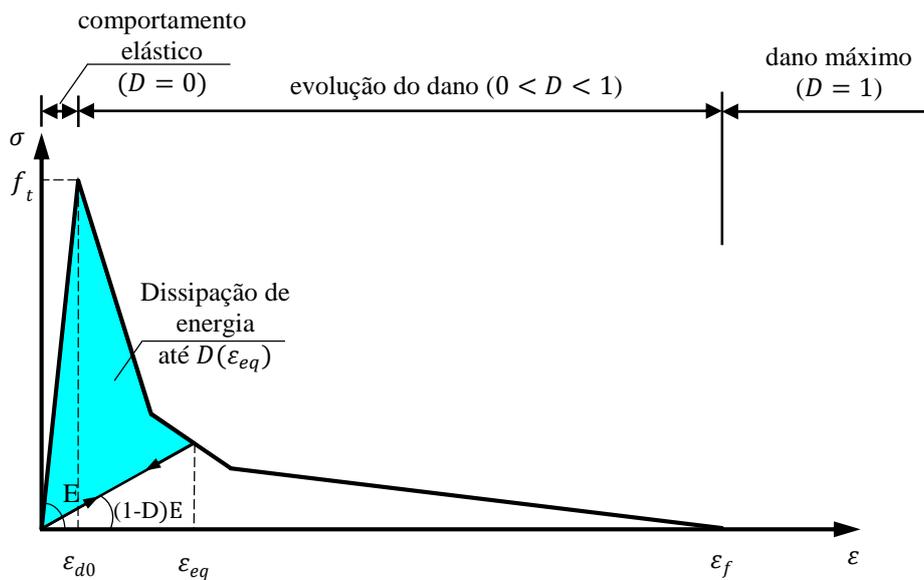
### 3.1.4 - Lei de evolução do dano para modo I

Uma lei de dano para a região de amolecimento (*softening*) em tração pura pode ser descrita através de uma curva bilinear de amolecimento para materiais *quasi*-frágeis cimentícios convencionais aqui denominados como PCC (Roesler *et al.*, 2007a); ou por uma curva trilinear de amolecimento para materiais cimentícios reforçados com fibras, aqui denominados por FRC (Park *et al.*, 2008). A zona de processo de fratura é descrita por uma relação tensão-deslocamento de amolecimento  $(\sigma - w)$ , conforme mostra a Figura 3.2a. Microtrincas crescem e coalescem numa macrotrinca localizada após a resistência a tração ( $f_t$ ) do concreto ser atingida, com o ligamento do agregado resistindo à abertura adicional da trinca. A energia de fratura inicial ( $G_f$ ) define a primeira inclinação descendente do modelo bilinear de amolecimento, e, juntamente com ( $f_t$ ), a carga máxima da estrutura. Esta característica do modelo bilinear de amolecimento permite que o efeito de escala em estruturas *quasi*-frágeis seja capturado (Planas e Elices, 1992; Bazant, 2002; Elices *et al.*, 2002). Conforme o carregamento continua, a energia é dissipada através da degradação do ligamento entre os agregados e a pasta de cimento. Finalmente, a liberação gradual de energia leva à separação completa da superfície da trinca, quando a energia de fratura total ( $G_F$ ) do material é totalmente dissipada.

Para materiais reforçado com fibra, uma energia de fratura adicional é dissipada devido ao mecanismo de deslocamento e arranque das fibras quando grandes deslocamentos de abertura de trinca ocorrem (Bazant e Planas, 1998; Bazant, 2002; Mindess *et al.*, 2003; Evangelista Jr. *et al.*, 2009; Evangelista Jr. *et al.*, 2013). Quando o deslocamento de abertura da trinca atinge uma certa magnitude ( $w_f$ ), surge então uma superfície livre de forças que corresponde a uma macrotrinca. Portanto, a adição de fibras aumenta a energia de fratura total segundo o tamanho representado pela área mais escura da Figura 3.2(a) ( $G_{FRC} \gg G_F$ ).



(a) Relação constitutiva entre força-deslocamento. Entre parêntesis a equivalência em deformação equivalente ( $\epsilon_{eq}$ ) para um comprimento equivalente  $l_c$



(a) modelo de dano

Figura 3.2 – (a) Comportamento de amolecimento para o material PCC e o FRC descrito por experimentos de fratura em modo I, e (b) modelo de dano correspondente (adaptada de Evangelista Jr. *et al.*, 2013).

A energia de fratura total dissipada durante o crescimento da trinca para o PCC e o FRAP é definida como a área abaixo da curva  $(\sigma - w)$ , Equações (3.9a) e (3.9b), respectivamente.

$$G_F = \int_0^{w_2} \sigma(w)dw \quad (3.9a,b)$$

$$G_{FRC} = \int_0^{w_f} \sigma(w)dw$$

em que  $w_2$  e  $w_f$  são as aberturas de trincas que resultam numa região livre de forças para o PCC e o FRC, respectivamente.

Baseado na descrição anterior, a lei de dano para o amolecimento para materiais sem fibra e reforçados com fibras é formulada por meio das equações bilinear e trilinear, respectivamente, mostradas nas Equações (3.10a) e (3.10b).

$$D_{PCC} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0}} \right] & se \ \varepsilon_{d0} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{k1} \\ 1 - \frac{\Psi_1 \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_{k1}} \right] & se \ \varepsilon_{k1} < \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_2 \\ 1 & se \ \varepsilon_{eq} > \varepsilon_2 \end{cases} \quad (3.10a,b)$$

$$D_{FRC} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0}} \right] & se \ \varepsilon_{d0} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{k1} \\ 1 - \frac{\Psi_1 \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_{k1}} \right] & se \ \varepsilon_{k1} < \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{k2} \\ 1 - \frac{\Psi_2 \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_f - \varepsilon_{k2}} \right] & se \ \varepsilon_{k2} < \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_f \\ 1 & se \ \varepsilon_{eq} > \varepsilon_f \end{cases}$$

Os parâmetros de geometria ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{k1}$ ,  $\varepsilon_{k2}$ ,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ ) que definem a lei de dano são baseados em propriedades do material advindas de ensaios de fratura e resistência medidas em laboratório, esses parâmetros são ( $G_f$ ,  $G_F$ ,  $G_{FRC}$ ,  $CTOD_c$  e  $f_t$ ) conforme definidos em Roesler *et al.* (2007a,b) e Evangelista Jr. *et al.* (2013).

A energia de fratura inicial ( $G_f$ ) define a interseção do eixo horizontal ( $w_1 = \varepsilon_1 l_c$ ) da inclinação inicial da curva de amolecimento, portanto:

$$\varepsilon_1 = \frac{w_1}{l_c} = \frac{2G_f}{f_t l_c} \quad (3.11)$$

A determinação do primeiro ponto de mudança de direção da curva de amolecimento, *kink point* ( $\Psi_1$ ), é feita de acordo com Park *et al.* (2009) que postulou que a largura de abertura da trinca ( $w_{k1} = \varepsilon_{k1}l_c$ ) é dada em função do deslocamento crítico de abertura de ponta de trinca, *Crack Tip Opening Displacement critical* ( $CTOD_C$ ):

$$\varepsilon_{k1} = \frac{w_{k1}}{l_c} = \frac{CTOD_C}{l_c} \quad (3.12)$$

que resulta na determinação de  $\Psi_1$ :

$$\Psi_1 = 1 - \frac{CTOD_C f_t}{2l_c G_f} \quad (3.13)$$

Para os casos onde não se conheça o  $CTOD_C$ , autores como Wittman *et al.* (1988) sugerem um valor fixo de  $\Psi_1 = 0,25$ , enquanto que Bazant (2002) aponta que o *kink point* esteja no intervalo de  $\Psi_1 = 0,15$  a  $\Psi_1 = 0,33$ .

Finalmente, a deformação final ( $\varepsilon_2 = w_2/l_c$ ) para PCC é calculada pela Equação (3.14):

$$\varepsilon_2 = \frac{w_2}{l_c} = \frac{2}{\Psi_1 f_t l_c} [G_F - (1 - \Psi_1)G_f] \quad (3.14)$$

que é obtida igualando a energia de fratura total ( $G_F$ ) com a área sob a curva do modelo de amolecimento para o caso da lei bilinear (Hilleborg, 1985), conforme Roesler *et al.* (2007a).

Uma vantagem do modelo trilinear para os materiais reforçados com fibra é que vários dos seus parâmetros são os mesmos do modelo bilinear até o primeiro *kink point* ( $w_{k1}$ ). Os demais parâmetros do modelo trilinear são baseados na energia de fratura total ( $G_{FRC}$ ) e  $w_f = \varepsilon_f l_c$  (aqui assumido como sendo de 25% a 50% do comprimento ( $l_b$ ) da fibra). Desta forma, as coordenadas do segundo *kink point* ( $w_{k2} = \varepsilon_{k2}l_c$ ) podem então ser obtido conforme a Equação (3.15):

$$\varepsilon_{k2} = \varepsilon_2 - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_{k1}) \quad (3.15)$$

e a Equação (3.16):

$$\Psi_2 = \frac{2(G_{FRC} - G_F)}{f_t l_c (\varepsilon_f - \varepsilon_2)} \quad (3.16)$$

### 3.1.5 - Regularização da lei de dano pela energia de fratura para a malha de elementos finitos

É importante notar a equivalência assumida para a dissipação da energia de fratura ao longo de um comprimento característico ( $l_c$ ). Entretanto, em um contexto de análise em elementos finitos, a malha pode apresentar elementos menores ou maiores do que o comprimento característico. Portanto o procedimento de regularização deve ser estabelecido a fim de adaptar a energia de fratura do comprimento característico para o tamanho dos elementos da malha. Isto pode ser feito considerando que o comprimento característico do material ( $l_c$ ) é igual ao tamanho típico do elemento da malha de elementos finitos ( $h_e$ ), conforme a Equação (3.17):

$$l_c = h_e \quad (3.17)$$

com  $h_e$  definido pela Equação (3.18) a seguir:

$$h_e = \begin{cases} L^e & \text{se } 1D \\ \sqrt[2]{A^e} & \text{se } 2D \\ \sqrt[3]{V^e} & \text{se } 3D \end{cases} \quad (3.18)$$

em que  $L^e$ ,  $\sqrt[2]{A^e}$  e  $\sqrt[3]{V^e}$  são, respectivamente, o comprimento, a área e o volume do elemento finito.

### 3.1.6 - Identificação das propriedades de dano através de ensaios de laboratório

As curvas bilinear e trilinear estão diretamente associadas com a resistência à tração e as propriedades de fratura, conforme mostra a Tabela 3.1. Todos os parâmetros físicos podem ser obtidos a partir de ensaios experimentais em materiais *quasi*-frágeis sem a necessidade de ajuste de curva da lei de dano para corresponder com a resposta das amostras.

Os parâmetros de fratura para o modo I são determinados usando a norma RILEM e o modelo de dois parâmetros de fratura, *Two Parameter Fracture Model* (TPFM), segundo Jenq e Shah (1985) para uma viga com um único entalhe, *Single Edge Notched Beam* [SEN(B)], também denominado ensaio de Flexão em Três Pontos, *Three Point Bending* (TPB),

ilustrada na Figura 3.3a. o TPFM idealiza o comportamento de fratura não-linear do material usando os conceitos da LEFM com um comprimento efetivo de trinca elástica ( $a_c$ ). A carga  $P$  e o  $CMOD$  são registrados através do ciclo de carregamento e descarregamento seguido por um ciclo final que vai até a falha do corpo de prova. A Figura 3.3b mostra a curva  $P - CMOD$  para uma viga em TPB e o ciclo inicial de carregamento e descarregamento. O  $K_{IC}$  e o  $CTOD_C$  são determinados através do comprimento efetivo de trinca elástica ( $a_c$ ) em  $P_{max}$ .

Tabela 3.1 – Ensaio de laboratório para a identificação dos parâmetros do material.

Propriedade	Tipo de ensaio	Norma recomendada
<i>Elástico</i>		
E	Compressão uniaxial	ASTM C496-94
<i>Inicialização do dano</i>		
$f_t$	Compressão diametral	ASTM C496-96
<i>Fratura em modo I</i>		
$K_{IC}$		
$CTOD_C$	Ensaio de fratura SEN	RILEM ou ASTM D7313-06
$G_{PCC}$		
$G_{FRC}$		

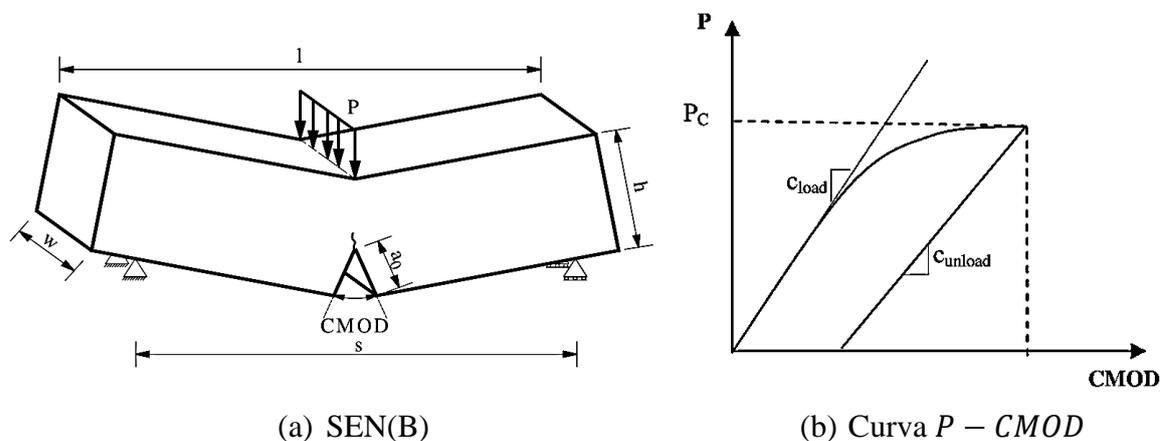


Figura 3.3 – (a) Configuração do ensaio SEM(B) e (b) carregamento e descarregamento conforme TPFM (Evangelista Jr. *et al.*, 2013).

Uma vez que  $K_{IC}$  é determinado,  $G_f$  é calculada pela Equação (3.19).

$$G_f = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (3.19)$$

em que  $\bar{E} = E$  para o estado plano de tensão;  $\bar{E} = E/(1/\nu^2)$  para o estado plano de deformação;  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Finalmente, a energia de fratura total ( $G_F$  ou  $G_{FRC}$ ) pode ser calculada baseado em um método proposto por Hillerborg (1985), que a definiu como a razão entre o trabalho total e a área de fratura ( $A_f$ ) do espécime/estrutura, conforme mostra a Equação (3.20).

$$G_{F/FRC} = \frac{\int^{\delta_f} P(\delta) d\delta}{A_f} \quad (3.20)$$

### 3.2 - ESTRATÉGIA NÃO-LINEAR PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A formulação em elementos finitos para o modelo de dano apresentada na seção 3.1 é simples, uma vez que a variável de dano é escalar e elasticidade linear é assumida. A matriz de rigidez genérica  $\mathbf{K}$  para um elemento não danificado no espaço discretizado é definida como:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva.

Usando a equação constitutiva linear elástica e representando a evolução do dano:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - D) \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.22)$$

em que  $\mathbf{C}_0$  e  $\mathbf{C}$  são os tensores constitutivos para o material não danificado e danificado, respectivamente. Substituindo a relação implícita entre  $\mathbf{C}_0$  e  $\mathbf{C}$  da Equação (3.22) na Equação (3.21) para definir uma matriz de rigidez dependente do estado de dano, obtém-se a Equação (3.23).

$$\mathbf{K}(D) = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0 (1 - D) \mathbf{B} dV \quad (3.23)$$

Expandindo a expressão na Equação (3.23) tem-se:

$$\mathbf{K}(D) = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{B} dV - \int_{\mathbf{V}} \mathbf{B}^T D \mathbf{C}_0 \mathbf{B} dV = \mathbf{K}_0 - \Delta \mathbf{K}(D) \quad (3.24)$$

com

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{B} dV \quad (3.25)$$

e

$$\Delta \mathbf{K} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{B}^T D \mathbf{C}_0 \mathbf{B} dV \quad (3.26)$$

A forma final das matrizes  $\mathbf{K}_0$  e  $\Delta \mathbf{K}$  são aplicadas as submatrizes  $\mathbf{K}_{aa}$ ,  $\mathbf{K}_{ab}$ ,  $\mathbf{K}_{ba}$  e  $\mathbf{K}_{aa}$  definidas na Equações (2.24a-d), respectivamente, da formulação em MEFG.

Representando o histórico de carregamento para o sistema global de equações resultante da contribuição de todos os elementos para um dado passo ( $j$ ), e assumindo que a solução do passo ( $j - 1$ ) anterior é conhecida, então:

$$\mathbf{K}(D^j) \mathbf{U}^j = \mathbf{F}^j \quad (3.27)$$

em que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  são os vetores com os deslocamentos e forças externas globais, respectivamente. Note que o sistema de equações representado pela Equação (3.27) é não-linear, uma vez que a determinação da matriz de rigidez danificada no passo  $j$  depende dos deslocamentos no mesmo passo, pois  $\varepsilon_{eq}^j(D^j \leftarrow \varepsilon_{eq}^j \leftarrow u^j)$ . Com isso, um algoritmo iterativo deve ser usado para resolver o sistema de equações. Esse algoritmo pode ser feito a partir de duas estratégias diferentes: uma dita direta, ou Secante, e outra tangente, baseada no Método de Newton-Raphson. A seguir é descrita a estratégia adotada nesta dissertação: o Método Secante.

O Método Secante procura a solução ( $\mathbf{U}$ ) correspondente a um certo nível de força ( $\mathbf{F}$ ) através de correções sucessivas de uma estimativa inicial para a matriz de rigidez  $\mathbf{K}(D)$ . Portanto, o vetor com os deslocamentos ( $\mathbf{U}$ ) é previsto para cada iteração. Para a convergência da solução numa iteração  $j - 1$ , a matriz de rigidez é atualizada com base no valor dos deslocamentos da iteração convergida  $j - 1$ , e então, novos deslocamentos são

calculados para uma nova iteração  $j$ . Assim, o equilíbrio da equação descrita pelo sistema não-linear da Equação (3.27) pode ser representado pela Equação (3.29):

$$\mathbf{K}(D^{j-1})\mathbf{U}^j = \mathbf{F}^j \quad (3.28)$$

em que  $\mathbf{F}^j$  é o nível de força aplicada no início do processo iterativo. Um resíduo  $\mathbf{R}^{j-1}$  é gerado toda vez que  $\mathbf{K}$  é atualizada devido à defasagem que a rigidez apresenta em relação aos deslocamentos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}(D^{j-1})\mathbf{U}^j - \mathbf{F}^j \neq 0 \quad (3.29)$$

É esperado que este resíduo diminua em cada iteração mostrando a convergência entre os deslocamentos para duas iterações consecutivas ( $j - 1$  e  $j$ ). O processo de iteração pode ser parado quanto certa tolerância ( $TOL$ ) em relação à medida, ou norma, adotada do resíduo for verificada. Neste caso, se estabeleceu que o controle sobre a convergência entre iterações consecutivas seja feito através de uma medida dos deslocamentos relativos, definido pela Equação (3.30):

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (U_i^j - U_i^{j-1})^2}{\sum_{i=1}^N (U_i^j)^2}} \leq TOL \quad (3.30)$$

em que  $N$  é o número de componentes do vetor resíduo.

A Figura 3.4 mostra um processo iterativo do Método Secante à procura de uma solução convergente.

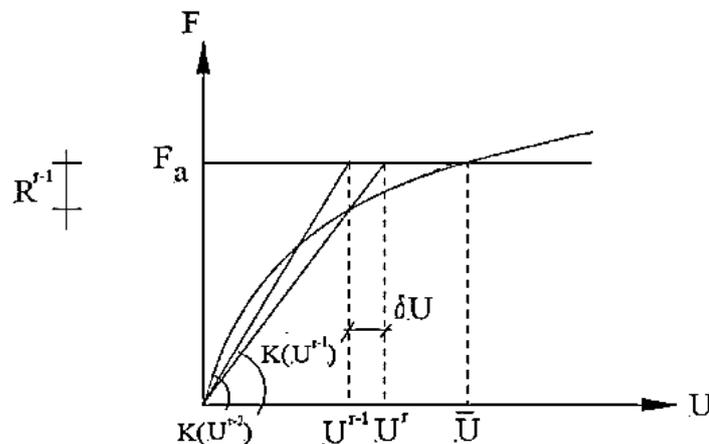


Figura 3.4 – Esquema iterativo para o Método Secante (adaptada de Proença, 2008).

### 3.3 - DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A implementação do MEEG apresenta especificidades em alguns pontos da implementação de elementos finitos convencional. As principais diferenças e as metodologias utilizadas na implementação são descritas a seguir.

#### Processo de enriquecimento dos nós

No MEEG podemos identificar três tipos de elementos com relação ao enriquecimento de seus nós. Há os elementos que não apresentam enriquecimento em nenhum nó e que são tratados na formulação padrão de elementos finitos, há os elementos por onde a descontinuidade passa e que apresentam enriquecimento em todos os nós e tem ainda os chamados elementos de transição (*blending elements*), que são elementos que apresentam enriquecimento apenas nos nós que também pertencem aos elementos por onde passa a descontinuidade.

No processo de propagação, quando um elemento da malha de elementos finitos é cortado por uma trinca, os nós desse elemento são enriquecidos. No entanto, como existe a condição de que o salto de deslocamento na ponta da trinca seja zero, os nós pertencentes ao elemento localizado a frente dessa ponta não são enriquecidos, mesmo que estes nós pertençam a outros elementos que estejam atravessados pela descontinuidade. Note na Figura 3.5 que à medida que a propagação ocorre novos nós são enriquecidos, porém o elemento que está à frente da ponta da trinca nunca tem seus nós enriquecidos. Essa estratégia foi adotada com sucesso em Wells e Sluys (2001).

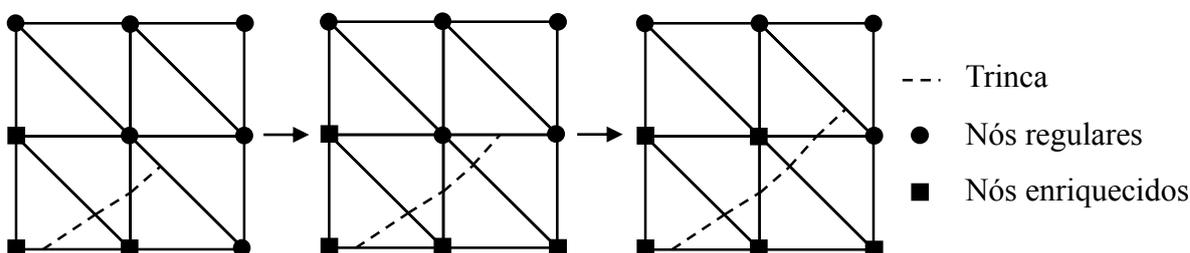


Figura 3.5 – Propagação da trinca e processo de enriquecimento dos nós.

#### Critério de propagação e direção da trinca

O critério de propagação é baseado no valor do dano nos pontos de integração, também conhecidos como pontos de Gauss do elemento que se encontra a frente da ponta da trinca,

de modo que, ao final de um incremento de deslocamento, uma descontinuidade é inserida quando o valor do dano no ponto de Gauss for maior que  $D_{crit}$ . A descontinuidade é introduzida como uma linha reta dentro do elemento, isto é, o vetor normal  $n_d$  é constante ao longo de todo o elemento, o que faz com que a precisão do caminho da trinca seja maior quando se usa uma densidade maior de elementos na região onde possivelmente haverá a passagem de uma trinca. Além disso, ao final de um incremento convergido é possível que a descontinuidade se propague por mais de um elemento.

A direção de propagação da trinca ( $r_{s_d}$ ) é calculada através da Equação (3.31) a seguir:

$$r_{s_d} = \sum_{i \in S} D_i w_i \frac{r_i}{\|r_i\|} \quad (3.31)$$

em que  $S$  é o conjunto de pontos de integração  $i$  localizados dentro da área em forma de  $V$  limitada pelo semicírculo da Figura 3.6 e pertencentes aos elementos, cuja face contenha a ponta da trinca ou compartilham ao menos uma conectividade com o elemento tocado pela ponta da trinca,  $D_i$  é o valor do dano no ponto de integração  $i$ ,  $r_i$  é o vetor na direção do ponto de integração  $i$  e  $w_i$  é um peso associado ao ponto de integração  $i$  e calculado usando a função Gaussiana da Equação (3.32) a seguir:

$$w_i = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{\|r_i\|^2}{2l^2}\right) \quad (3.32)$$

em que  $l$  determina quão rapidamente a função peso diminui longe da ponta da descontinuidade e tem valor igual a três vezes o tamanho típico do elemento finito.

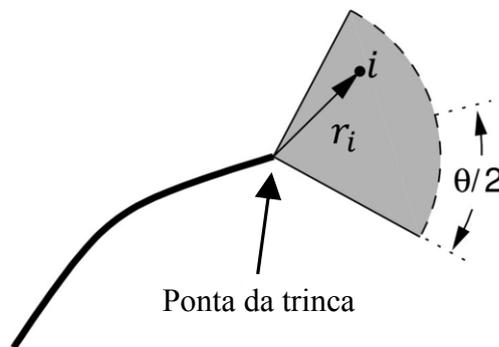


Figura 3.6 – Determinação da direção de propagação da trinca (adaptada de Simone, 2003).

### Integração numérica

Conforme pode ser observado no sistema de equações discretizado, a integração de alguns termos da matriz de rigidez e do vetor de forças ocorre apenas sobre uma parte do domínio do elemento. É necessário então um esquema especial de integração para garantir que as funções de forma permaneçam linearmente independente.

Nos trabalhos de Moës *et al.* (1999) e Wells e Sluys (2001) propõe-se que os elementos que são atravessados pela descontinuidade tenham seus domínios  $V^+$  e  $V^-$  divididos em subdomínios triangulares, como pode ser visualizado na Figura 3.7(a). Em cada subdomínio é aplicado a quadratura de Gauss com três pontos de integração devido ao elemento utilizado possuir uma aproximação quadrática e sobre a descontinuidade para o cálculo de tensões coesivas é aplicado dois pontos de integração. No entanto, como o elemento finito utilizado nas análises desta pesquisa é o elemento triangular linear, apenas um ponto de Gauss é suficiente para realizar a integração numérica, como pode ser visualizado na Figura 3.7(b), e, como não se utiliza nenhuma lei coesiva no MEFG implementado, os dois pontos de integração localizados sobre a descontinuidade não são necessários, uma vez que a segunda integral da Equação (2.24d) não é considerada. Nos elementos que não são cortados pela descontinuidade se usa a quadratura de Gauss padrão.

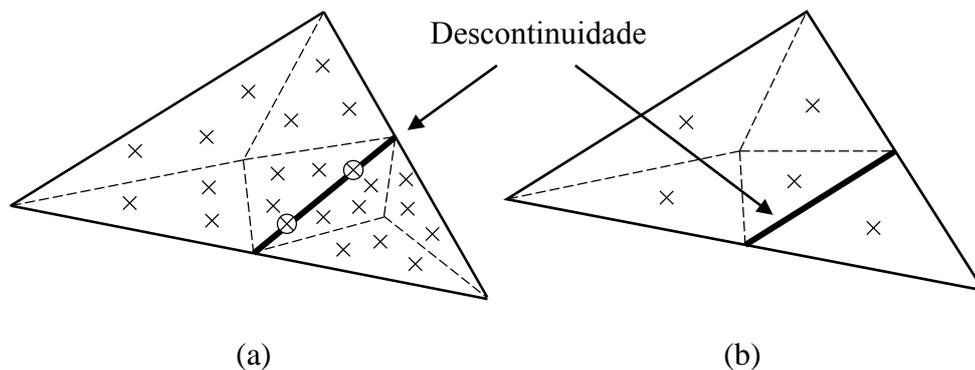


Figura 3.7 – Esquema de integração de um elemento atravessado por uma descontinuidade: (a) Wells e Sluys (2001) e (b) adotado nesta pesquisa. As cruzes indicam pontos de integração no meio contínuo e as cruzes com círculo indicam os pontos de integração para as tensões na descontinuidade.

## 4 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Com o objetivo de validar o modelo proposto para o modo I de abertura de trinca, este capítulo dedica-se à estimativa numérica e respectiva comparação com resultados experimental de dois tipos de ensaios: ensaio de flexão em três pontos em vigas com um entalhe central e ensaio de flexão em quatro pontos em vigas sem entalhe.

### 4.1 - VIGA COM ENTALHE: FLEXÃO EM TRÊS PONTOS, *THREE POINT BENDING* (TPB)

Os resultados experimentais e numéricos utilizados na validação com as simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram extraídos dos trabalhos de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010), respectivamente. Para a validação do modelo trilinear em materiais cimentícios reciclados e com adição de fibras os resultados experimentais e numéricos foram extraídos de Evangelista Jr. *et al.* (2013). Ambos os trabalhos citados anteriormente possuem resultados experimentais de ensaios de flexão em três pontos em vigas, assim como resultados numéricos e parâmetros de entrada necessários para alimentar as leis de dano propostas neste trabalho.

#### 4.1.1 - Validação com resultados experimentais de Roesler *et al.* (2007a) para materiais cimentícios convencionais

Roesler *et al.* (2007a) realizaram ensaios de flexão em três pontos para três tamanhos diferentes de vigas em pequena escala, com o objetivo de determinar parâmetros de fratura e interpretar o efeito de escala no concreto. A Figura 4.1 mostra a geometria do ensaio realizado e seus valores são dados na Tabela 4.1.

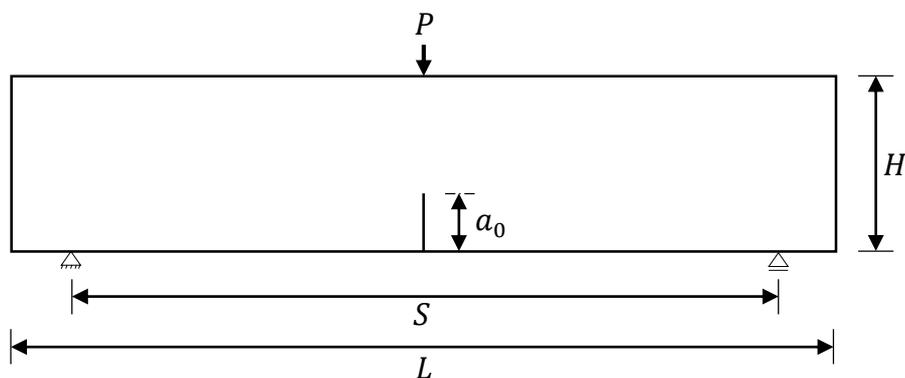


Figura 4.1 – Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos.

Tabela 4.1 – Dimensões do ensaio de flexão em três pontos.

Nome	Altura (H) (mm)	Vão (S) (mm)	Comp. (L) (mm)	Entalhe ( $a_0$ ) (mm)	Espessura (B) (mm)
TPB - 63	63	250	350	21	80
TPB - 150	150	600	700	50	80
TPB - 250	250	1000	1100	83	80

Gaedicke e Roesler (2010) realizaram simulações numéricas 2D através da incorporação de elementos coesivos no *software* Abaqus® para as mesmas vigas, similarmente ao que foi feito nos trabalhos de Roesler *et al.* (2007a) e Park *et al.* (2009). Seu objetivo era estudar o efeito de algumas leis coesivas (Exponencial, linear e bilinear) e algumas propriedades da lei bilinear na curva  $P - CMOD$ . Os resultados numéricos de Gaedicke e Roesler (2010) são comparados com as curvas obtidas através do modelo de dano proposto.

Os parâmetros de fratura para o concreto utilizado por Gaedicke e Roesler (2010) e que foram adotados nas simulações numéricas desta pesquisa são dados na Tabela 4.2. Os parâmetros relativos ao material como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e resistência à compressão são  $E = 32 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,20$  e  $f_c = 58,3 \text{ MPa}$ , respectivamente. As simulação são feitas considerando o estado plano de tensões e o controle do ensaio é realizado por meio de incrementos de deslocamentos no ponto de aplicação da força ( $P$ ), conforme o ensaio experimental.

Tabela 4.2 – Parâmetros de fratura para a lei bilinear, Gaedicke e Roesler (2010).

Nome	$f_t$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_F$ (N/m)	$\Psi_1$
TPB 63	4.15	56.6	119	0.25
TPB 150	4.15	56.6	164	0.25
TPB 250	4.15	56.6	167	0.25

### Malha de elementos finitos

Os três tamanhos de vigas em TPB foram consideradas nas análises numéricas para validação da capacidade dos modelos propostos (modelo contínuo e contínuo-descontínuo) em prever o efeito de escala da resistência das vigas. As malhas de elementos finitos utilizadas para as simulações das vigas TPB 63, 150 e 250 são mostradas na Figura 4.2. A largura do entalhe adotado foi de um milímetro para a viga TPB 63 e dois milímetros para as vigas TPB 150 e TPB 250.

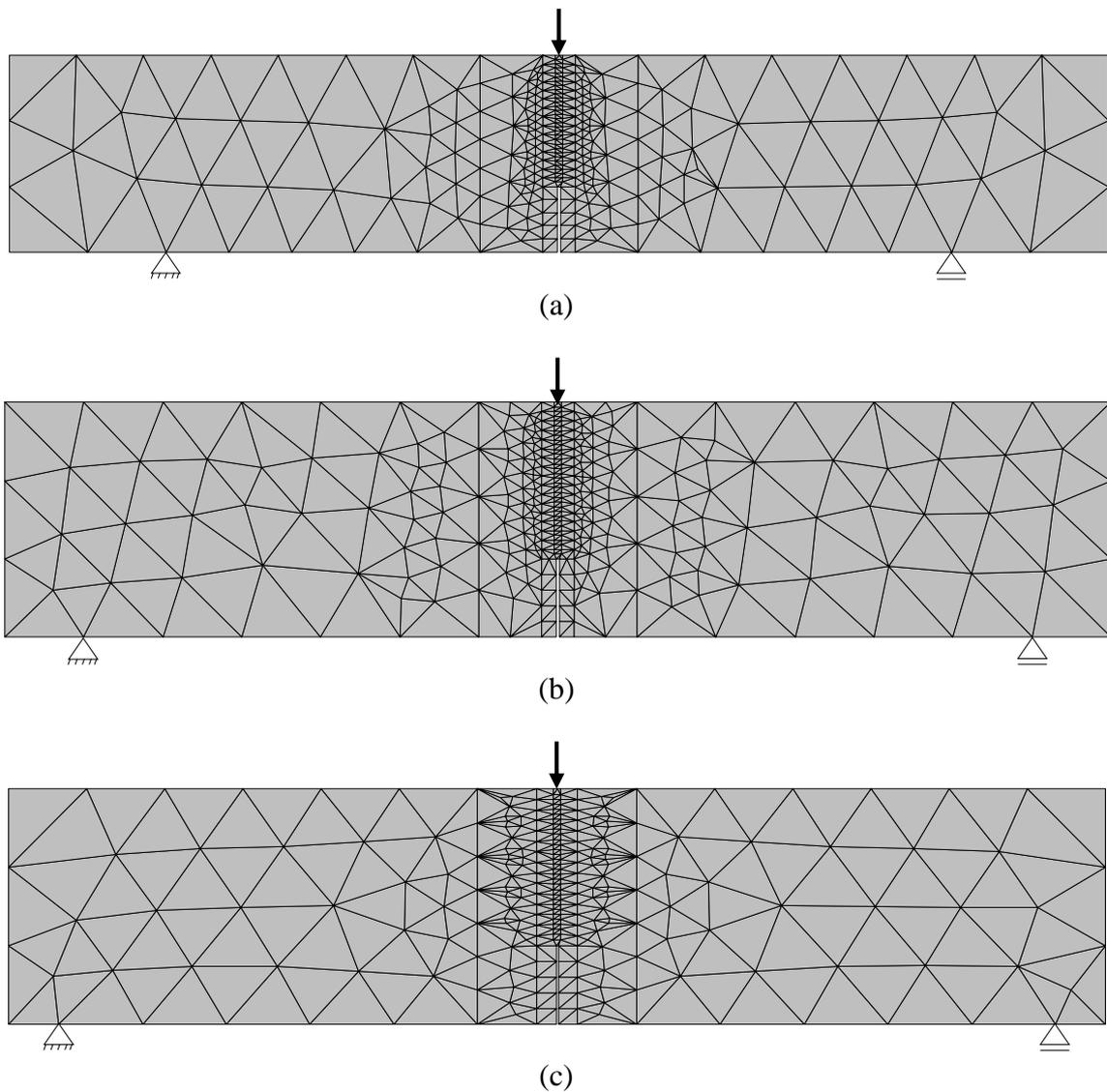


Figura 4.2 – Malhas de elementos finitos utilizadas para as vigas TPB de alturas (a) 63 mm; (b) 150 mm e (c) 250 mm. Desenhos fora de escala.

A Tabela 4.3 compara o número de elementos das malhas das vigas de Gaedicke e Roesler (2010) com o número de elementos das malhas da Figura 4.2.

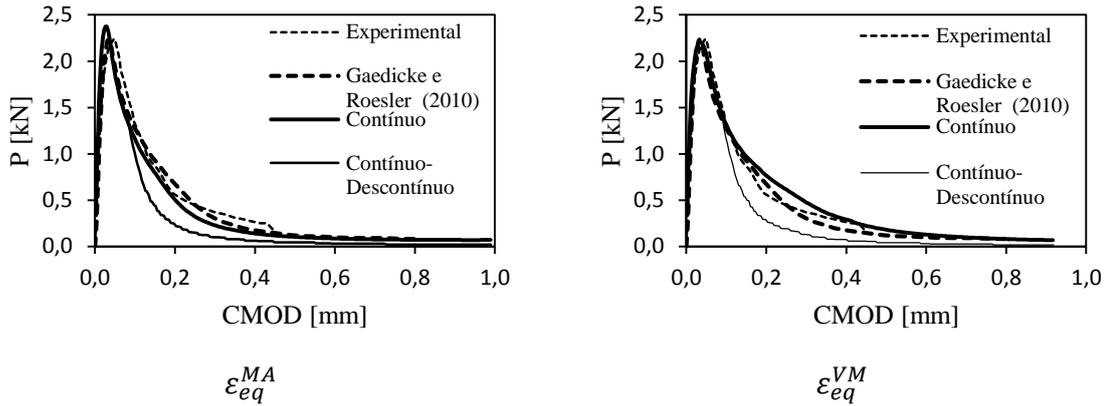
Tabela 4.3 – Comparação do número de elementos das malhas de Gaedicke e Roesler (2010) com o número de elementos das malhas utilizadas.

Nome	Gaedicke e Roesler (2010)	Malha utilizada
TPB 63	2355	519
TPB 150	6285	581
TPB 250	10366	481

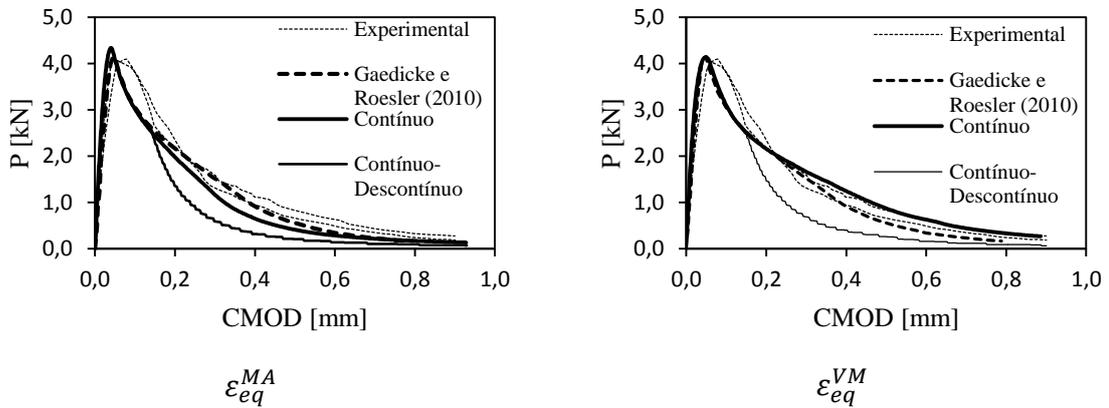
#### Resultados das curvas $P - CMOD$

A Figura 4.3 apresenta os resultados experimentais e numéricos e as respectivas comparações das curvas relativas à força aplicada em função do deslocamento de abertura de boca de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement* (CMOD). A figura mostra a comparação, para os três tamanhos de viga, entre os resultados experimentais da curva  $P - CMOD$  completa; o resultado numérico encontrado em Gaedicke e Roesler (2010) e os resultados numéricos obtidos com a lei bilinear de dano proposta para ambos os modelos: contínuo e contínuo-descontínuo. Para ambos os modelos foram consideradas deformações equivalentes de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) e Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ).

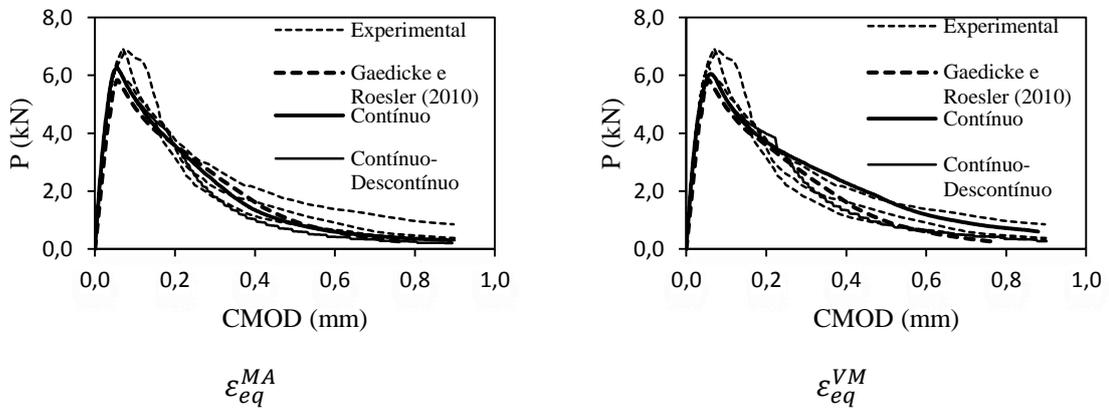
Os resultados mostram que todos os modelos foram capazes de estimar com muito boa precisão (erro relativo máximo de 5%), a carga máxima ( $P_{max}$ ) resistida pelas vigas em todos os tamanhos considerados. Comparando as curvas obtidas com  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  e  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  para o caso contínuo, percebe-se que  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  apresenta um  $P_{max}$  ligeiramente maior que  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ . Para o caso contínuo-descontínuo, o dano crítico adotado para que a trinca se propagasse foi de 0,999. Com essa condição a propagação só ocorre após  $P_{max}$ , não havendo, portanto, diferença entre as estimativas observadas para ambos os casos.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3 – Comparação das curvas  $P$ -CMOD experimentais e das simulações de Gaedicke e Roesler (2010) com os resultados numéricos obtidos para a viga TPB de alturas (a) 63 mm; (b) 150 mm e (c) 250 mm.

Analisando a região descendente de amolecimento (*softening*), observa-se que a lei bilinear utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  apresenta valores ligeiramente superiores em comparação quando se adota  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ . É importante notar que, apesar da  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  ser definida para casos de modo misto, ela foi

capaz de estimar bem os modelos em modo I. Na verdade, as estimativas com  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  são tão boas quanto as estimativas com  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  que é especificamente idealizada para dano em modo I de falha.

Uma diminuição da capacidade de carga em amolecimento da viga é observada quando adotado o modelo contínuo-descontínuo. Isto ocorre por conta da propagação da trinca na malha de elementos finitos, uma vez que além de haver a penalização das propriedades mecânicas do material devido ao modelo de dano, o elemento tem deslocamentos descontínuos diretamente devido a presença da trinca pelo modelo de elementos finitos generalizados.

#### Resultados dos valores $P_{max}$

Os valores de  $P_{max}$  encontrados nas simulações numéricas realizadas, assim como das curvas experimentais e do resultado numérico de Gaedicke e Roesler (2010) são encontrados na Tabela 4.4 para os três tamanhos de viga. Como observado anteriormente, ambas as deformações equivalentes adotadas no modelo contínuo foram capazes de estimar com muita boa acurácia os valores experimentais. É importante notar que o modelo proposto nesta dissertação conseguiu praticamente a mesma acurácia que o modelo descontínuo, usando zona coesiva em elementos de interface de Gaedicke e Roesler (2010), mas com um número bem reduzido de elementos, como indicado na Tabela 4.3. Os valores da Tabela 4.4 também mostram a capacidade de ambos os modelos contínuo e contínuo-descontínuo em prever o efeito de escala (*size effect*) em estruturas de materiais *quasi*-frágeis, como o concreto, utilizando propriedades de ensaios de pequena escala realizados comumente em laboratório.

Tabela 4.4 – Carga Máxima,  $P_{max}$  (kN), encontrada nas simulações numéricas e nos resultados experimentais para as vigas TPB.

Nome	Experimental	Gaedicke e Roesler (2010)	$\varepsilon_{eq}^{MA}$	$\varepsilon_{eq}^{VM}$
TPB 63	2,26	2,23	2,38	2,21
TPB 150	4,10	4,13	4,34	4,14
	4,16			
TPB 250	6,30	5,83	6,25	6,05
	6,87			
	6,92			

### Verificação da objetividade da malha de elementos finitos e passos de carga/deslocamento

Para verificar a objetividade e a convergência entre malhas regulares e irregulares de elementos finitos na curva  $P - CMOD$ , foram feitas simulações utilizando uma malha irregular e três malhas regulares com diferentes discretizações na região da zona central (zona de fratura) da viga TPB 150, utilizando o modelo contínuo com a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ . A Figura 4.4 mostra a discretização das malhas regulares juntamente com o dano observado ao final da simulação numérica. Note que, como esperado, malhas mais refinadas tendem a localizar mais o dano na zona de processo. Isto pode ser visto pelos elementos mais danificados (cor vermelha) mostrados na Figura 4.4

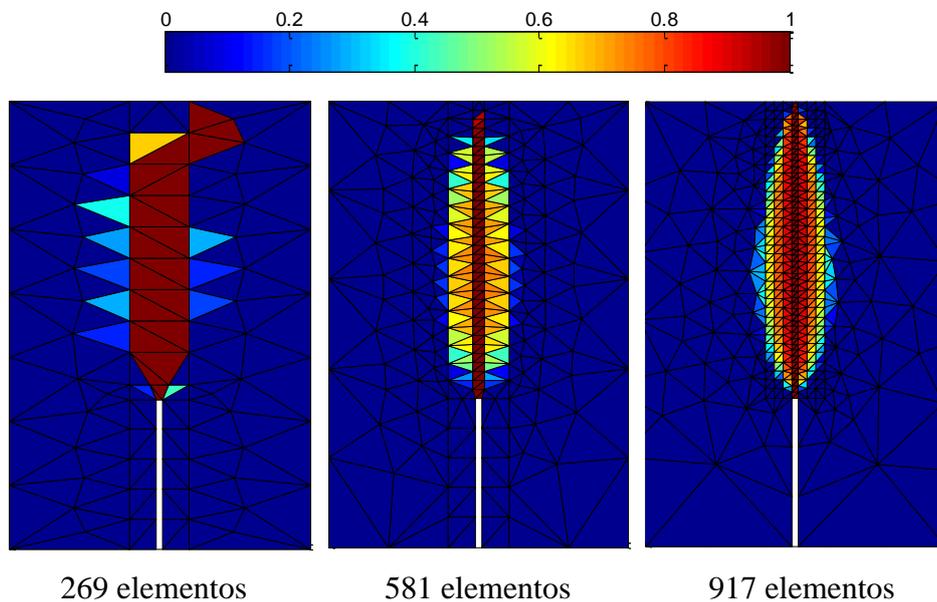


Figura 4.4 – Malha de elementos finitos regular com diferentes refinamentos e o dano ao final da simulação para a viga TPB 150.

As curvas  $P - CMOD$  das simulações numéricas e o resultado experimental são mostrados na Figura 4.5. Conforme se observa, as malhas de 581 e 917 elementos apresentam melhores resultados do que a malha de 269 elementos. Claro que isto é esperado devido a melhor aproximação dos campos de tensão e deformação proporcionada em malhas mais refinadas. Entretanto, os resultados mostram que o modelo de dano contínuo com a regularização adotada que estabelece a dissipação da energia de fratura proporcional ao tamanho característico do elemento finito produz objetividade de malha, isto é enfatizado pela convergência de ambos  $P_{max}$  e a curva de amolecimento (região de *softening*) entre as malhas de 581 e 917 elementos. Com a regularização proposta para o modelo de dano

contínuo, notamos que, mesmo os resultados de malhas muito grosseiras (269 elementos) são razoavelmente similares aos resultados de maior acurácia proporcionados pelo refinamento da malha para ambos  $P_{max}$  e a curva de amolecimento.

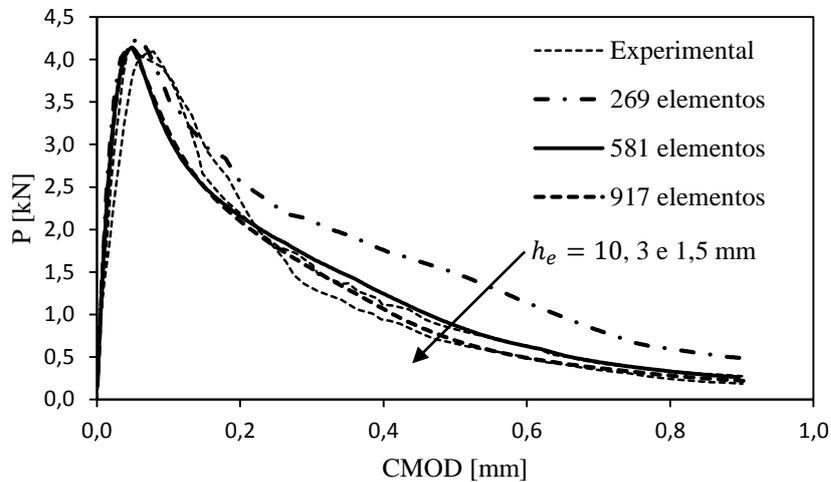


Figura 4.5 – Curva  $P - CMOD$  para simulações com diferentes malhas ( $h_e$  é o tamanho típico do elemento na seção central da viga) para a viga TPB 150.

A seguir são comparados os resultados das simulações utilizando a malha regular de 917 elementos com uma malha irregular de 1325 elementos, (Figura 4.6). A Figura 4.6 mostra a discretização e o dano observado ao final da simulação numérica. Conforme se observa, a distribuição de dano para malhas regulares e irregulares é semelhante, comprovando a objetividade de malha.

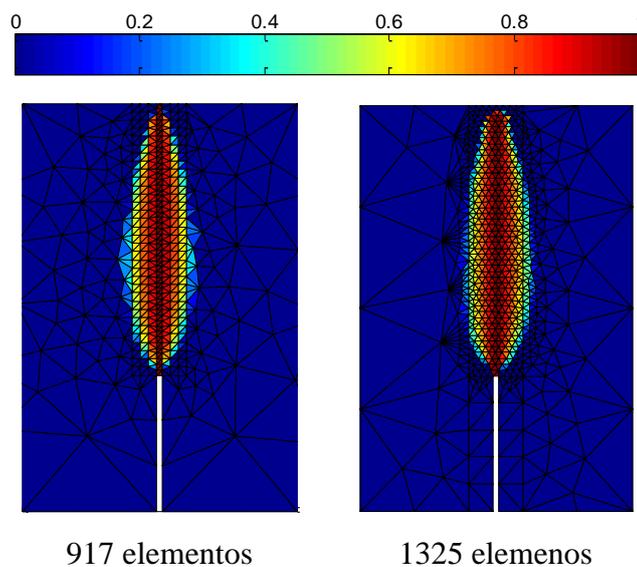


Figura 4.6 – Malha de elementos finitos regular (917 elementos) e irregular (1325 elementos) e o dano ao final da simulação para a viga TPB 150.

A Figura 4.7 compara as curvas  $P - CMOD$  das simulações utilizando a malhas regular e irregular e o resultado numérico encontrado em Park *et al.* (2008). Observe que não há diferenças significativas entre as curvas referentes às malhas regular e irregular.

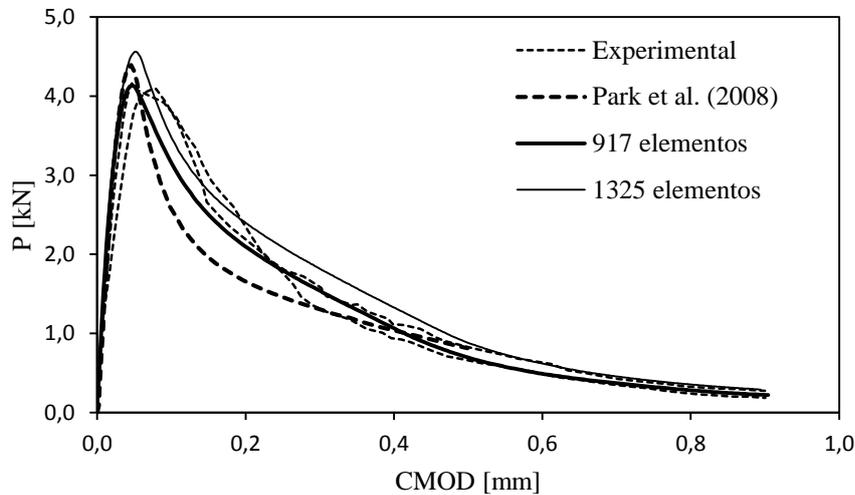


Figura 4.7 – Curva  $P - CMOD$  para simulações com malha regular (917 elementos) e malha irregular (1325 elementos) para a viga TPB 150.

A Figura 4.8 mostra as curvas  $P - CMOD$  para simulações feitas utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  com 63, 125, 250 e 500 passos de deslocamentos e malha de 581 elementos para viga de TPB 150. Os resultados obtidos mostram que a quantidade de passos utilizados não altera significativamente o comportamento global da curva. As diferenças só são percebidas quando se analisa a curva em um determinado ponto, por exemplo, na região de  $P_{max}$ , onde a definição exata desta força varia para os diferentes passos de deslocamento.

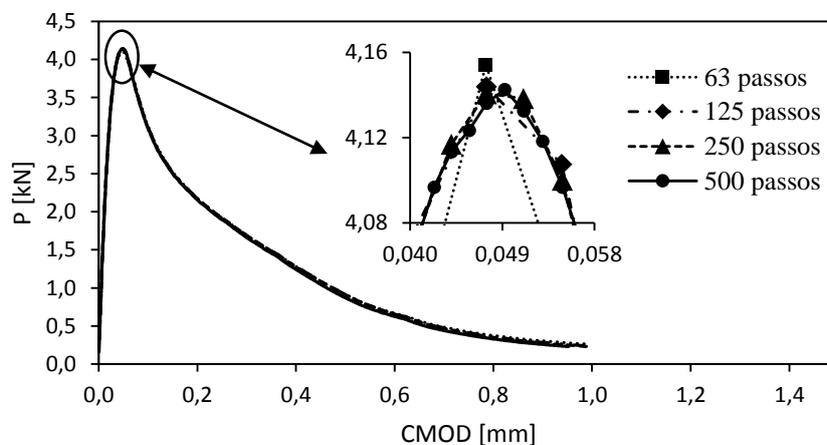


Figura 4.8 – Efeito da malha de elementos finitos na curva  $P - CMOD$  para a viga TPB 150.

### Análise da distribuição de tensão e dano

Um passo importante que vai além da simples comparação das curvas  $P - CMOD$  é a análise do estado de tensão e a distribuição do dano ao longo da linha de fratura. Este estudo permite verificar se as tensões ultrapassam o valor da resistência à tração do material e visualizar como se processa a zona de fratura ao longo da curva  $P - CMOD$  em uma determinada seção.

As análises realizadas a seguir são relativas à viga TPB 150 simulada com as deformações equivalentes  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  e  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  para o modelo contínuo e contínuo-descontínuo, sendo os resultados apresentados separadamente em função da deformação equivalente utilizada.

As análises são realizadas através da plotagem das tensões principais e dos danos nos pontos de Gauss dos elementos localizados na seção central da viga, compreendida entre a ponta do entalhe e o ponto de aplicação da carga. Os pontos de interesse escolhidos em função de  $P_{max}$  nas simulações são localizados em A (75% de  $P_{max}$  na zona ascendente), B (100% de  $P_{max}$ ), C (Início da propagação da trinca na zona descendente), D (50% de  $P_{max}$  na zona descendente) e E (25% de  $P_{max}$  na zona descendente).

A Figura 4.9 mostra a localização dos pontos de interesse na curva  $P - CMOD$  para as simulações contínua e contínua-descontínua utilizando a  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ . Até o ponto C não se observa diferença entre as curvas plotadas, pois não houve propagação da trinca. Do ponto C em diante a trinca começa a propagar causando a queda mais rápida da força residual para o caso contínuo-descontínuo. Devido a essa diferença entre as curvas os pontos D e E são renomeados como D1 e E1 para a curva do modelo contínuo e D2 e E2 para a curva do modelo contínuo-descontínuo.

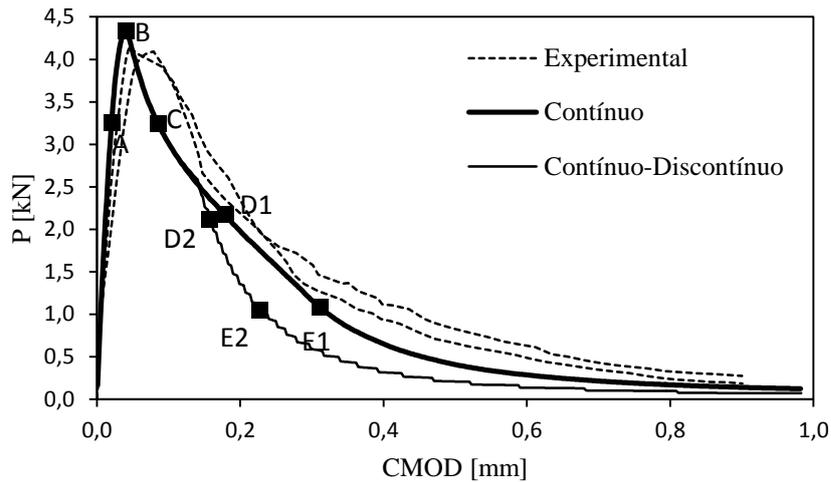
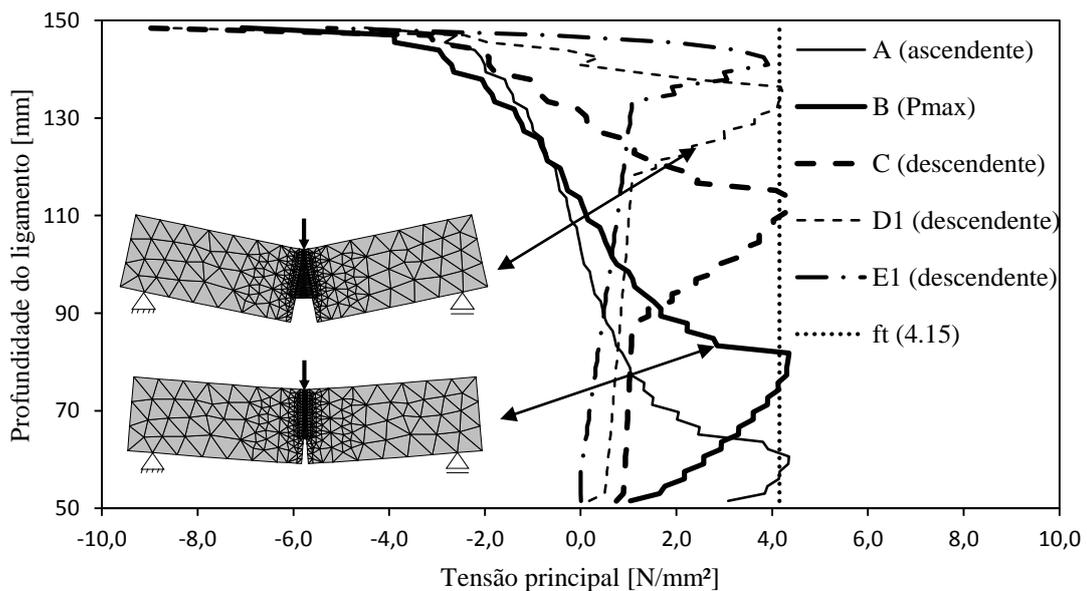


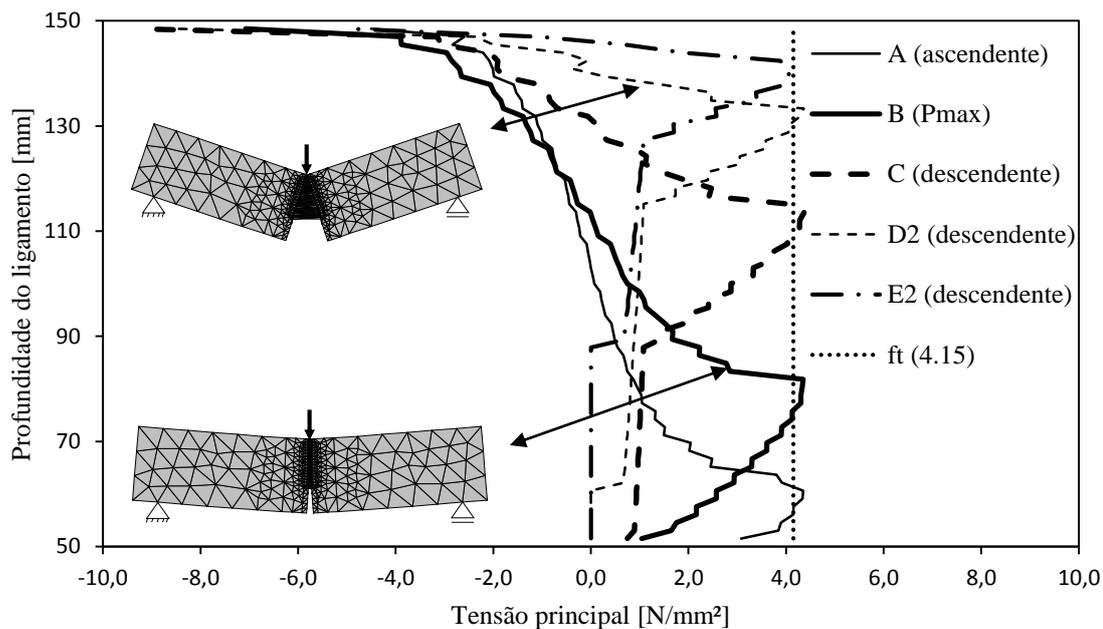
Figura 4.9 – Curva  $P - CMOD$  com pontos de interesse para a viga TBP 150 utilizando  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ .

A Figura 4.10 mostra o estado de tensão nos pontos de interesse para o modelo contínuo (Figura 4.10a) e modelo contínuo-descontínuo (Figura 4.10b) com  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ . Os valores positivos e negativos das tensões no eixo  $x$  representam, respectivamente, tensões de tração e compressão enquanto que o eixo  $y$  representa a posição dessas tensões começando da ponta do entalhe (50 mm) até o topo da viga (150 mm). Conforme o esperado o gráfico mostra que as tensões nos pontos de Gauss em todos os elementos apresentam valores menores ou que ficam em torno da resistência à tração do material ( $f_t = 4,15 MPa$ ).



(a)

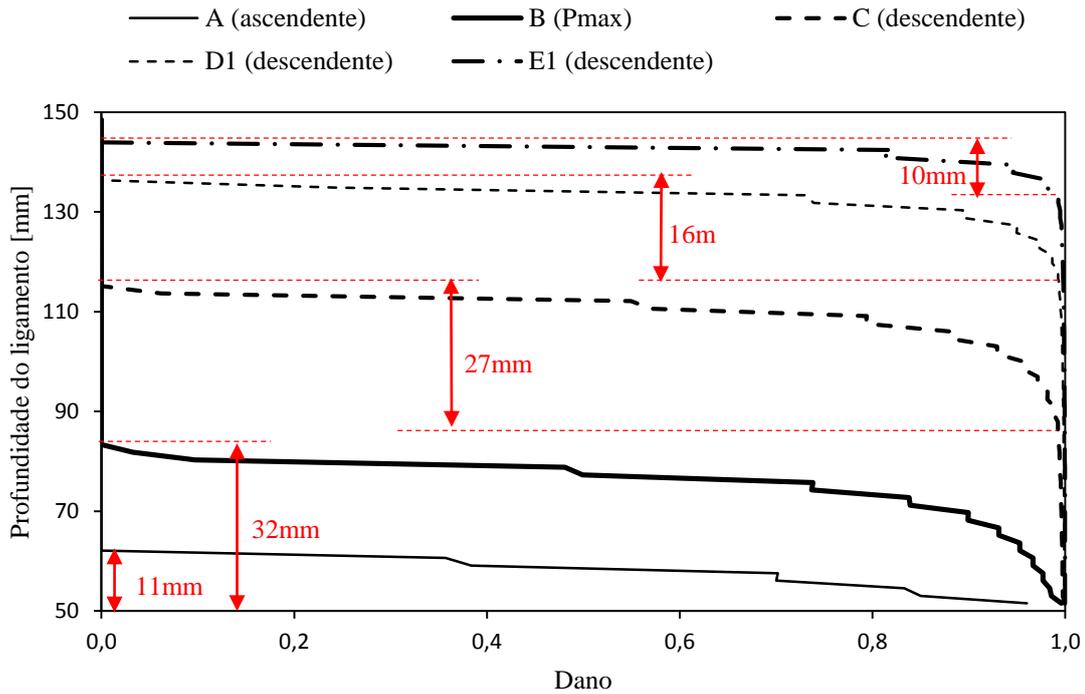
Figura 4.10 – Distribuição de tensão no ligamento da viga TPB 150, utilizando  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2.



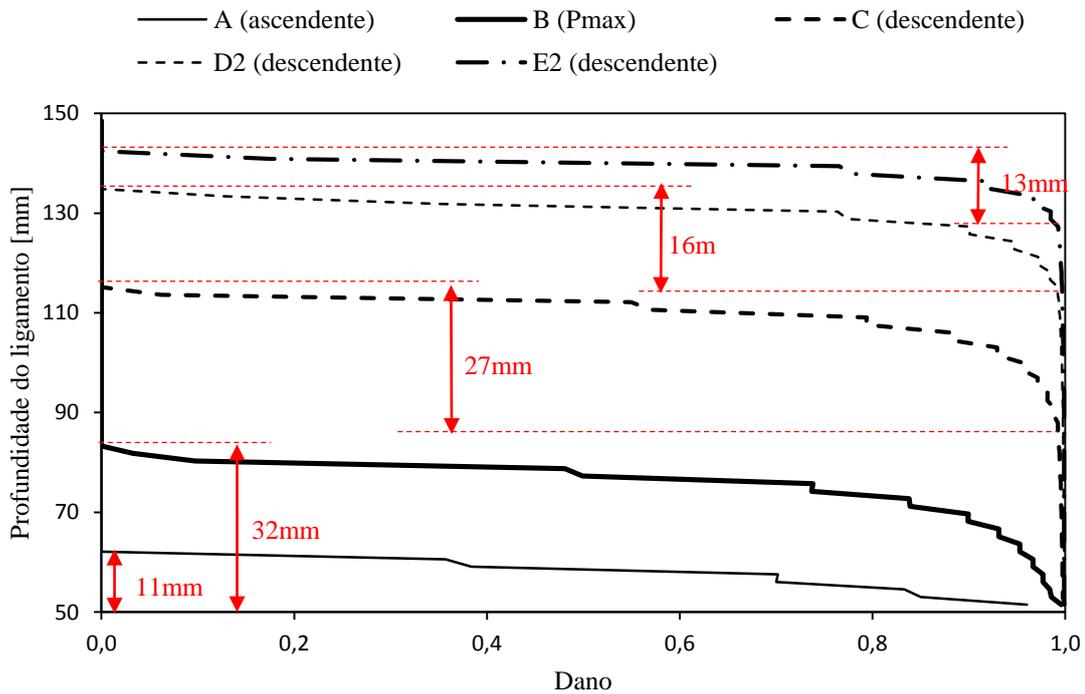
(b)

Figura 4.10 - Continuação

A zona de processo de fratura/dano pode ter seu valor estimado plotando a distribuição de dano em função da profundidade do ligamento localizado na linha de fratura, como mostra a Figura 4.11. Nessa figura se observa que na zona ascendente ( $0,75P_{max}$ ) existe dano próximo ao entalhe que alcança uma altura de  $11\text{ mm}$  medidos a partir de sua ponta. A zona de processo de fratura atinge seu valor máximo em  $P_{max}$  com um tamanho de  $32\text{ mm}$ , em seguida diminui para  $27\text{ mm}$  no momento que a trinca começa a propagar e depois diminui para  $16\text{ mm}$  e  $10\text{ mm}$ , respectivamente, em ( $0,50P_{max}$ ) e ( $0,25P_{max}$ ) na zona descendente para o caso contínuo, ver Figura 4.11(a). Para o caso contínuo-descontínuo os valores da zona de processo de fratura/dano são similares aos do caso contínuo (Figura 4.11b).



(a)



(b)

Figura 4.11 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150, utilizando  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2.

A Figura 4.12 mostra a evolução do dano na malha de elementos finitos para o modelo contínuo. Percebe-se que os elementos com maior valor de dano são aqueles localizados na zona central da viga e que os demais elementos praticamente não danificam. Essa característica está relacionada com a  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  que leva em conta apenas as deformações principais de tração, que serão maiores justamente nessa região.

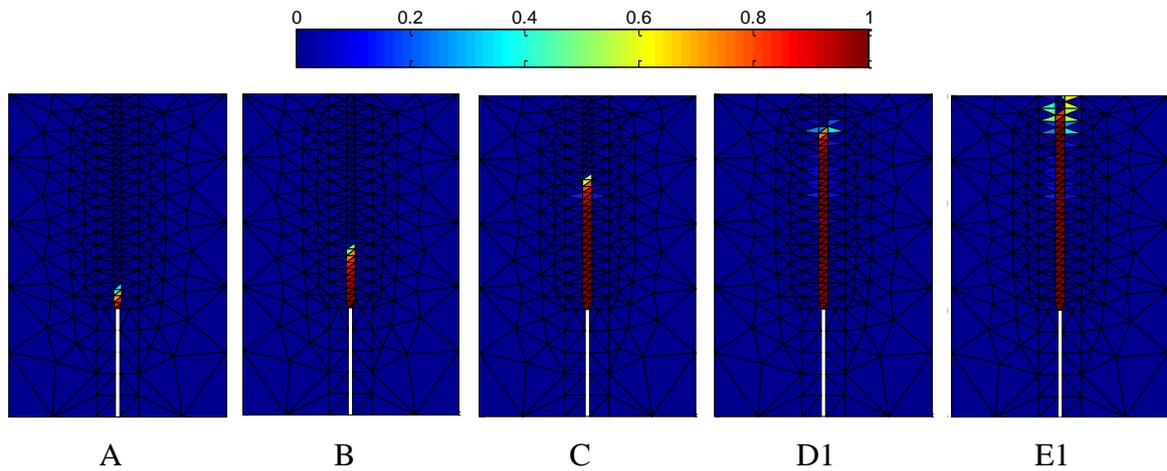


Figura 4.12 – Evolução de dano na malha de elementos finitos da viga TPB 150 usando  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ .

O caminho que a trinca percorre na simulação contínua-descontínua é mostrado na Figura 4.13 para os instantes C, D2, E2 e ao final da simulação.

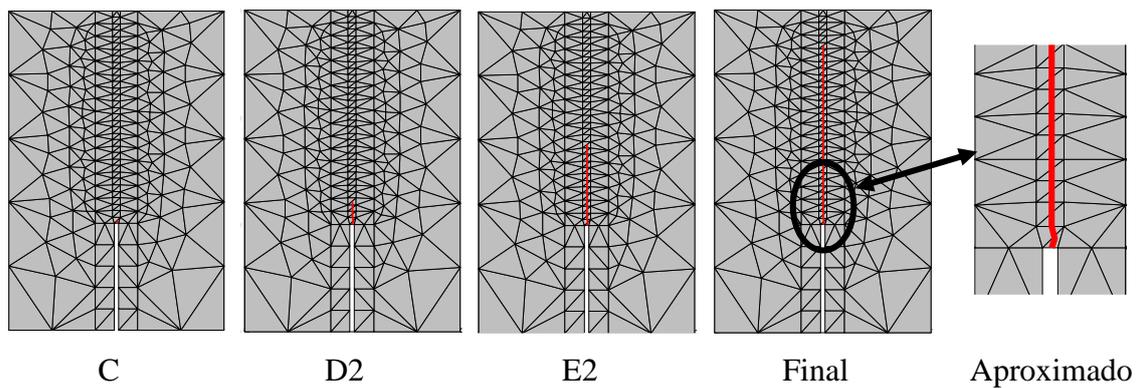


Figura 4.13 – Propagação da trinca na viga TPB 150 utilizando  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ .

Os pontos de interesse da curva  $P - CMOD$  usando a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  nas simulações contínua e contínua-descontínua são mostrados na Figura 4.14. Como as curvas deste caso são similares às do caso anterior, a nomenclatura dos pontos segue o mesmo esquema utilizado para aquele caso.

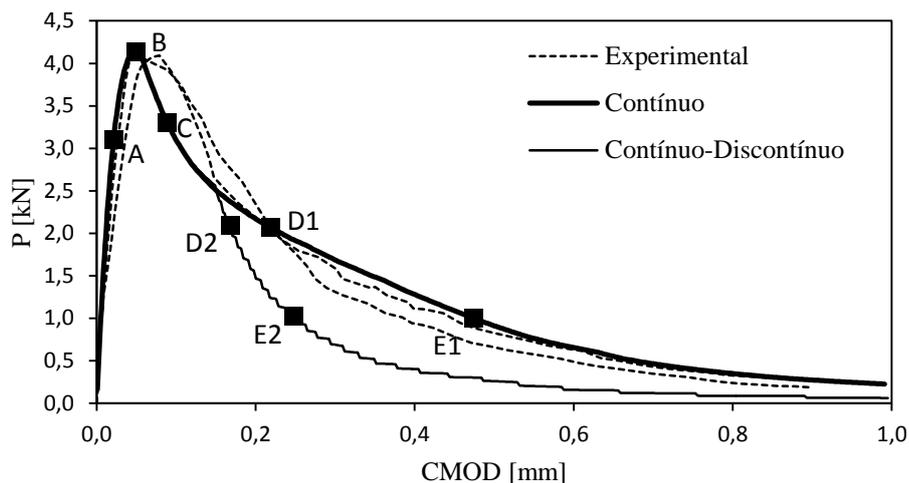
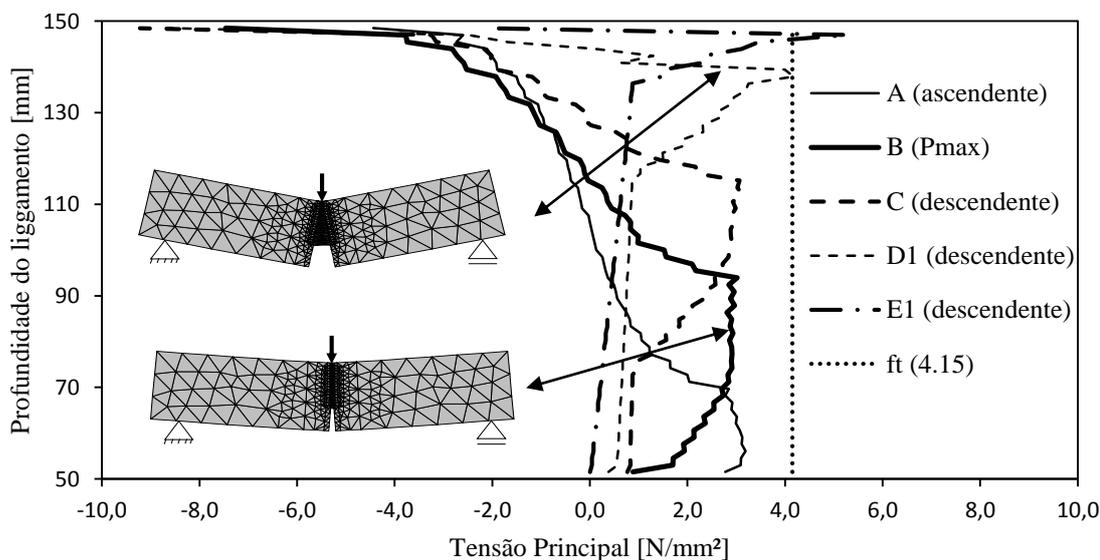


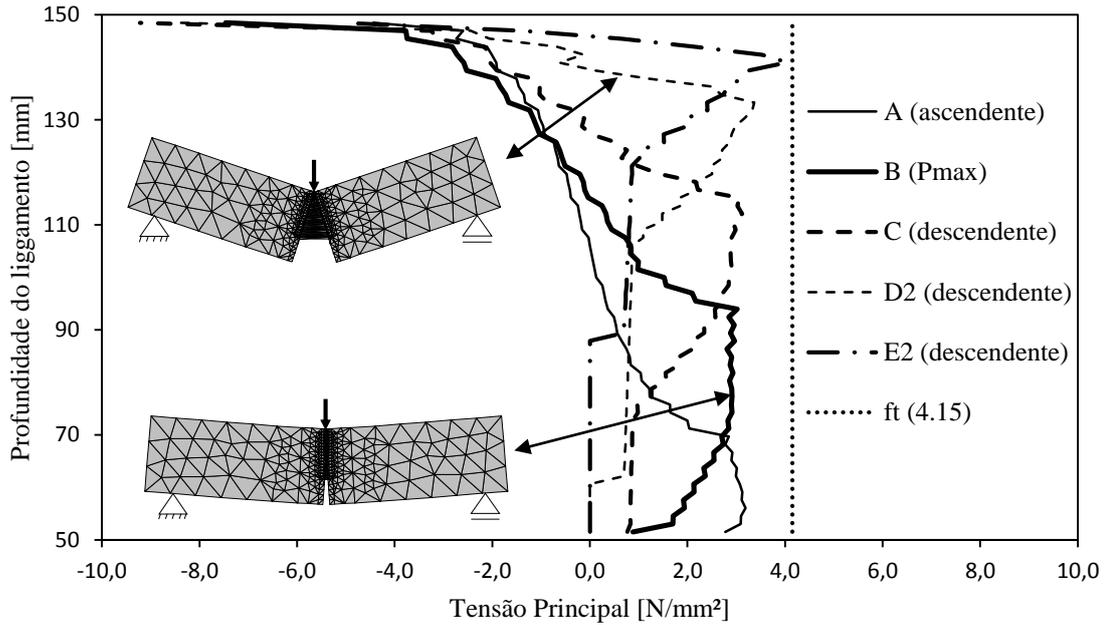
Figura 4.14 – Curva  $P - CMOD$  com pontos de interesse para a viga TPB 150 usando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ .

O estado de tensão nos pontos de interesse é mostrado na Figura 4.15. Neste caso, algumas diferenças são notadas em relação ao que foi observado na Figura 4.10 analisada anteriormente. Para as curvas relativas aos pontos A, B, C e D2, as tensões nos pontos de Gauss em todos os elementos não chegam a atingir a resistência à tração do material ( $f_t = 4,15 MPa$ ), chegando a atingir cerca de  $0,76f_t$ . No entanto, quando a viga apresenta pouca carga residual, as tensões nos elementos chegam até o valor de  $f_t$  (curvas D1 e E2). A curva E1 apresentou tensão máxima igual a  $1,27f_t$ .



(a)

Figura 4.15 – Distribuição de tensão no ligamento da viga TPB 150, utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2.



(b)

Figura 4.15 - Continuação

O valor estimado para a zona de processo de fratura/dano assim como a distribuição de dano em função da profundidade do ligamento pode ser visto na Figura 4.16. Para o caso contínuo, na zona ascendente ( $0,75P_{max}$ ), o dano próximo ao entalhe alcança uma altura de  $21\text{ mm}$ . Assim como no caso de  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ , o tamanho máximo também ocorre em  $P_{max}$  sendo seu valor igual a  $45\text{ mm}$ , e diminui para  $33\text{ mm}$  no momento que a trinca começa a propagar e depois para  $19\text{ mm}$  e  $8\text{ mm}$ , respectivamente, em  $(0,50P_{max})$  e  $(0,25P_{max})$  na zona descendente do caso contínuo.

Conforme pode se notar, a zona de processo de fratura utilizando a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  é maior do que em  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ . Outra diferença é a distribuição do dano na malha de elementos finitos, que para a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  (Figura 4.17) atinge uma quantidade maior de elementos, apresentando característica mais espalhada. Como o cálculo da  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  é feito utilizando o tensor de deformações e este leva em conta a tensão de cisalhamento, o critério de deformações é atingido em elementos que não seriam atingidos pela  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ . Essa diferença explica o fato de em alguns pontos de interesse os elementos não estarem atingindo o valor de  $f_t$ .

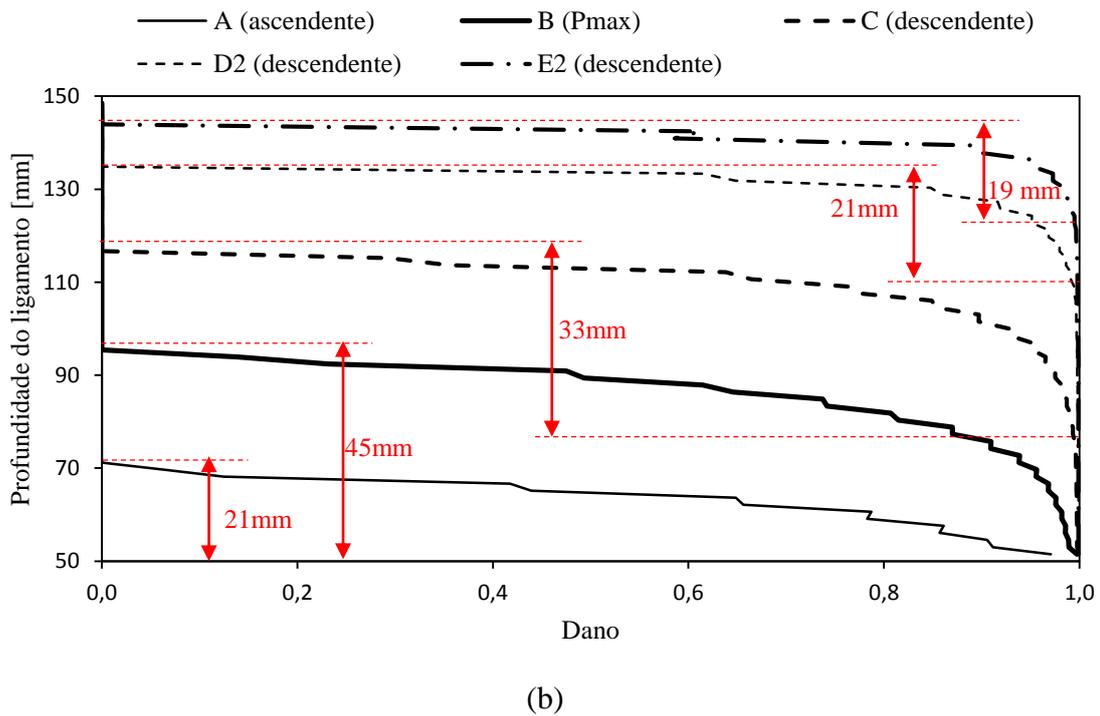
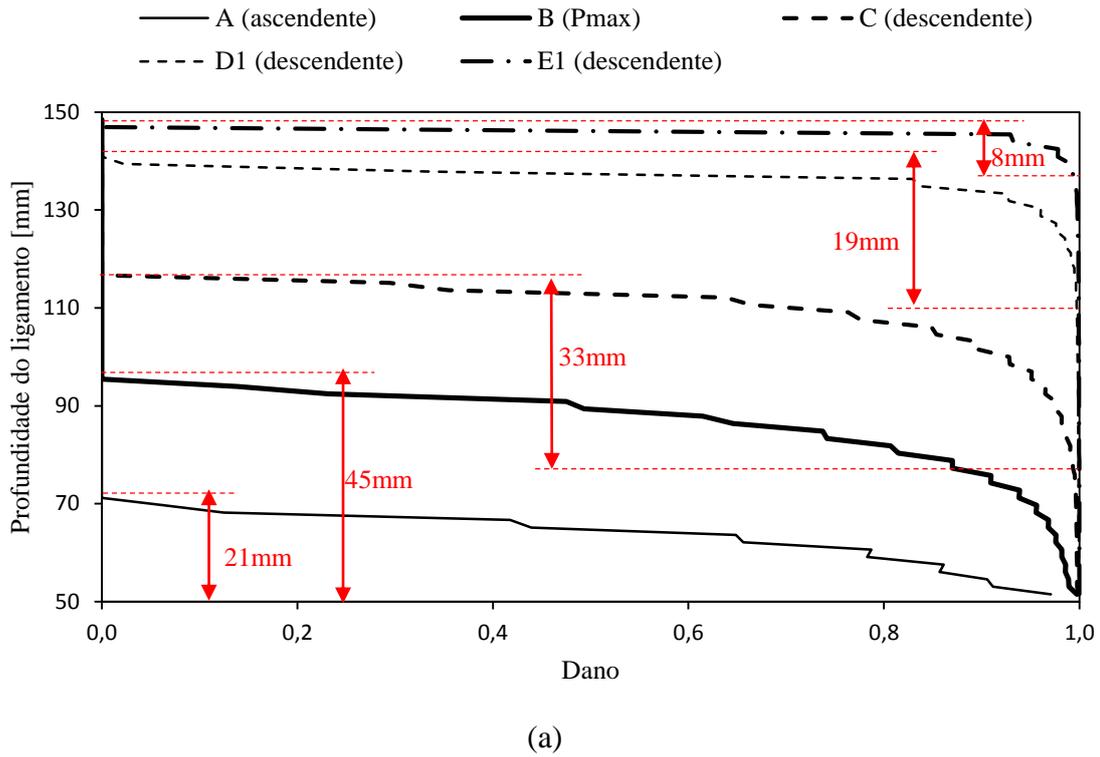


Figura 4.16 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150, utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ , para os pontos (a) A, B, C, D1 e E1; e (b) A, B, C, D2 e E2.

A Figura 4.17 mostra a evolução do dano na malha de elementos finitos para o modelo contínuo com  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ .

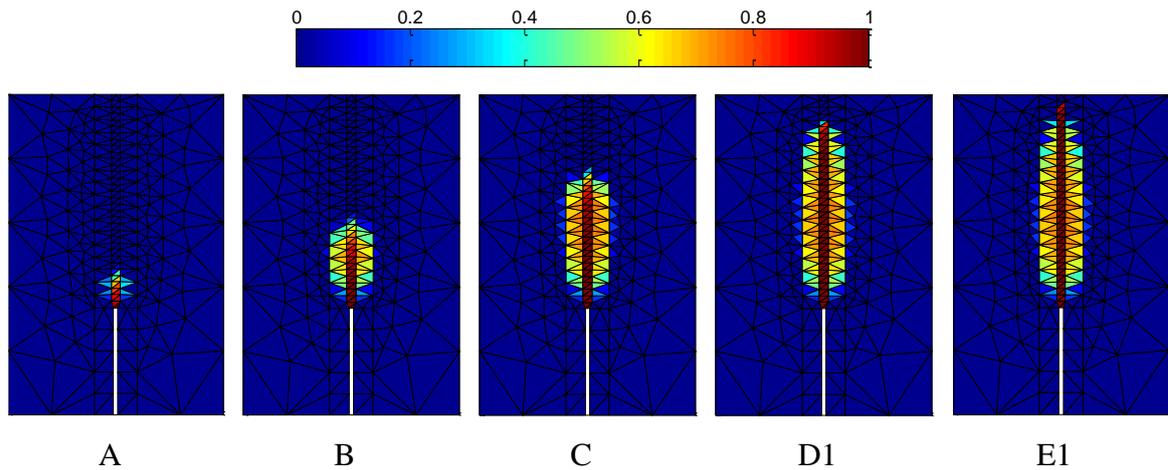


Figura 4.17 – Distribuição de dano no ligamento da viga TPB 150 usando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ .

A propagação da trinca na simulação contínua-descontínua para os pontos C, D2, E2 e Final é mostrada na Figura 4.18.

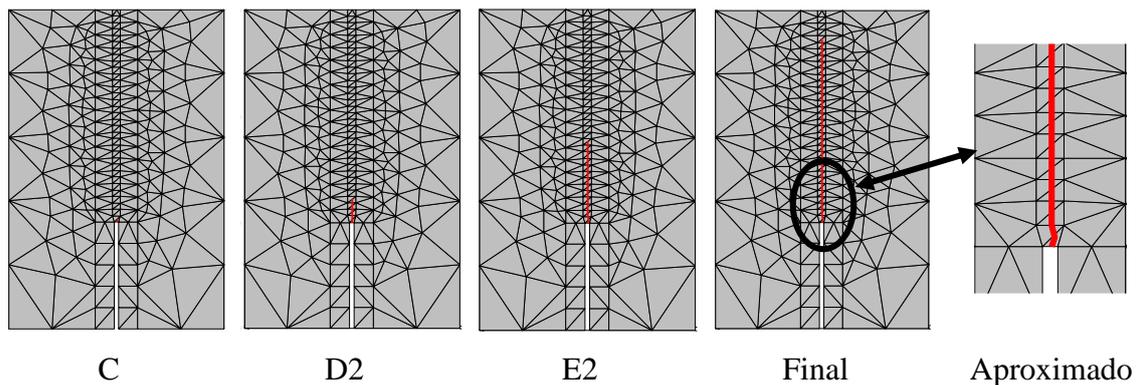


Figura 4.18 – Propagação da trinca na viga TPB 150 utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ .

#### Estudo de convergência para o modelo não-linear

A Figura 4.19(a) mostra o número de iterações necessárias para a convergência em cada passo de deslocamento da simulação contínua com  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  e a Figura 4.19(b) a quantidade total de iterações na simulação. De acordo com o gráfico, o número de iterações necessárias cresce conforme a força se aproxima do  $P_{max}$  (ponto B), e atinge um número máximo de 10 iterações no intervalo entre os pontos B e C. Em seguida a quantidade de iterações necessárias para convergir diminui, e fica constante entre os pontos D1 e E1.

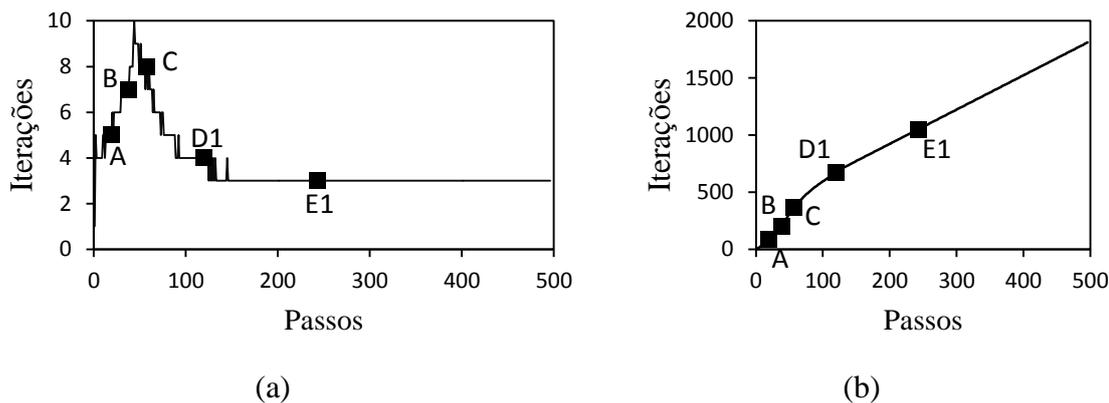


Figura 4.19 – (a) Número de iterações por passo de deslocamento para o caso contínuo e (b) número de iterações acumulada.

Para o caso contínuo-descontínuo utilizando  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ , se observa uma grande variação da quantidade de iterações necessárias para a convergência nos passos localizados próximos ao ponto D2, e também imediatamente posteriores a ele, conforme pode ser observado na Figura 4.20(a). Isto ocorre devido à presença da descontinuidade, que gera nós adicionais pelo MEFM. O sistema linear também fica mais instável devido a presença da descontinuidade em vários elementos, no entanto, a quantidade total de iterações, Figura 4.20(b), foi praticamente a mesma que o caso anterior.

Os gráficos mostram que, apesar de exigir um razoável número de iterações, principalmente na propagação inicial do dano, ou da trinca, a estratégia secante se mostrou bastante eficiente para estes problemas de não linearidade do material devido a mudança da matriz de rigidez com o acúmulo de dano.

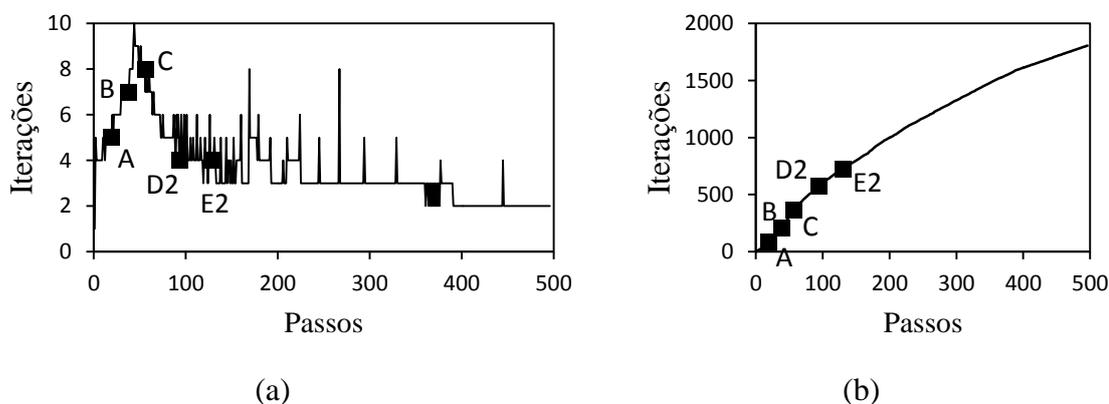
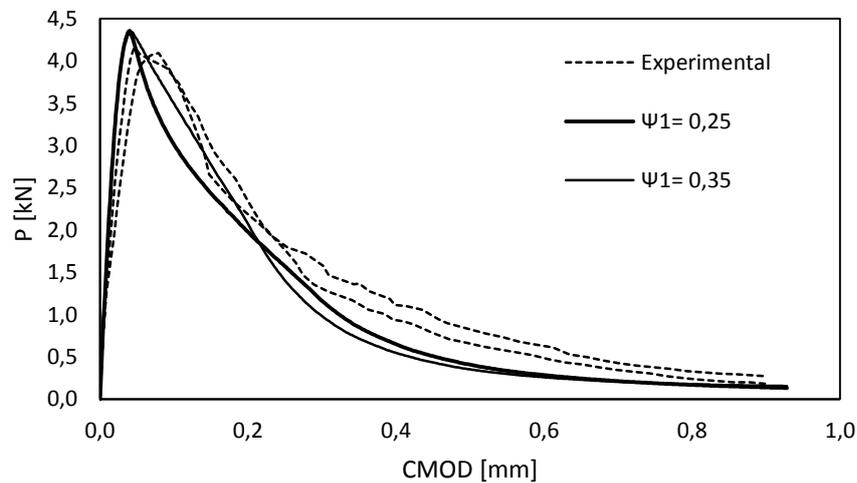


Figura 4.20 – (a) Número de iterações por passo de deslocamento para o caso contínuo-descontínuo e (b) número de iterações acumulada.

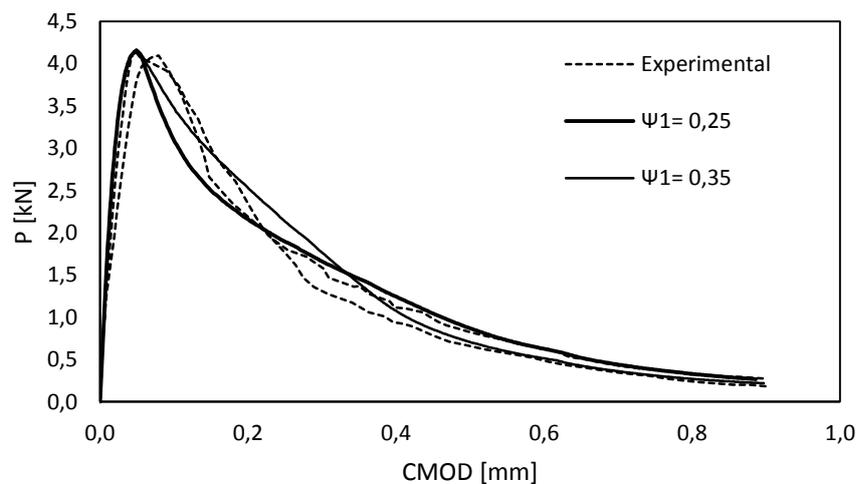
### Efeito do kink point na curva $P - CMOD$

O efeito de diferentes valores para o *kink point*, da malha de elementos finitos e da quantidade de passos utilizada para se determinar a curva  $P - CMOD$  é analisado a seguir. As curvas pertencem às simulações numéricas com o modelo contínuo para a viga TPB 150.

A Figura 4.21 mostra curvas  $P - CMOD$  experimentais e curvas  $P - CMOD$  numéricas utilizando *kink points* ( $\Psi_1$ ) de 0,25 e 0,35 para ambas as deformações. Os resultados mostram que o valor do *kink point* não afeta o valor de  $P_{max}$  das curvas e que valores mais altos causam um aumento da carga resistida pela viga na região imediatamente após o  $P_{max}$  da curva  $P - CMOD$ .



(a)



(b)

Figura 4.21 – Efeito do *kink point* na curva  $P - CMOD$  para as deformações equivalentes de (a) Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ) e (b) von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

#### 4.1.1 - Validação com resultados experimentais de Evangelista Jr. *et al.* (2013) para materiais cimentícios reciclados e com adição de fibra.

Com o objetivo de validar o modelo trilinear de dano para estruturas feitas com concreto incorporado com fibra e o modelo bilinear de dano para o concreto feito com outros materiais, são comparados a seguir os resultados obtidos com os resultados encontrados em Evangelista Jr. *et al.* (2013), onde o autor apresenta curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas para o ensaio de flexão em três pontos em vigas feitas com materiais não convencionais.

Dois tipos de materiais foram considerados nas análises: Concreto contendo agregados reciclados de outros concretos, *Recycled Concrete Aggregate* (RCA), e RCA com adição de fibras, *RCA with Fibers Reinforced* (RCAFRC). As simulações foram realizadas com o modelo contínuo com as deformações equivalente de Mazars e ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ), e von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

A geometria, malha de elementos finitos utilizada e o controle do ensaio são os mesmos do caso TPB 150, a malha contém 581 elementos e pode ser vista na Figura 4.2(b) na seção anterior. Os parâmetros de fratura são dados na Tabela 4.5 e os parâmetros relativos ao material: módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson são  $E = 28 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,19$ , respectivamente. A razão entre as resistências à compressão e à tração considerada foi  $k = 10$  e o valor do *kink point* ( $\Psi_1$ ) foi calculado em função do  $CTOD_c$  mostrado na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Parâmetros de fratura para as leis bilinear e trilinear encontrados em Evangelista Jr. *et al.* (2013).

Material	$G_f$ (N/m)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ ou $G_{FRC}$ (N/m)	$CTOD_c$ (mm)	$l_b$ (mm)
RCA	32	3.70	78	0.014	-
RCAFRC	36	4.22	2172	0.016	40

Os resultados obtidos para a mistura RCA com a lei bilinear de dano com ambos  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  e  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  podem ser vistos na Figura 4.22, que também mostra as curvas experimental e numérica de Evangelista Jr. *et al.* (2013).

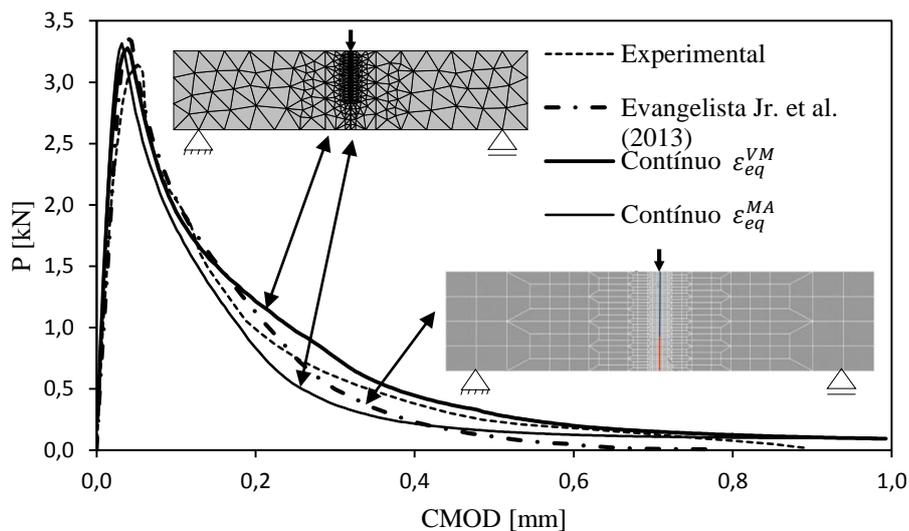
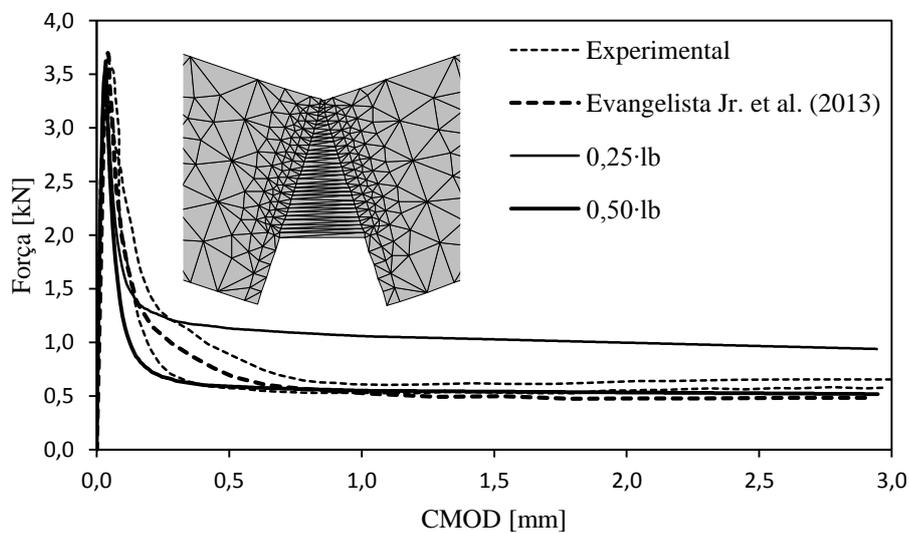


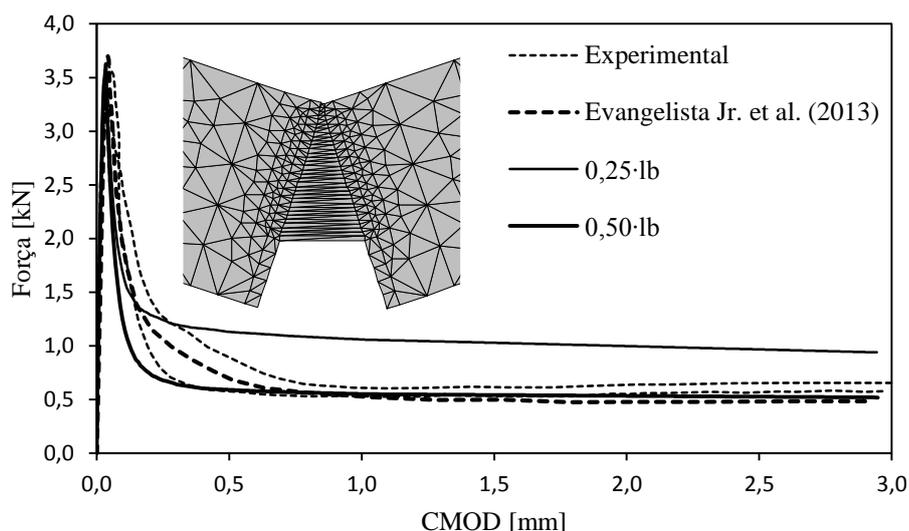
Figura 4.22 – Comparação das curvas  $P - CMOD$  experimental e de Evangelista Jr. *et al.* (2013) com os resultados numéricos obtidos para a viga RCA.

Os resultados para a mistura RCAFRC utilizando 25% e 50% do comprimento ( $l_b$ ) da fibra são mostrados na Figura 4.23 juntamente com as curvas experimentais e numéricas de Evangelista Jr. *et al.* (2013).



(a)

Figura 4.23 – Comparação das curvas  $P - CMOD$  experimentais e de Evangelista Jr. *et al.* (2013) com os resultados numéricos obtidos para a viga RCAFRC para deformação equivalente de (a) von Mises ( $\epsilon_{eq}^{VM}$ ) e (b) Mazars ( $\epsilon_{eq}^{MA}$ ).



(b)

Figura 4.23 - Continuação

Os resultados mostram que o modelo é capaz de representar diferentes  $P_{max}$  e o comportamento de amolecimento para várias misturas de concreto. Por exemplo, o  $P_{max}$  observado para a mistura RCA é menor que o  $P_{max}$  observado para a viga TPB 150 feita com concreto convencional, isto se deve principalmente à menor resistência a tração para a mistura RCA. No caso RCAFRC o  $P_{max}$  não é muito influenciado pela adição da fibra, porém a região de amolecimento (*softening*) é muito afetada. De acordo com os resultados experimentais, ocorre um patamar residual de carga em torno de 15% do valor de  $P_{max}$ , sendo o modelo capaz de prever esse comportamento. Os resultados numéricos indicam que o valor de  $w_f = 0,50l_b$  consegue representar melhor o amolecimento da curva  $P - CMOD$  em comparação com o valor de  $w_f = 0,25l_b$ . Observa-se que a curva trilinear mostrou resultados com bastante acurácia para ambas as deformações equivalentes. Os valores de  $P_{max}$  encontrados nas simulações podem ser vistos na Tabela 4.6 a seguir.

Tabela 4.6 –  $P_{max}$  encontrado nas simulações numéricas e nos resultados experimentais de Evangelista Jr. *et al.* (2013).

Material	Experimental	Evangelista Jr. <i>et al.</i> (2013)	$\varepsilon_{eq}^{MA}$	$\varepsilon_{eq}^{VM}$
RCA	3,1	3,4	3,3	3,3
RCAFRC	3,3 3,6	3,7	3,6	3,5

## 4.2 - VIGA SEM ENTALHE: FLEXÃO EM QUATRO PONTOS, *FOUR POINT BENDING* (FPB)

Brand *et al.* (2013) realizaram ensaios experimentais de flexão em quatro pontos em vigas de concreto sem entalhe utilizando dois tipos de agregados: virgem (VCA – *Virgin Concrete Aggregate*) e reciclado derivado do asfalto (FRAP – *Fractionated Reclaimed Asphalt Pavement*) com o objetivo de avaliar a resistência à flexão ou módulo de ruptura, *Modulus of Rupture* (MOR). A Tabela 4.8 mostra os valores de  $P_{max}$  observados pelos autores para os ensaios FPB, assim como o módulo de ruptura calculados através da Equação (4.33).

$$MOR = \frac{PL}{BH^2} \quad (4.33)$$

em que  $P, L, B$  e  $H$  são os dados geométricos do ensaio FPB indicados na Figura 4.24 a seguir.

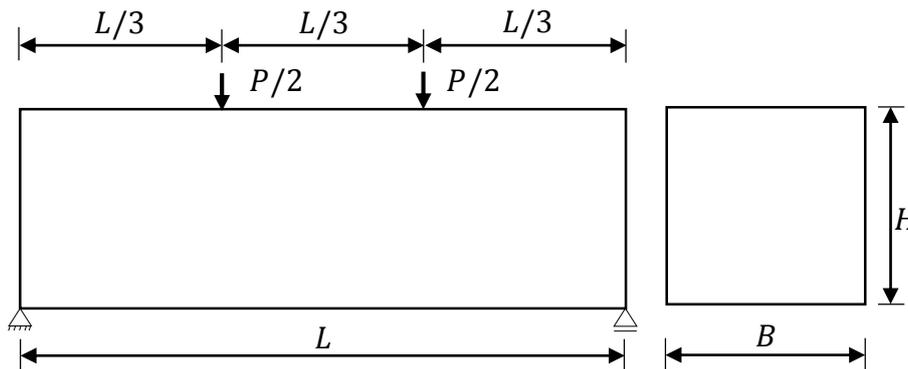


Figura 4.24 – Modelo do ensaio FPB para o cálculo do MOR.

Para validar a capacidade do modelo proposto em prever o comportamento estrutural utilizando parâmetros de material e de fratura obtidos através de outros ensaios experimentais, foram realizadas simulações numéricas das vigas de Brand *et al.* (2013) utilizando parâmetros retirados dos ensaios de compressão uniaxial, compressão diametral e *Disk Shaped Compact Tension* (DCT), todos realizados por Brand *et al.* (2013). Os valores dos parâmetros são mostrados na Tabela 4.7, o coeficiente de Poisson adotado para ambos os materiais foi  $\nu = 0,20$ .

Tabela 4.7 – Parâmetros de material e de fratura utilizados nas simulações numéricas FPB.

Nome	$E$ (GPa)	$G_f$ (N/m)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/m)	$\Psi_1$
VCA	38,620	32,0	4.41	112	0.25
FRAP	28,965	30.2	3.17	116	0.25

A análise numérica é realizada usando o modelo contínuo e contínuo-descontínuo com as deformações equivalentes de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ) e von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ). A Figura 4.25 mostra a geometria, condições de contorno e a malha de elementos finitos utilizada. A espessura da viga adotada foi  $B = 152,4 \text{ mm}$ . O estado plano de tensão foi considerado nas análises. A força ( $P$ ) é aplicada por meio de deslocamento imposto nos nós indicados pelas setas na Figura 4.25. O valor de  $D_{crit}$  adotado foi 0,999.

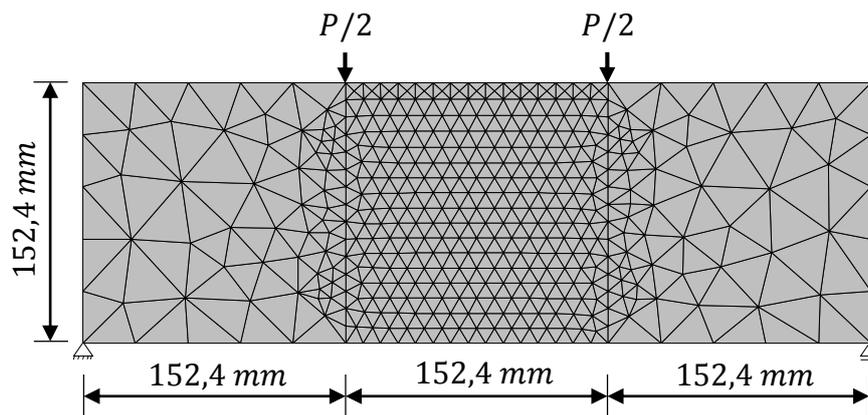


Figura 4.25 – Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos contendo 780 elementos utilizada nas simulações numéricas do ensaio FPB.

Os resultados obtidos para as curvas P-Deflexão para ambos os materiais são mostrados na Figura 4.26. Conforme se observa, em ambos os casos a carga máxima ( $P_{max}$ ) numérica está próximo dos valores experimentais corrigidos. Após  $P_{max}$  ser atingido ocorre uma queda brusca no valor da força  $P$  para cerca de metade de ( $P_{max}$ ), em seguida a diminuição da força  $P$  se torna mais suave fazendo a curva ter um comportamento similar a um comportamento bilinear. Este fato ocorre porque a região localizada entre os dois pontos de aplicação de carga está sob flexão pura e se comporta *quasi* que como num ensaio de tração uniaxial.

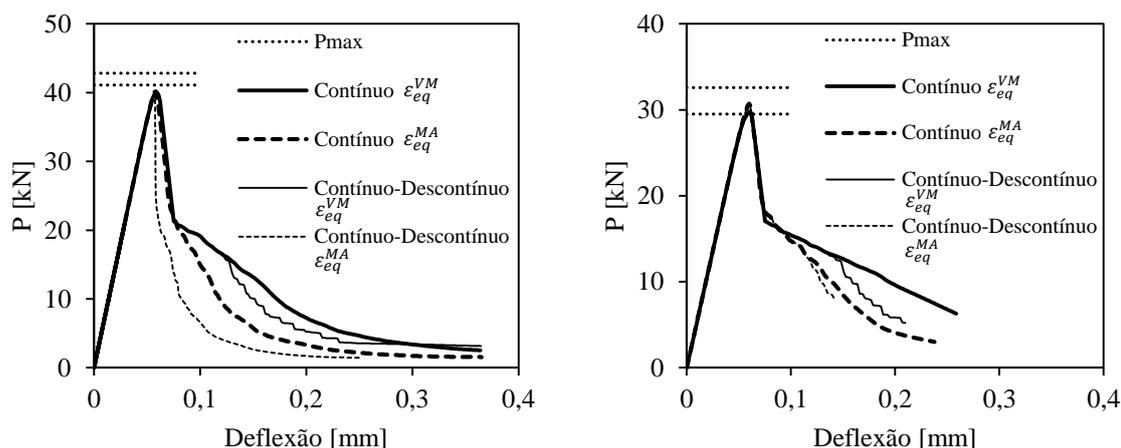


Figura 4.26 – Resultados obtidos para as curvas P –Deflexão (a) VCA e (b) FRAP.

Na Figura 4.27 se compara o valor de ( $P_{max}$ ) dos resultados numéricos com os resultados experimentais corrigidos, mostrando que o modelo é capaz de prever com boa aproximação a carga máxima resistida pela viga, apresentando um erro relativo máximo de 7%.

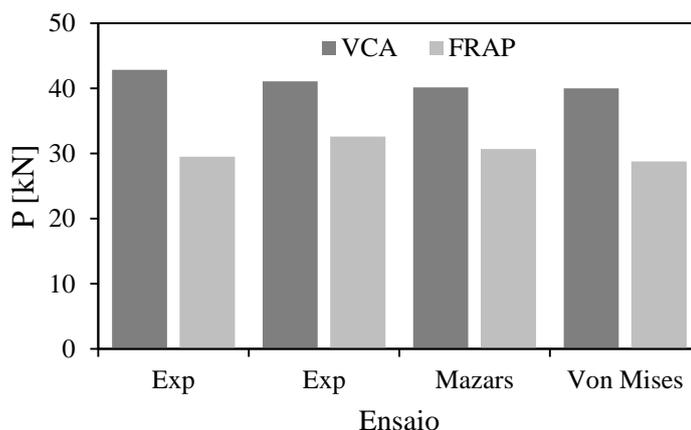


Figura 4.27 – Comparação dos valores de  $P_{max}$  experimentais corrigidos com os resultados numéricos para os materiais VCA e FRAP.

Os valores de ( $P_{max}$ ) que estão sendo usados na comparação com os resultados numéricos não são os valores observados experimentalmente, mas o resultado de uma correção, feita em função do MOR, que se faz necessária, pois a geometria das vigas dos ensaios experimentais apresentam valores ligeiramente diferentes entre si e diferente dos valores utilizados nas vigas das análises numéricas (Tabela 4.8). A correção consiste basicamente em calcular o MOR para as vigas experimentais através da Equação (4.33) e, em seguida, calcular a força ( $P_{max}$ ) necessária para se ter o mesmo valor de MOR utilizando a geometria da viga ensaiada numericamente.

Tabela 4.8 – Correção dos valores  $P_{max}$  através do MOR.

Tipo de ensaio	$P_{max}$ Observado ( <i>kN</i> )	Geometria <i>BxH</i> (mm)	MOR (MPa)	$P_{max}$ Corrigido* ( <i>kN</i> )
VCA				
Experimental	46,515	158,75x155,70	5,535	42,850
Experimental	44,171	157,23x155,70	5,309	41,102
$\varepsilon_{eq}^{MA}$	40,174	152,40x152,40	5,189	40,174
$\varepsilon_{eq}^{VM}$	40,032	152,40x152,40	5,171	40,032
FRAP				
Experimental	31,516	155,70x155,70	3,813	29,520
Experimental	34,776	155,70x155,70	4,212	32,607
$\varepsilon_{eq}^{MA}$	30,700	152,40x152,40	3,965	30,700
$\varepsilon_{eq}^{VM}$	28,803	152,40x152,40	3,720	28,803

\* Corrigido para a viga de 152,40x152,40 (*BxH*)

#### 4.2.1 - Análise da evolução e distribuição de dano

A análise realizada a seguir é referente às simulações numéricas utilizando o modelo contínuo de dano com ambas as deformações equivalente ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$  e  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) para o material VCA. A Figura 4.28 mostra os pontos de interesse na curva *P*-Deflexão onde serão analisadas as distribuições de dano. O ponto A está localizado em ( $P_{max}$ ), enquanto que o ponto B está localizado a cerca de ( $0,5P_{max}$ ) na zona descendente da curva.

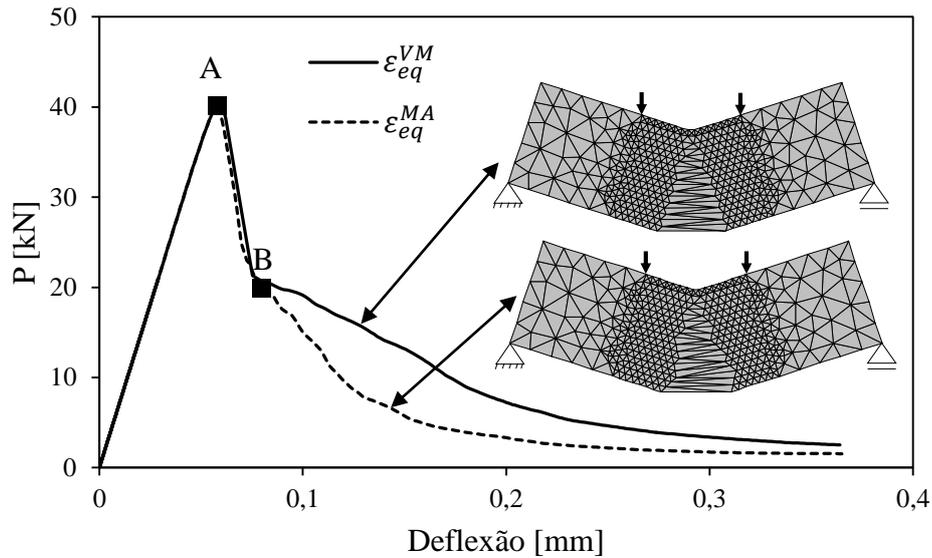


Figura 4.28 – Curva  $P$  – Deflexão e pontos de interesse para o concreto VCA.

A distribuição do dano nos pontos de interesse é mostrada na Figura 4.29. No ponto A percebe-se que toda a parte inferior da malha de elementos finitos apresenta dano, no centro porém, os valores são maiores porque propositalmente se reduziu a resistência à tração do elemento central para  $0,95f_t$ , isto é necessário para garantir que a evolução do dano ocorra na cessão central da viga, do contrário a evolução se daria partindo próximo da linha de aplicação de carga, como fica mais evidente para o caso de  $\varepsilon_{eq}^{VM}$ . Do ponto A para o ponto B se nota um grande avanço na evolução do dano, o qual é responsável pela queda brusca observada na curva  $P$ -Deflexão. Por fim ao final da simulação praticamente toda a seção central da viga apresenta dano caracterizando a falha do material.

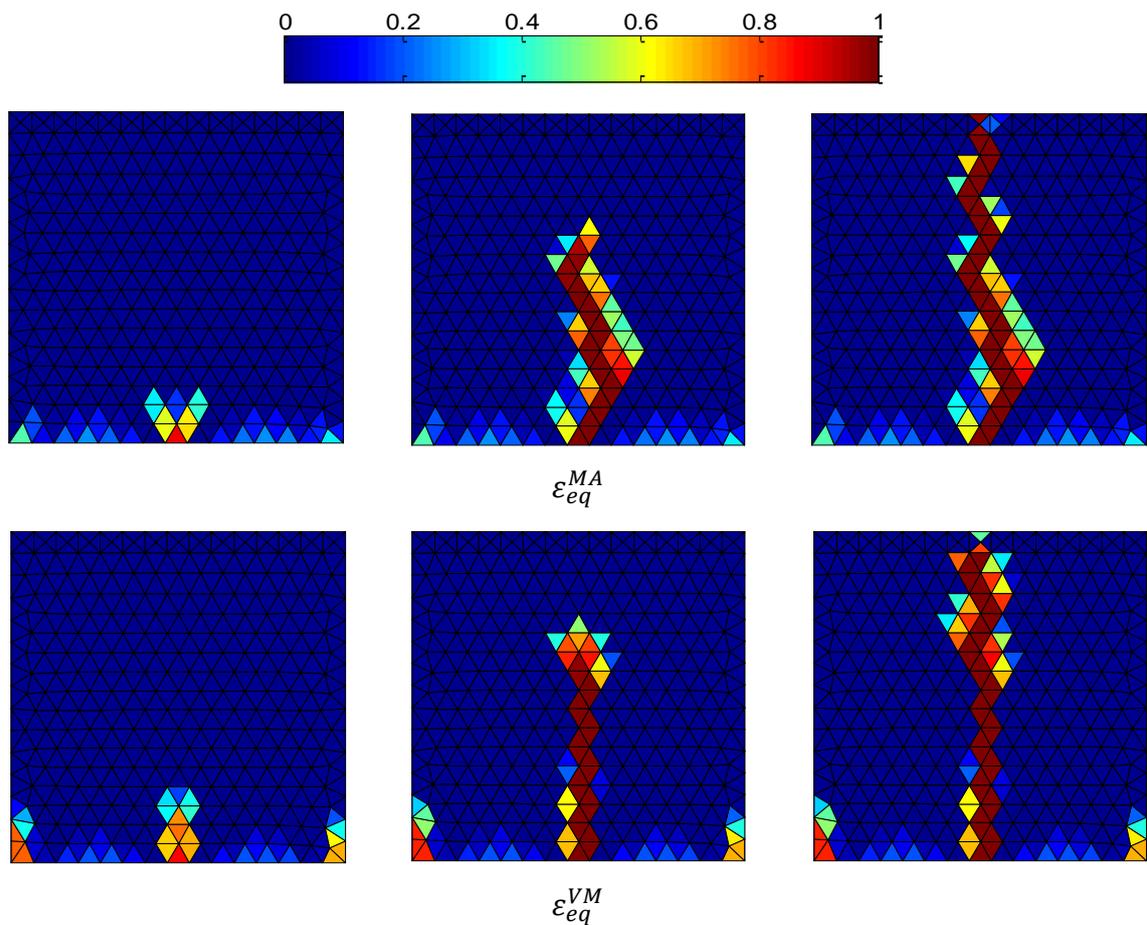


Figura 4.29 – Distribuição de dano nos pontos de interesse A e B e ao final da simulação.

Uma análise comparativa entre o dano gerado por  $\epsilon_{eq}^{MA}$  e  $\epsilon_{eq}^{VM}$  indica que para o primeiro caso a evolução é mais dependente da malha de elementos finitos. Isto influencia diretamente na propagação da trinca conforme se observa na Figura 4.30, onde o caminho da trinca é mais consistente com o experimental para  $\epsilon_{eq}^{VM}$ .

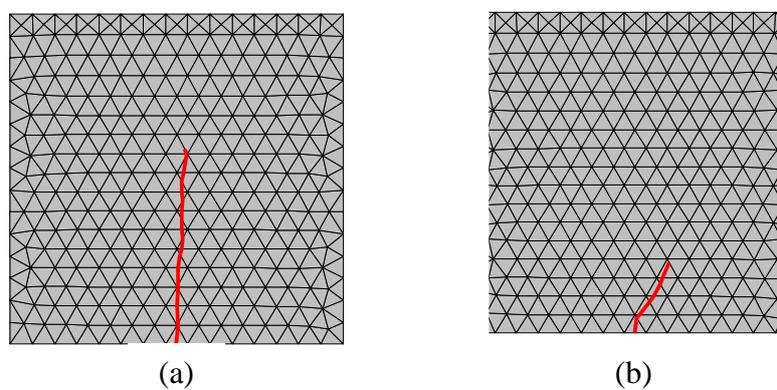


Figura 4.30 – Propagação da trinca utilizando (a)  $\epsilon_{eq}^{VM}$  e (b)  $\epsilon_{eq}^{MA}$ .

## 5 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO: MODO I + II

A validação do modelo proposto para o caso de abertura de trinca em modo misto é feita através da simulação numérica de dois tipos de ensaios. O primeiro é conhecido como *Double Edge Notched* (DEN) e foi realizado por Nooru-Mohamed (1992), o segundo é chamado de *Four Point Shear* (FPS), ou Cisalhamento em Quatro Pontos, sendo realizado por Schlangen (1993). No primeiro ensaio o objetivo é, entre outros, analisar a influência da malha de elementos finitos na resposta estrutural da peça; no segundo avalia-se, entre outros aspectos, a capacidade do modelo em prever a ocorrência de fissuras com trajetória curva.

### 5.1 - ESTRUTURA COM DUPLO ENTALHE: *DOUBLE EDGE NOTCH* (DEN)

Nooru-Mohamed (1992) realizou diversos ensaios experimentais em peças quadradas de concreto com dois entalhes, onde se variava o tamanho do modelo ensaiado e as condições de deslocamento e força aplicada, esses ensaios são chamados na literatura como *Double Edge Notched* (DEN). A Figura 5.1 mostra a geometria e as condições de contorno para um dos tipos de ensaios realizados, no qual o carregamento é aplicado na peça através de deslocamentos impostos nas direções horizontal ( $\delta_n$ ) e vertical ( $\delta_s$ ), respectivamente, nas faces esquerda e acima do entalhe e na face superior. O deslocamento imposto é aplicado a uma taxa de  $\delta_n/\delta_s = 1$ . Este ensaio resulta na ocorrência de fissuras que começam nas pontas dos entalhes e seguem em direção ao interior do corpo sem se tocarem.

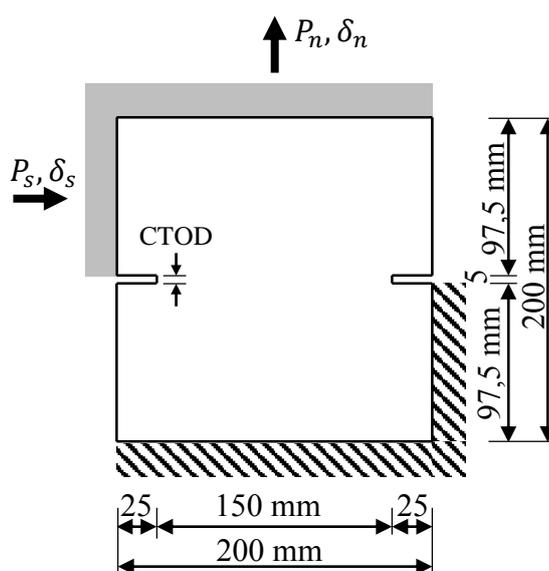


Figura 5.1 – Geometria e condições de contorno do ensaio DEN (espessura = 50 mm).

A análise numérica é realizada considerando-se o estado plano de tensões usando o modelo contínuo com a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ). As propriedades do material e os parâmetros de fratura utilizados nas simulações foram: módulo de elasticidade  $E = 30 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ , resistência a tração  $f_t = 3,3 \text{ MPa}$ , energia de fratura inicial  $G_f = 40 \text{ N/m}$ , energia de fratura total  $G_F = 100 \text{ N/m}$  e *kink point*  $\Psi_1 = 0,25$ .

Para avaliar a convergência e objetividade da malha e do comprimento característico de seus elementos, as simulações são feitas com duas malhas estruturadas contendo 566 e 1008 elementos, sendo o comprimento característico de seus elementos respectivamente iguais a 8 e 6 mm. As malhas podem ser vistas na Figura 5.2.

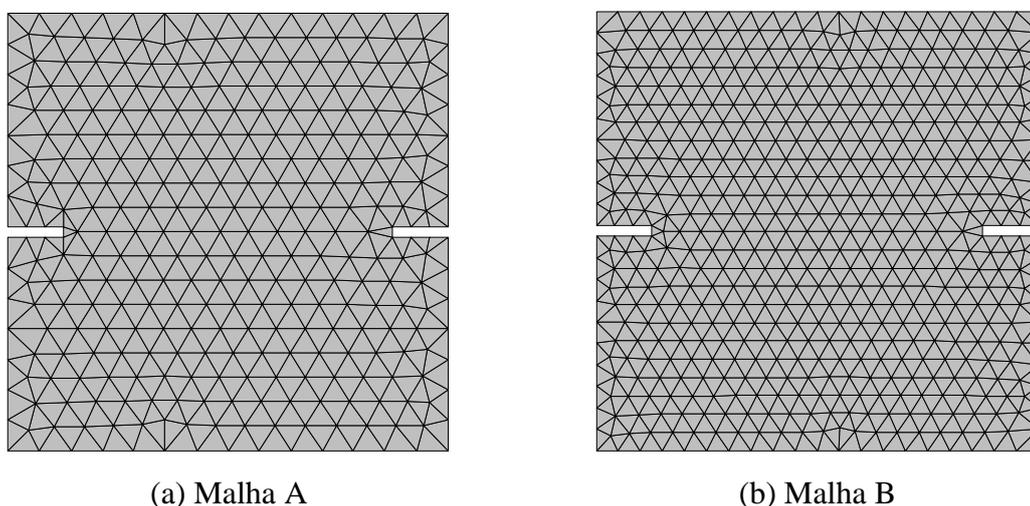


Figura 5.2 – Malhas de elementos finitos utilizadas no ensaio DEN com (a) 566 elementos e (b) 1008 elementos.

A Figura 5.3 mostra os resultados encontrados para a força  $P_n$  em função do deslocamento de abertura de ponta de trinca, *Crack Tip Opening Displacement* (CTOD), para o entalhe localizado na face esquerda do DEN, esse deslocamento foi escolhido para permitir a comparação das curvas, pois o deslocamento da curva experimental foi medido próximo à ponta dos entalhes. Conforme pode ser observado, os resultados numéricos conseguem reproduzir com boa aproximação os resultados experimentais, apresentando um erro relativo máximo de 6,5%. Com relação à influência da malha, o gráfico mostra que a malha menos refinada resultou num  $P_{max}$  ligeiramente maior que a malha mais refinada.

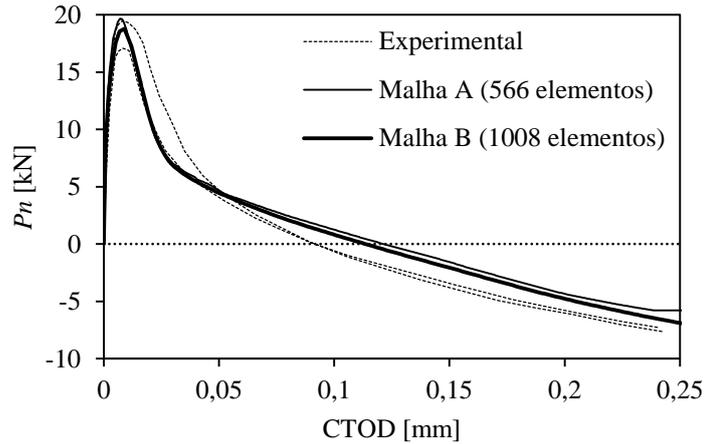


Figura 5.3 – Resultados do ensaio DEN, curva  $P_n - CTOD$ .

As cargas máximas encontradas são mostradas na Tabela 5.1 a seguir.

Tabela 5.1 –  $P_{max}$  das curvas  $P_n - CTOD$  da Figura 5.3 (valores em  $kN$ ).

Experimental	Malha A	Malha B
19,5	19,7	18,8
17,1		

Em Nooru-Mohamed (1992) também são encontrados resultados para a força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal imposto ( $\delta_s$ ), as curvas estão plotadas no gráfico da Figura 5.4. Os resultados mostram que o modelo é capaz de representar o aumento contínuo observado no ensaio experimental da força horizontal ( $P_s$ ) a medida que o deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ) é aplicado.

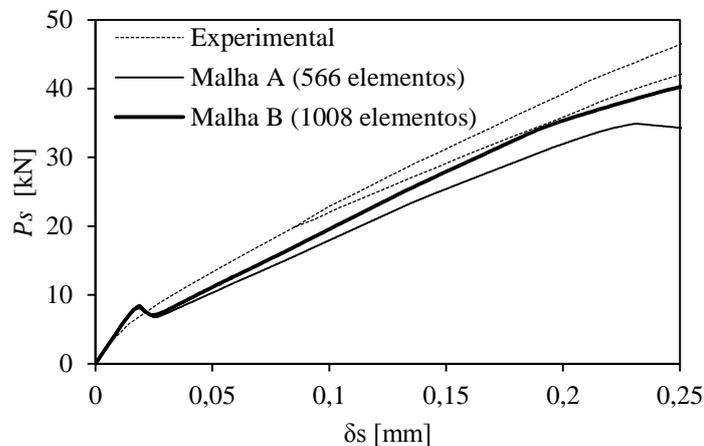


Figura 5.4 – Resultados do ensaio de modo misto, curva  $P_s - \delta_s$ .

A distribuição do dano ao final da simulação é mostrada na Figura 5.5. A figura demonstra que a simulação foi realizada corretamente e os elementos que apresentam dano estão localizados na região onde as trincas ocorrem no ensaio experimental, conforme mostra a Figura 5.6.

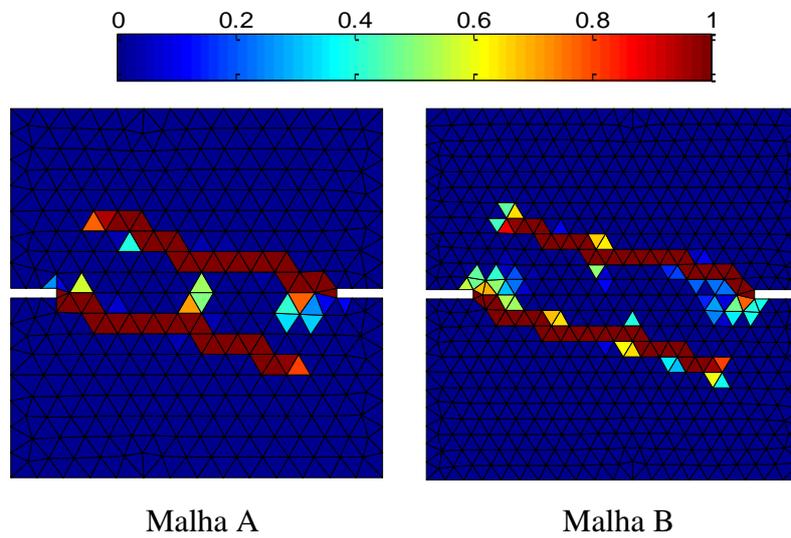


Figura 5.5 – Distribuição final de dano

Na Figura 5.6 se compara o mapa de fissuras do ensaio experimental com o caminho do dano das malhas de elementos finitos simuladas.

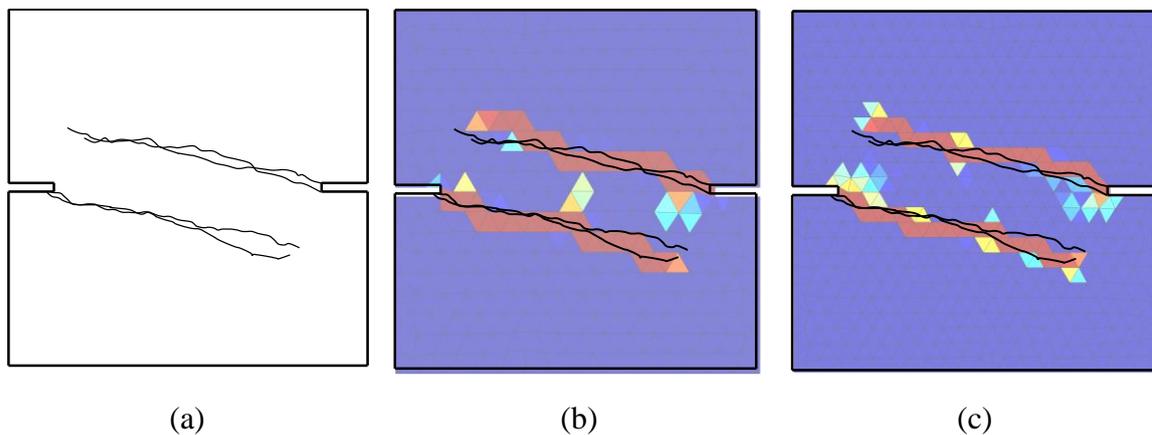


Figura 5.6 – (a) Mapa de fissuras experimental (adaptada de Nooru-Mohamed, 1992); sobreposição das fissuras do experimental sobre o caminho do dano para (b) Malha A e (c) Malha B.

Na Figura 5.7 é mostrada a deformada das malhas simuladas.

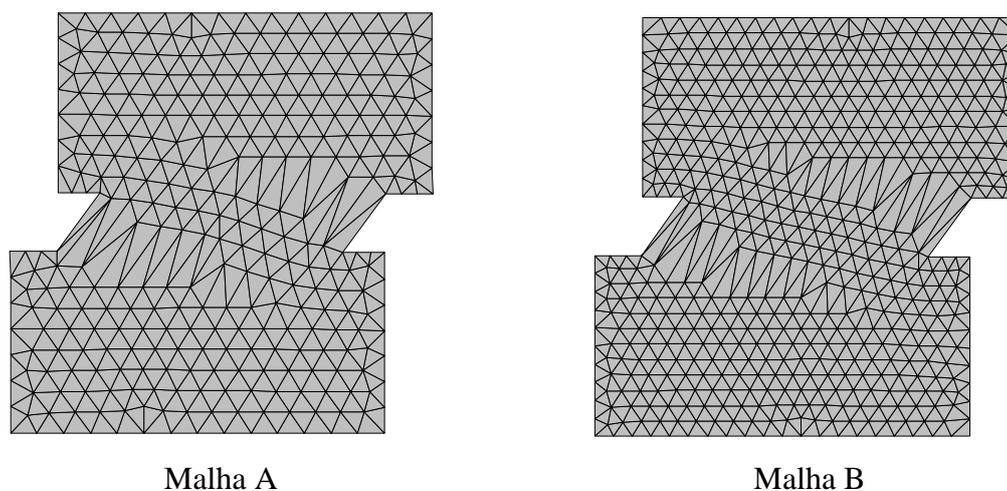


Figura 5.7 – Deformada das malhas de elementos finitos.

## 5.2 - VIGA COM ENTALHE: CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS, *FOUR POINT SHEAR* (FPS)

O ensaio experimental de cisalhamento em quatro pontos ou do inglês *Four Point Shear* (FPS) em vigas de concreto com apenas um entalhe, foi um dos tipos de ensaios realizados por Schlangen (1993) para analisar os mecanismos que se desenvolvem no processo de fissuração do concreto. A Figura 5.8 mostra a geometria e as condições de contorno do ensaio. As condições de contorno mostradas na Figura 5.8 resultam numa trinca com trajetória curva que começa na parte superior direita do entalhe e propaga até a parte inferior direita da placa de carga. As condições de contorno de deslocamento são constituídas por uma restrição vertical e horizontal localizada na parte inferior direita da viga e por uma restrição vertical na parte inferior central. As placas de carga têm largura de 20 mm e centro localizado a 20 mm da seção central da viga (placas centrais) e a 20 mm das bordas para as demais placas.

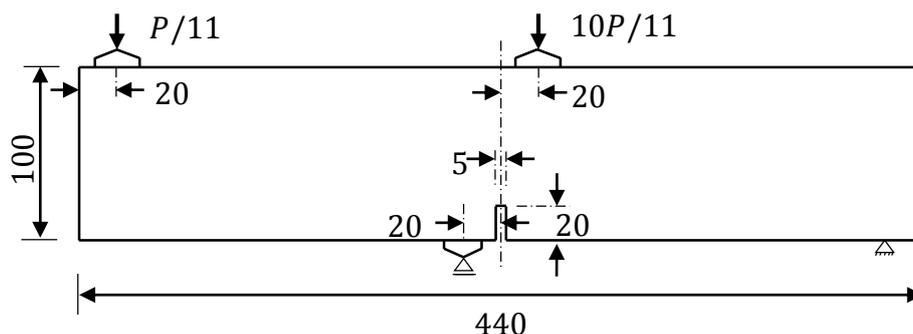


Figura 5.8 – Geometria e condições de contorno do ensaio de cisalhamento em quatro pontos (espessura = 100 mm, todas as dimensões em mm).

Simone *et al.* (2003) realizaram simulações numéricas com a viga FPS usando modelos de dano contínuo e contínuo-descontínuo para malhas com diferentes comprimentos característicos de elementos. A Figura 5.9 mostra a região central de uma das malhas (7308 elementos) usadas nas simulações e os resultados encontrados pelo autor podem ser vistos no gráfico da Figura 5.11.

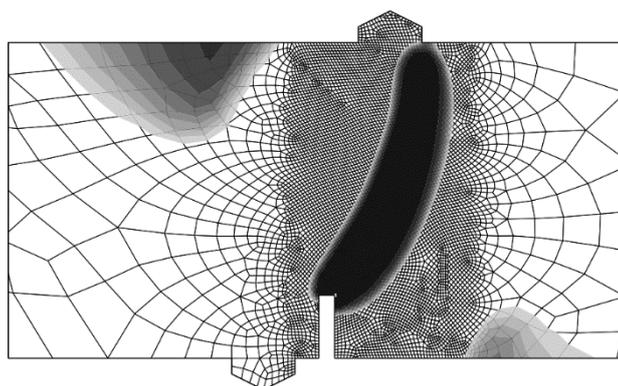


Figura 5.9 – Discretização da viga com 7308 elementos e  $h_e = 1 \text{ mm}$  de Simone *et al.* (2003).

Usando os modelos contínuo e contínuo-descontínuo com deformação equivalente de von Mises ( $\epsilon_{eq}^{VM}$ ), a viga FPS é analisada no estado plano de tensão. As simulações são realizadas com uma malha não estruturada de 761 elementos (Figura 5.10), cuja região central possui elementos com tamanho típico  $h_e = 3,5 \text{ mm}$ .

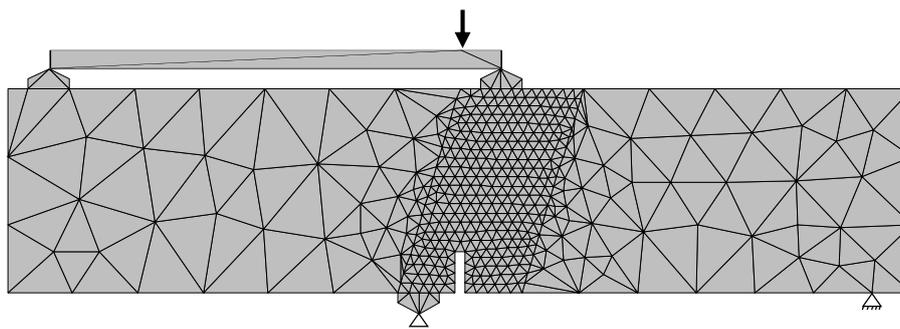


Figura 5.10 – Discretização da viga com 761 elementos e  $h_e = 3,3 \text{ mm}$ .

As propriedades do material e os parâmetros de fratura utilizados na análise da viga FPS foram: módulo de elasticidade  $E = 35000 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ , resistência a tração  $f_t = 3,0 \text{ MPa}$ , energia de fratura inicial  $G_f = 34 \text{ N/m}$ , energia de fratura total  $G_F = 100 \text{ N/m}$  e *kink point*  $\Psi_1 = 0,25$ . Os parâmetros de material foram retirados de Schlangen (1993) e os parâmetros de fratura encontrados em Wells e Sluys (2001). O ensaio numérico é realizado através do controle de deslocamento vertical do nó destacado localizado na parte superior da barra rígida (Figura 5.10). A barra rígida e as placas de carga têm propriedade de material do aço. A posição do nó onde o deslocamento foi aplicado é calculado de modo que a força resultando transferida às placas de carga superiores tenham valores conforme indicados na Figura 5.8. Assim como feito em Simone *et al.* (2003), o valor crítico considerado para o início e propagação da trinca foi  $D_{crit} = 0,99$ .

Os valores de  $P_{max}$  do ensaio experimental, de Simone *et al.* (2003) e das simulações numéricas realizadas são mostrados na Tabela 5.2. Conforme se observa, os valores de  $P_{max}$  numéricos são próximos dos valores observados experimentalmente, apresentando um erro relativo máximo de 7,8%.

Tabela 5.2 –  $P_{max}$  das curvas  $P - CMSD$  da Figura 5.11 (valores em  $kN$ ).

Experimental	Simone <i>et al.</i> (2003)	Contínuo	Contínuo-Descontínuo
41,2	38,2	40,7	41,8
36,4			

Na Figura 5.11 os resultados encontrados para a força ( $P$ ) em função do deslocamento deslizante de boca de trinca, *Crack Mouth Sliding Displacement* – CMSD (ver Figura 5.14), obtidas com os modelos contínuo e contínuo-descontínuo são comparados com os resultados

experimentais de Schlangen (1993) e numéricos de Simone *et al.* (2003). Assim como foi observado para o caso de flexão em três pontos visto na seção 4.1, a resposta global do modelo contínuo-descontínuo é mais frágil do que a resposta do modelo contínuo. Os resultados mostram que o modelo não necessita de malhas com elementos muito pequenos para apresentar resultados satisfatórios, pois, mesmo tendo cerca de 10 vezes menos elementos e comprimento característico de elemento 3,3 vezes maior que a malha utilizada por Simone *et al.* (2003), consegue-se representar com boa aproximação os resultados obtidos para o caso contínuo.

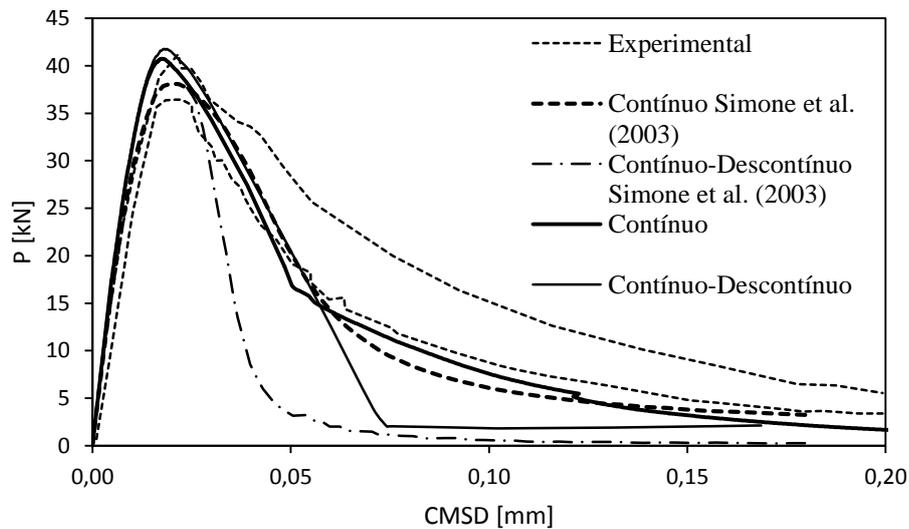


Figura 5.11 – Comparação das curvas Força-CMSD obtidas com os resultados experimentais de Schlangen (1993) e numéricos de Simone *et al.* (2003).

Na Figura 5.12 é comparada a evolução do dano ao final da simulação para o modelo contínuo e o modelo contínuo-descontínuo. Pequenas diferenças podem ser notadas na região superior da viga, onde o caminho do dano tende a ser mais curvo para o caso contínuo. Essa característica curva que a simulação deve apresentar poderia ser melhor obtida com uma malha mais refinada na região de interesse.

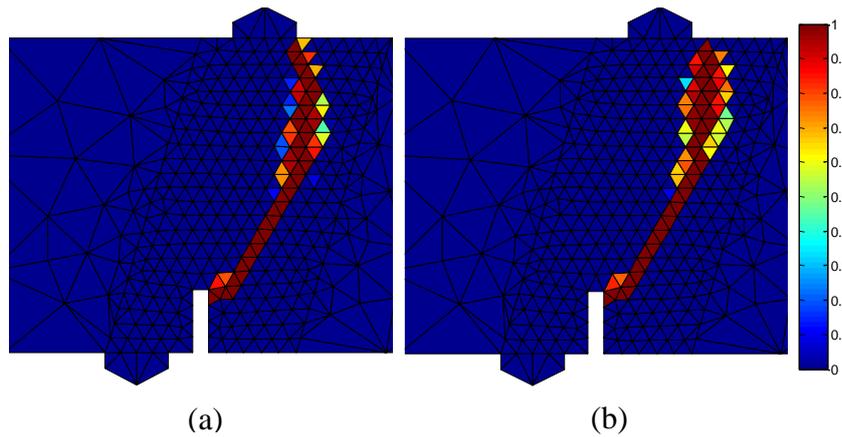


Figura 5.12 – Distribuição final de dano para o modelo (a) contínuo e (b) contínuo-descontínuo.

Conforme se observa na Figura 5.13, a propagação da trinca do ensaio numérico segue uma trajetória curva em muito boa concordância com o mapa de propagação das trincas das vigas ensaiadas por Schlangen (1993). A trinca começa da coordenada (222,5; 19,0) e vai até a coordenada (257; 85,5), com a origem do sistema de coordenadas localizado no canto inferior esquerdo da viga.

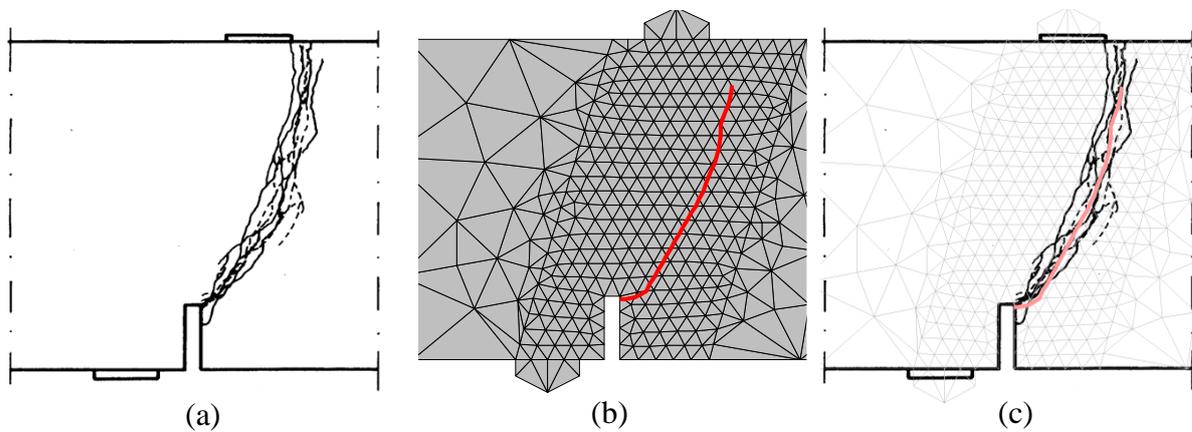


Figura 5.13 – Propagação da trinca: (a) experimental (adaptada de Schlangen, 1993); (b) simulação e (c) sobreposição da simulação sobre experimental.

A Figura 5.14 a seguir mostra a malha de elementos finitos deformada.

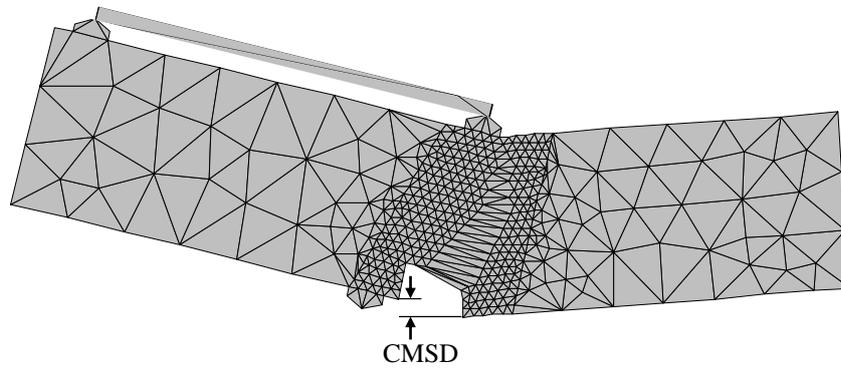


Figura 5.14 – Malha de elementos finitos deformada.

## 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 - CONCLUSÕES

Esta dissertação formulou e implementou um modelo de dano contínuo e um modelo contínuo-descontínuo (transição para fratura) para os modos I e misto (I+II) de abertura de trinca para a predição de falhas em estruturas de materiais *quasi*-frágeis. Os modelos foram validados através da comparação com resultados experimentais para vários tipos de ensaios e diferentes materiais e modos de falha: flexão em três pontos com entalhe central (TPB), flexão em quatro pontos sem entalhe (FPB), duplo entalhe (DEN) e cisalhamento em quatro pontos (FPS) para o modo misto. Os resultados obtidos comprovam a eficiência e acurácia do modelo em prever o comportamento de ruptura submetidas a falhas em modo I e modo misto em diferentes materiais cimentícios com e sem a incorporação de fibras.

Os resultados obtidos para as simulações com diferentes malhas de elementos finitos mostraram que a regularização proposta, que estabelece a dissipação da energia de fratura proporcional ao tamanho típico do elemento, consegue produzir objetividade na malha de elementos finitos. Uma vantagem do modelo proposto é que o mesmo consegue obter praticamente a mesma acurácia de resultados que outros modelos encontrados na literatura mesmo com um número bem reduzido de elementos na malha. Além dessa vantagem, o modelo também é capaz de simular o efeito de escala (*size effect*) em estruturas de materiais *quasi*-frágeis utilizando apenas propriedades de ensaios de pequena escala comumente realizados em laboratório, sem necessidade de nenhuma calibração de propriedades dos materiais e/ou de simulações computacionais. Para isso, uma lei de amolecimento bilinear para materiais cimentícios tradicionais e uma lei de amolecimento trilinear para materiais com fibras, ambas definidas somente por parâmetros de resistência e fratura, são adaptadas como lei de evolução de dano.

Em todas as simulações numéricas realizadas, o modelo de dano proposto foi capaz de reproduzir/estimar, com muito boa precisão, a carga máxima ( $P_{max}$ ), bem como o efeito de escala da resistência nominal, e também o comportamento de amolecimento (*softening*) observada nos ensaios experimentais. Para os ensaios simulados em modo I utilizando o modelo contínuo, as simulações com a deformação equivalente de Mazars ( $\epsilon_{eq}^{MA}$ ), que leva em conta somente deformação de tração, resultaram num  $P_{max}$  ligeiramente maior que com

a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ), que leva em conta deformações de cisalhamento. Na região descendente de amolecimento, a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  resulta em valores ligeiramente superiores. As previsões em modo I de  $P_{max}$  e do comportamento de amolecimento usando a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  são similares as previsões com a  $\varepsilon_{eq}^{MA}$ , que é idealizada especificamente para este modo de falha. Isto mostra que uma deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) pode ser universalmente usada para problemas em modo I puro e modo misto (I+II) conjuntamente com a lei bilinear e/ou trilinear advinda da mecânica da fratura. Especialmente nas simulações em modo misto, a  $\varepsilon_{eq}^{VM}$  se mostrou bastante eficiente na previsão da distribuição do dano nas regiões equivalentes à localização das trincas nos ensaios experimentais.

O modelo e estratégia contínua-descontínua com o emprego do GFEM também demonstrou eficiência e acurácia tanto na estimativa da carga máxima ( $P_{max}$ ), bem como do efeito de escala da resistência, e também o caminho da trinca, com a propagação independente da malha de elementos finitos para ambos os casos em modo I e modo misto. Esta estratégia também confirmou a observação da literatura em que a previsão do comportamento de amolecimento (*softening*) predito por estes modelos, apesar de razoavelmente comparada com os experimentos, resulta em uma diminuição da capacidade de carga na região de amolecimento pela presença da descontinuidade nos elementos finitos.

Os resultados das simulações com a lei trilinear aplicada em materiais incorporados com fibras mostram que o modelo é capaz de simular com acurácia tanto a carga máxima quanto a força residual para grandes deformações observado experimentalmente durante o amolecimento. Isto sugere que o modelo pode ser aplicado para materiais que apresentam um comportamento de ruptura dúctil, onde também se observa a ocorrência de tal patamar de força residual para grandes deformações.

A estratégia secante utilizada para a resolução do sistema não-linear de equações, apesar de exigir um razoável número de iterações, principalmente na propagação inicial do dano ou trinca, mostrou-se bastante confiável do ponto de vista que a convergência sempre foi alcançada mesmo em pontos críticos do caminho de equilíbrio.

## **6.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Como recomendações para trabalhos futuros propõe-se:

- Expandir o modelo proposto para análises tridimensionais;
- Usar funções de enriquecimento polinomiais e estudar os efeitos na predição do dano com malhas grosseiras;
- Implementar a possibilidade de multi-trincamentos, onde a propagação de múltiplas trincas simultâneas e suas conseqüentes coalescência possam ser modeladas;
- Implementar modelos multi-física que permitam a modelagem de fenômenos como faturamento hidráulico; e
- Implementar a propagação da fissura considerando os enriquecimentos de ponta de trinca.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvares, M. S. *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 1993.
- ASTM C469-94. Método de teste padrão para determinar o módulo de elasticidade estático e coeficiente de Poisson para o concreto em compressão.
- ASTM C496-96. Método de teste padrão para determinar a resistência à tração através do ensaio de compressão diametral em corpos de prova cilíndricos.
- ASTM D7313-06. Método de teste padrão para determinar a energia de fratura de materiais feitos com agregado asfáltico através do ensaio *Disk-Shaped Compact Tension Geometry*, 2007.
- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 945 – 981, 1994.
- Babuška, I.; Melenk, J. M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727-758, 1997.
- Barenblatt, G. I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 23, pp. 622- 636, 1959.
- Barros, F. B. *Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- Bazant, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete, *Materials and Structures*, RILEM, v. 16(93), pp. 155-177, 1983.
- Bazant, Z. P.; Pijaudier-Cabot, G. Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115(4), p. 755-767, 1989.
- Bazant, Z. P.; Planas, J. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials*. CRC Press, 1998.
- Bazant, Z. P.; Belytschko, T.; Chang, T. P. Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, n. 12, p. 1666-1692, 1984.
- Bazant, Z. P.; Bhat, P. D.; Shieh, C. L. Endochronic theory of inelasticity and failure analysis of concrete structures. *Specific nuclear reactors and associated plants, Materials Science*, v.8, n. 16, 1976.

- Bazant, Z. P.; Jirásek, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128, n. 11, p. 1119–1149, 2002.
- Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.
- Benvenuti, E. Borino, G.; Tralli, A. A Thermodynamically consistent nonlocal formulation for damaging materials. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, v.21, n. 4, p. 535-553, 2002.
- Bittencourt, T. N. *Computer Simulation of Linear and Nonlinear Crack Propagation in Cementitious Materials*. Ph.D. Thesis, Cornell University, 1993.
- Bittencourt, T. N.; Ingraffea, A. R.; Llorca, J. Simulation of arbitrary, cohesive crack propagation. *Fracture mechanics of concrete structures*, v. 1, p. 339–350, 1992.
- Bittencourt, T. N.; Wawrzynek, P. A.; Ingraffea, A. R.; Sousa, J. L. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 55, n. 2, p. 321–334, 1996.
- Brand, A. S.; Amirkhanian, A. N.; Roesler, J. R. Flexural Capacity of Rigid Pavement Concrete Slabs with Recycled Aggregates. University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2013.
- Camacho, G. T.; Ortiz, M. Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, p. 2899–2938, 1996.
- Carpinteri, A.; Chiaia, B.; Nematì, K. M. Complex fracture energy dissipation in concrete under different loading conditions. *Mechanics of Materials*, v. 26, n. 2, p. 93-108, 1997.
- Chehab, G. R.; Kim, Y. R.; Schapery, R. A.; Witczak, M. W.; Bonaquist, R. Characterization of Asphalt Concrete in Uniaxial Tension Using a Viscoelastoplastic Model. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, pp. 315-355, 2003.
- Choinska, M. *Effets de la temperature, du chargement mecanique et de leurs interactions sur la permeabilite du beton de structure*. Thèse de Doctorat d'État, L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes, 2006.
- Comi, C.; Mariani, S.; Perego, U. An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 31, n. 2, p. 213 – 238, 2007.
- Comi, C. Perego, U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, v.38, p.6427–6454, 2001.
- de Borst R. *Damage, material instabilities, and failure*. Encyclopedia of computational mechanics. In: Stein Erwin, de Borst Rene, Hughes Thomas JR. vol. 2. Solids and structures. John Wiley & Sons, Ltd. p. 335–73, 2004. ISBN:0-470- 84699-2 [chapter 10].

- de Borst, R.; Pamin, J.; Geers, M. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics and Solids*, 18(6):939–962, 2002.
- de Borst R.; Remmers, J. J. C.; Needleman, A.; Abellan, M-A. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7–8):583–607, 2004.
- de Vree, J. H. P.; Brekelmans, W. A. M.; Van Gils, M. A. J. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581-588, 1995.
- Driemeier, L.; Proenca, S. P. B.; Comi, C. On nonlocal regularization in one dimensional finite strain elasticity and plasticity. *Computational Mechanics*, v. 36, n. 1, p. 34-44, 2005.
- Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional Structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2, p. 215-232, 2000.
- Duarte, C. A.; Oden, J. T. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin, May 1995.
- Duarte, C. A.; Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, p. 237-262, 1996.
- Duarte, C. A.; Hamzeh, O. N.; Liszka, T. J.; Tworzydło, W.W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 15-17, p. 2227–2262, 2001.
- Dugdale, D. S. Yield of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics and Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- Dvorkin E. N.; Cuitino A. M.; Gioia, G. Finite element with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, n. 3, p. 541–564, 1990.
- Evangelista Jr., F.; Roesler, J. R. Top-Down Cracking Predictions for Airfield Rigid Pavements. *Transportation Research Record*, v. 2095, p. 13-23, 2009.
- Evangelista Jr., F.; Roesler, J. R.; Paulino, G. H. Numerical simulations of the fracture resistance of functionally graded concrete materials. *Transp Res Rec*, 2113:122–31, 2009.
- Evangelista Jr., F.; Roesler, J. R.; Proença, S. P. B. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 97, p. 261-280, 2013.
- Gaedicke, C. *Fracture – Based method to determine the flexural load capacity of concrete slabs*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2009.

- Gaedicke, C.; Roesler, J.; Shah, S. Fatigue Crack Growth Prediction in Concrete Slabs. *International Journal of Fatigue*, v. 31, n. 8-9, p. 1309 – 1317, 2009.
- Gaedicke, C.; Roesler, J.; Evangelista Jr., F. Three-dimensional cohesive crack model prediction of the flexural capacity of concrete slabs on soil. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 94, p. 1-12, 2012.
- Gaedicke, C.; Roesler, J. Fracture-Based Method to Determine Flexural Capacity of Concrete Beams on Soil. *Road Materials and Pavement Design*, v. 11, n. 2, p. 361 – 385, 2010.
- Geers, M. G. D. Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 1997.
- Gupta, A.; Akbar, H. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering*, v. 110, n. 8, p. 1735-1746, 1984.
- Hanson, J. H.; Ingraffea, A. R. Using Numerical Simulations to Determine the Accuracy of the Size - Effect and Two-Parameter Data Reduction Methods for Fracture Toughness Tests of Concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 70, pp. 1015-1027, 2002.
- Hillerborg, A. The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete. *Mater Struct RILEM* 1985;16:291–6.
- Hillerborg, A.; Modeer, M.; Peterson, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research*, Vol. 6, pp-773-782, 1976.
- Hofstetter G.; Meschke G. *Numerical modeling of concrete cracking*. International Centre for Mechanical Sciences. vol. 532. Springer Wien New York, 2011. ISBN:987-3-7091-0896-3 [chapter 1].
- Hutchinson, J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, n. 1, p. 13-31, 1968.
- Ioannides, A. M.; Peng, J.; Swindler, J. R. ABAQUS Model for PCC Slab Cracking. *International Journal of Pavement Engineering*, Vol. 7, No. 4, p. 311-321, 2006.
- Irwin, G. R. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*. v. 24, pp. 361-364, 1957.
- Irwin, G. R. *Linear fracture mechanics: Historical developments and applications of linear fracture mechanics theory*. Envo Pub. Co., 1975.
- Jirásek, M.; Grassl, P, Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, p. 1921-1943, 2008.
- Jirásek, M.; Zimmermann, T. Analysis of rotating crack model. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 8, p. 842-851, 1998.

Kabele, P. Horii, H. Analytical model for fracture behaviour of pseudo strain-hardening cementitious composites. *Concrete Library International (proc. of JSCE)*, 29:105.120. 1997

Kachanov, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. *Otd. Tekh. Nauk.*, v. 8, p. 28-31, 1958.

Krajcinovic, D. Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, vol.8, p.117-197, 1989.

Kim, Y. R.; Chehab, G. R. Development of a Viscoelastoplastic Continuum Damage Model for Asphalt-Aggregate Mixtures: Final report as part of tasks F and G in the NCHRP 9-19 Project. National Cooperative Highway research Program (NCHRP), National Research Council, Washington, D.C., 2004.

Kim, J.; Duarte, C. A. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 104, No. 13, pp. 1139-1172, 2015.

La Borderie, C.; Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G. *Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings*. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Rapport Interne n. 123, 1991.

Lemaitre, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, v. 107, n. 1, p. 83-89, 1985.

Lemaitre, J. *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992.

Lemaitre, J.; Chaboche, J. L. *Mécanique des matériaux solides*. Paris, Dunod, 1985.

Lemaitre, J.; Chaboche, J. L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.

Lemaitre, J.; Desmorat, R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer Verlag, 2004.

Leibengood, L. D.; Darwin, D.; Dodds, R. H. Parameters Affecting FE Analysis of Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering*, vol. 112, n. 2, pp. 326-341, 1986.

Manzoli O, Claro G, Rodrigues E, Lopes J. A local-global scheme for tracking crack path in three-dimensional solids. *Computers and Concrete*, v.12, n. 3 p. 261–283, 2013.

Manzoli, O. L.; Shing, P. B. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers & Structures*, 84(10–11):742–57, 2006.

Manzoli, O. L.; Maedo, M. A.; Bittencourt Jr, L. A. G.; Rodrigues, E. A. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 153, p. 151-170, 2016.

- Mariani, S, Perego U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(1):103–26, 2003.
- Mazars, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat d'État, Université de Paris VI, 1984.
- Mazars, J. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.25, n.5/6, p.729-737, 1986.
- Mazars, J.; Berthaud, Y.; Ramtani, S. The unilateral behavior of damage concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.35, n.4/5, p.629-635, 1990.
- Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G. Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:345-365, 1989.
- Melenk, J. M.; Babuska, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.
- Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3):525–31, 1987.
- Nooru-Mohamed, M. B. Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1992.
- Oden, J. T.; Duarte, C. A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, n. 1-2, p. 117-126, 1998.
- Oliver, J. Continuum Modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, v. 17, n.1, p. 49–61, 1995.
- Oliver, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.28, n. 2, p.461-474, 1989.
- Ortiz, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials*, vol. 4, n. 1, pp. 67-93, 1985.
- Ortiz, M.; Pandolfi, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44: 1267-1282, 1999.
- Pamin, J.; de Borst, R. Gradient-enhanced damage and plasticity models for plain and reinforced concrete. In W. Wunderlich, editor, *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics – ECCM'99*, pages 482–483, paper no. 636, Munich, 1999.
- Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. Determination of the kink point in the bilinear softening model. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, n. 13, p. 3806-3818, 2008.

Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 6, p. 891-908, 2009.

Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. Cohesive Fracture Model for functionally Graded Fiber Reinforced Concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 40, n. 6, p. 956-965, 2010.

Peerlings, R. H. J.; de Borst, R.; Brekelmans, W. A. M.; de Vree, J. H. P. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, n. 19, p. 3391-3403, 1996.

Perego, M. *Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni*. Tesi di Laurea, Facoltà di Ingegneria - Politecnico di Milano, Italia, 1989.

Pereira, J. P.; Duarte, C.A.; Guoy, D.; Jiao, X. Hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, n. 5, p. 601-633, 2008.

Petersson P. E. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials, report no. TVBM-1006. *Lund, Sweden: Division of Building Materials, Lund Institute of Technology*, 1981.

Petrangeli, M.; Ožbolt, J. Smearred crack approaches – material modeling. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(6):545–54, 1996.

Pijaudier-Cabot, G.; Bazant, Z. P. Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, v. 113, N° 10, pp. 1512-1533, 1987.

Proença, S. P. B. *Mecânica do Dano*. Lecture Notes. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil, 2008.

Proença, S. P. B.; Torres, I. Generalized Finite Element method for Nonlinear Three dimensional Analysis of Solids. *International Journal of Computational Methods*, v. 5, p. 37-62, 2008.

Rabotnov, Y. N. *Creep problems in structural members*. New York, Elsevier (North Holland series in applied mathematics and mechanics, v. 7), 1969.

Radulovic, R.; Bruhns, O. T.; Mosler, J. Effective 3D failure simulations by combining the advantages of embedded strong discontinuity approaches and classical interface elements. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 78, n. 12, p. 2470-2485, 2011.

Rice, J. R.; Rosengren, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, n.1, p. 1–12, 1968.

RILEM. Determinação dos parâmetros de fratura ( $K_{IC}$  e  $CTOD_C$ ) para o concreto comum através do ensaio de flexão em três pontos. *Committee on fracture mechanics of concrete-test methods*. v. 23, p. 457–460, Mater Struct 1990.

- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Park, K.; Gaedicke, C. Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening. *Cement and Concrete Composites*, Vol. 29, No. 4, pp. 300-312, 2007a.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Gaedicke, C.; Bordelon, A.; Park, K. Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements. *Transp Res Rec*, 2037:40–50, 2007b.
- Rots, J. G.; Blaauwendraad, J. Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multidirectional or rotating? *HERON*, 34(1):3–59, 1989.
- Rots, J. G.; Nauta, P.; Kusters, G. M. A.; Blaauwendraadm, J. Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, 30(1), 1985.
- Schapery, R. A. A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, Part I: Theoretical Development. *International Journal of Fracture*, v. 11, pp. 141-159, 1975a.
- Schapery, R. A. A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, Part II: Approximate Method of Analysis. *International Journal of Fracture*, v. 11, pp. 369-388, 1975b.
- Schapery, R. A. A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, Part III: Analysis of Continuous Growth. *International Journal of Fracture*, v. 11, pp. 549-562, 1975c.
- Schapery, R. A. On Viscoelastic Deformation and Failure Behavior of Composite Materials with Distributed Flaws. *Advances in Aerospace Structures and Materials — AD-01*, pp. 5–20. ASME, New York, NY, 1981.
- Schapery, R. A. Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations with Growing Damage. *International Journal of Fracture*, v. 97, pp. 33-66, 1999.
- Schlangen E. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1993.
- Shah, S.; Swartz, S. E.; Ouyang, C. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-brittle Materials*. Wiley-IEEE, 1995.
- Simo, J. C.; Ju, J. W. Stress and strain based continuum damage models: I - Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, v.23, n. 7, p.821-840, 1987.
- Simone, A. Continuous discontinuous modeling of failure. Ph.D. thesis. University of Delft, The Netherlands, 2003.
- Simone, A.; Wells, G. N.; Sluys, L. J. (2003). From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 4581 –4607, 2003.
- Simone, A. Partition of unity-based discontinuous finite elements: GFEM, PUFEM, XFEM. *Revue Européenne de Génie Civil*, v. 11, n. 7-8, p. 1045-1068, 2007.

Tejchman, J.; Bobinski, J. *Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM*. Springer series in geomechanics and geoengineering. Berlin: Springer; 2013, DOI 10.1007/978-3-642-28463-2.

Tvergaard, V.; Hutchinson, J. W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic–plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40, 1377–1397, 1992.

Wawrzynek, P.A.; Ingraffea, A. *Discrete modeling of crack propagation: theoretical aspects and implementation issues in two and three dimensions*. Tech. rept., School of Civil Engineering and Environmental Engineering, Cornell University, 1991.

Wells, A. A. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Journal*, 10, 563–570, 1963.

Wells, G. N.; Sluys, L. J.; de Borst, R. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularised strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(5):1235–1256, 2002.

Wells, G. N.; Sluys, L. J. A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50: 2667-2682, 2001.

Willam, K.; Pramono, E.; Sture, S. *Fundamental issues of smeared crack models*. In: Shah S, Swartz S, editors. *SEM-RILEM int. conf. on fracture of concrete and rock*. Connecticut: Society of Engineering Mechanics, p. 192–207, 1987.

Xu, X. P.; Needleman, A. Numerical Simulations of Fast Crack Growth in Brittle Solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 42, No. 9, pp. 1397–1434, 1994.